JONAS HALL

Att dela en triangel

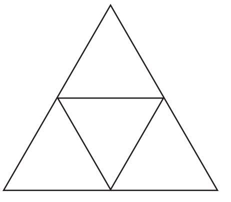
Lärartävlingen Kappa 2007 engagerade många lärare runt om i landet, se Nämnaren nr 1, 2008. Här är en lösning på en extrauppgift som även finns publicerad på Eduard Baumanns webbplats som ”modified Hall”. Det visar att även en högstadielärare med relativt enkla verktyg, tillgängliga för alla, kan bidra till den matematiska utvecklingen.

Under lärartävlingen Kappa 2007 gavs en rolig extrauppgift som går att förstå i alla åldrar och som säkert går att arbeta med även i grundskolans tidigare år om man gör det konkret och ritar på skolgården, mäter sträckor med snören etc. För äldre elever blir det härliga problem att bita i och som ändå kan rymmas inom kursen för grundskolan.

Uppgiften löd i original:

> Fyra mycket snåla systrar har fått ärva en kolonilott. Lotten har formen av triangel där alla sidor är tjugo meter. Systrarna är överens om att dela kostnaderna för ett staket som delar in lotten i fyra till arean lika stora delar och dom vill ha din hjälp med indelningen. Sätter upp det gör dom själva. Hur kort kan du göra ett sådant staket?
>
> Staketet kan vara krokigt. Beskriv formen på staketet och ange längden med tre decimaler.
>
> Du behöver inte bevisa att ditt svar är optimalt, men om du gör det är det förstås en bonus.

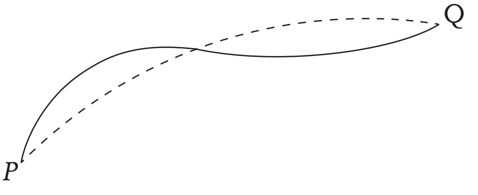
Det möjligen uppenbara svaret, att dela in triangeln i 4 identiska mindre trianglar resulterar i en staketlängd på exakt 30 meter. Men det går att förbättra detta resultat med nästan 4 meter.



Figur 1.

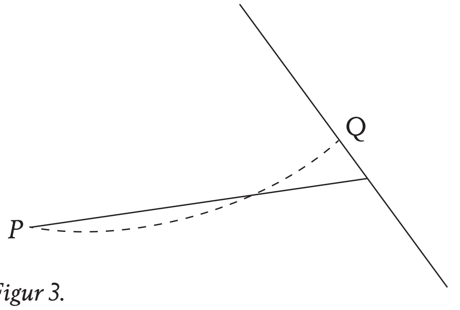
Först några funderingar

Staketet måste bestå av antingen räta linjer eller cirkelbågar. Om vi hade en kurva vars krökning varierade mellan två punkter, P och Q, skulle vi som i figur 2 kunna byta ut denna mot en rät linje eller cirkelbåge och få arean på var sida lika som förut men med kortare kurvlängd.



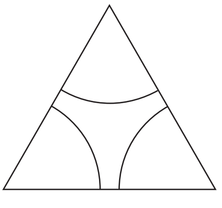
Figur 2.

Där staketen möter ytterstaketet måste dessa mötas med räta vinklar. Om de inte skulle göra det skulle man kunna byta ut den sista delen av kurvan mot en annan som gör det som då skulle vara kortare. Gör man längden storleksordningen ΔL kortare kommer arean att justeras med storleksordningen $(\Delta L)^2$ vilket kan justeras på andra platser med minimala förändringar för längden.

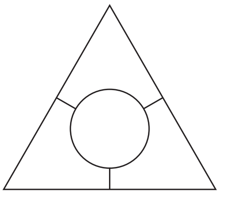


Figur 3.

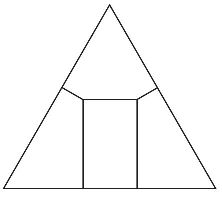
Jag började med att fundera ut dessa båda första villkor men antog först felaktigt att även interna vertex skulle mötas under räta vinklar. Jag genomsökte sedan ett stort antal konfigurationer med hjälp av Cabri Geometri, ett program för dynamisk geometri, och hittade ett antal olika konfigurationer varav till slut en som var "bäst hittills", figur 7.



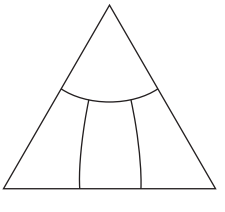
Figur 4.



