Pesach Laksman

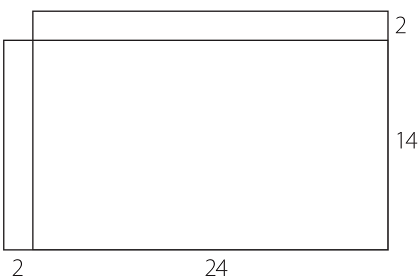
Föränderliga och harmoniska rektanglar

Det finns mycket spännande att upptäcka i en rektangel. I artikeln beskrivs hur elever från tidiga grundskoleår och upp på gymnasiet kan träna sin problemlösningsförmåga med hjälp av rektanglar.

Den tidiga skolmatematiken upplevde jag som enormt tråkig. Ett minne jag bär med mig är den ständiga träningen av tabellkunskaper och algoritmer för de fyra räknesätten. Jag minns hur frustrerad jag var över att det fanns så många resultat att komma ihåg i multiplikationstabellen och att jag önskade att $6 \cdot 9$ och $7 \cdot 8$ skulle vara samma.

Du kanske tycker att mina önskemål var underliga, men detta har i alla fall gett mig en idé om att undersöka mina studenters uppfattningar om produkters storlek. Frågan de får är vilken av produkterna $14 \cdot 26$ eller $16 \cdot 24$ som är störst. Det är en liknande fråga som den jag grubblade över i min barndom, med den skillnaden att tabellkunskaperna inte är till någon direkt hjälp här. Majoriteten av studenterna tycker att produkterna är lika.

Det är underligt när skolan kräver idog färdighetsträning hellre än att ta itu med frågor av den här typen. Att inse vilken av produkterna som är störst är enklast om man formar en rektangel med hjälp av ett snöre och sedan förändrar rektangelns form. De som gör detta märker att ju mer avlång rektangeln är desto mindre area har den. Det går även att avgöra produkternas differens med hjälp av en figur utan att behöva beräkna produkterna.



I figuren finns en gemensam del $24 \cdot 14$ och två remsor vars bredd är 2. Den långa remsan är 10 längre än den korta, vilket ger skillnaden 20 i area mellan remsorna.

Huvudräkning

Det här sambandet kan användas till en viss typ av huvudräkning som eleverna kan få möta redan tidigt i grundskolan. Innan vi tittar på i vilka sammanhang det är lämpligt, föreslår jag en övning där eleverna startar med en given kvadrat vars area beräknas. De kortar successivt den ena sidan med en längdenhet medan den andra görs lika mycket längre, så att omkretsen är oförändrad, och därefter beräknas rektanglarnas areor, exempelvis:

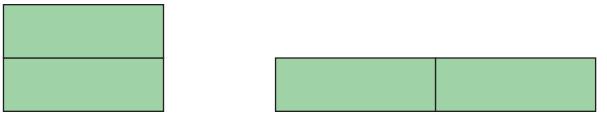
		förändring från föregående
$9 \cdot 9 = 81$	$11 \cdot 11 = 121$	
$8 \cdot 10 = 80$	$10 \cdot 12 = 120$	-1
$7 \cdot 11 = 77$	$9 \cdot 13 = 117$	-3
$6 \cdot 12 = 72$	$8 \cdot 14 = 112$	-5
$5 \cdot 13 = 65$	$7 \cdot 15 = 105$	-7

Låt eleverna göra ett eget exempel på en kvadrat och uppmuntra dem att titta efter mönster. Efter två exempel vill de kanske undersöka fler för att se om mönstret återkommer. Differenserna mellan produkterna är oberoende av vilken kvadrat de väljer. Denna nyvunna kunskap kan användas på produkter av större tal, exempelvis $28 \cdot 32$. Den kvadrat som ligger närmast är $30 \cdot 30$ och vi utgår ifrån att den beräkningen är så gott som ren tabellkunskap. Den sökta produkten $28 \cdot 32 = 30 \cdot 30 - 1 - 3$ (enligt mönstret ovan) $= 900 - 4 = 896$.

Lika stora rektanglar

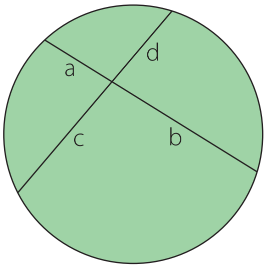
Idén om hur vi kan arbeta med rektanglar med konstant omkrets kan varieras från konstant omkrets till konstant area. I aritmetikens värld kan det vara av värde att ställa frågor som: vilken av produkterna $26 \cdot 42$ eller $13 \cdot 85$ är störst? Träffsäkerheten hos eleverna är betydligt större i detta fall än i det tidigare exemplet. Motiveringen är att den ena faktorn halveras och den andra mer än fördubblas, och därmed är den andra produkten störst. Insikter om samband av den här typen kan underlätta lärandet och kanske också hanteringen av multiplikationstabellen. Om kombinationen $4 \cdot 7$ vållar problem kan den ersättas med $2 \cdot 14$ vilken kan upplevas enklare. Frågor som stimulerar eleverna till reflektion inbjuder till en högre form av kunskap än utantillinlärning, då reflektion och resonemang utvecklar djupare förståelse och kreativitet. Därmed inte sagt att utantillinlärning inte skulle behövas, men tyvärr har denna en tendens att dominera i undervisningen.