Figur 5.

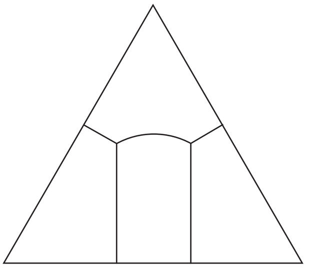


Figur 6.



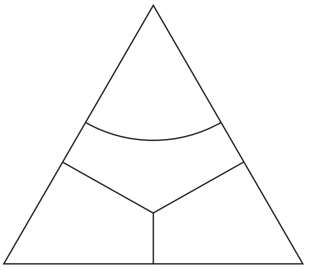
Figur 7.

Jag upptäckte sedan mitt fel med de räta interna vinklarna och modifierade min lösning till följande med 120°-vertex:



Figur 8.

Nu var det dags att se vad andra har gjort. Efter att ha sökt av internet ordentligt lyckades jag lokalisera *Eduard Baumann* som redan intresserat sig för detta problem. På hans webbplats private.mcnet.ch/baumann/ fanns följande lösning:



Figur 9.

Med denna lösning skulle staketet bli 26,844 m långt. Min lösning var bättre än detta!

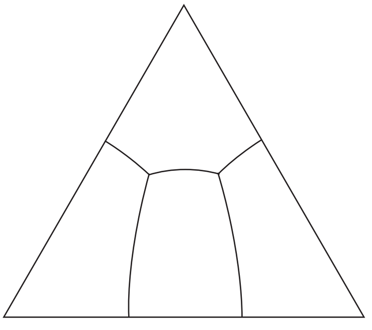
I samband med att jag letade rätt på Baumanns lösning hittade jag också Laplaces villkor för optimala lösningar som innebär att vid varje internt vertex V måste $1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 0$ där alla R_i är krökningsradierna (med tecken) för cirkelbågarna (räta linjer har $1/R = 0$). Jämför de energikrav som dyker upp vid såpbubblefysik i två dimensioner.

Eftersom två bågar runt mina inre vertex är räta linjer kan inte Laplaces villkor vara uppfyllt eftersom 0 + 0 + (något skilt från 0) givetvis inte kan vara = 0. Det får alltså bara finnas 0, 1 eller 3 räta linjer runt ett vertex, inte 2.

Jag insåg alltså att det fanns en ännu bättre lösning som man borde kunna hitta om man roterade bågarna runt vertexpunkten *V* så att alla tre blev cirkelbågar. Men nu inträffade ett problem.

Hittills hade jag hittat lösningar numeriskt i Cabri genom att ”manuellt” i Cabri söka av x- och y-koordinater för V samtidigt som jag hållit areorna konstanta. För att hitta denna nya lösning skulle jag dessutom behöva söka av en tredje variabel, rotationen runt V. Att göra detta manuellt på ett effektivt sätt var inte möjligt.

Jag kontaktade därför Eduard Bauman, redogjorde för min lösning och föreslog den lösning som finns i figur 10. Han blev intresserad och beräknade snabbt den optimala staketlängden med problemlösaren i Excel vilket är ett verktyg jag använt förr men glömt bort. Staketlängden blir ≈ 26,102 m.



Figur 10.

Lösningen är nu publicerad på hans webbplats som ”modified Hall”. Jag tycker det är roligt att jag på detta sätt ändå gjort ett infinitesimalt avtryck i den matematiska historien. Det visar att även en högstadielärare med relativt enkla verktyg, som finns tillgängliga för alla, kan bidra till den matematiska utvecklingen.

Just inom geometrin finns många problem som går att lösa för ”amatörer”. Ett klassiskt exempel är när Marjorie Rice som hemmafru i Kalifornien i mitten av 70-talet lyckades hitta nya uppsättningar av tesselllerande 5-hörningar som dittills varit okända. Tänk vad roligt om en klass kunde arbeta med ett problem och göra en upptäckt av det här slaget.

Kappa 2008 är redan i full gång men jag tycker att alla som läst detta bör anmäla sig till Kappa 2009. Vem vet, kanske är det just du som sitter på nästa lilla pusselbit i matematikens stora pussel!

LITTERATUR

Eduard Baumanns webbplats: private.mcnet.ch/baumann/

Lärartävlingen Kappa: www.math.su.se/kappa/2008/

Borgefors, G. (2007). Hemmafrun som lyckades. *Nämnaren 34(1).*

Marjorie Rice's webbplats: tessellations.home.comcast.net/~tessellations/