Ekvivalenta produkter kan enkelt åskådliggöras av rektanglar med samma area. I exemplet nedan är rektangeln till höger dubbelt så lång och hälften så bred som den till vänster.



Övningar med att skapa olika rektanglar med samma area kan ges till elever i varierande åldrar. I de lägre årskurserna kan eleverna inledningsvis använda centimeterrutat papper för att enkelt rita egna rektanglar vilka kan klippas ut och itu för att undersökas. Det blir sedan ett utmanande steg att övergå till att rita på vitt papper där eleverna behöver använda linjal för att mäta sidor och vinkelhake för att åstadkomma räta vinklar. Dessa övningar är långt mer stimulerande än en ständig beräkning av areor av färdigritade rektanglar.

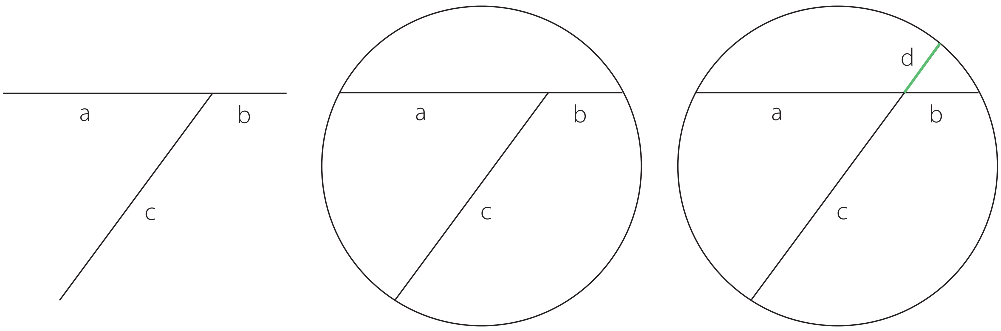
I takt med att eleverna kommer till högre årskurser i grundskolan är det viktigt med progression. Nu kan det vara på plats att använda passare och introducera konsten att mångdubbla och dela sträckor i godtyckligt många lika stora bitar, samt att konstruera räta vinklar. Dessa kunskaper kan användas till att, med utgångspunkt från en given rektangel, skapa andra lika stora rektanglar. I ovan nämnda övningar märker eleverna snart en begränsning. Om problemet är att vi har en given rektangel $a \cdot b$ och vill konstruera en annan rektangel med samma area och med en given sträcka c som sida, kommer kunskaperna om hur man mångdubblar och delar sträckor i heltalsdelar inte att räcka till.



Kordasatsen:
ab=cd

Följande övning är utmärkt för gymnasieelever. Som förkunskap behövs kordasatsen som säger att varje korda genom en given punkt inne i en cirkel delas i två sträckor vilkas produkt är konstant (enl *Matematiktermer för skolan*).

Eleverna behöver alltså konstruera en cirkel där två kordor skär varandra. Den ena kordan är summan av rektangelns båda sidor medan den andra kordans del är den givna sträckan som måste ha sin utgångspunkt i gränspunkten för de två tidigare sträckorna. För det ändamålet ritas en linje på vilken rektangelns sidor avsätts efter varandra. Från deras gränspunkt dras den givna sträckan i valfri riktning med undantag för den först dragna linjens utsträckning. Om konstruktionen utförs med hjälp av något dynamiskt ritprogram, exempelvis Geogebra, går det att iaktta hur cirkelns storlek förändras trots att de inblandade sträckorna är konstanta.



På så sätt får vi tre punkter vilka ligger på den önskvärda cirkeln. När cirkeln väl är konstruerad förlängs den givna sträckan tills den skär cirkeln och vi erhåller den sökta sidan *d*.

Harmoniska rektanglar

Om man vill studera strukturer och mönster bör man hålla alla parametrar utom en konstant vilket vi har gjort. Först höll vi omkretsen konstant och varierade arean, därefter gjorde vi tvärt om genom att konservera arean och låta omkretsen variera. Finns det kanske något annat som kan hållas konstant? Låt oss titta på två rektanglar 4 • 6 och 3 • 12. Det gemensamma hos båda är kvoten mellan area och omkrets:

$$\frac{4 \cdot 6}{2(4+6)} = \frac{3 \cdot 12}{2(3+12)}$$

Vi benämner två rektanglar med den inbördes relationen som harmoniska. Skälet till det är formeln för harmoniskt medelvärde:

$$m_h = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

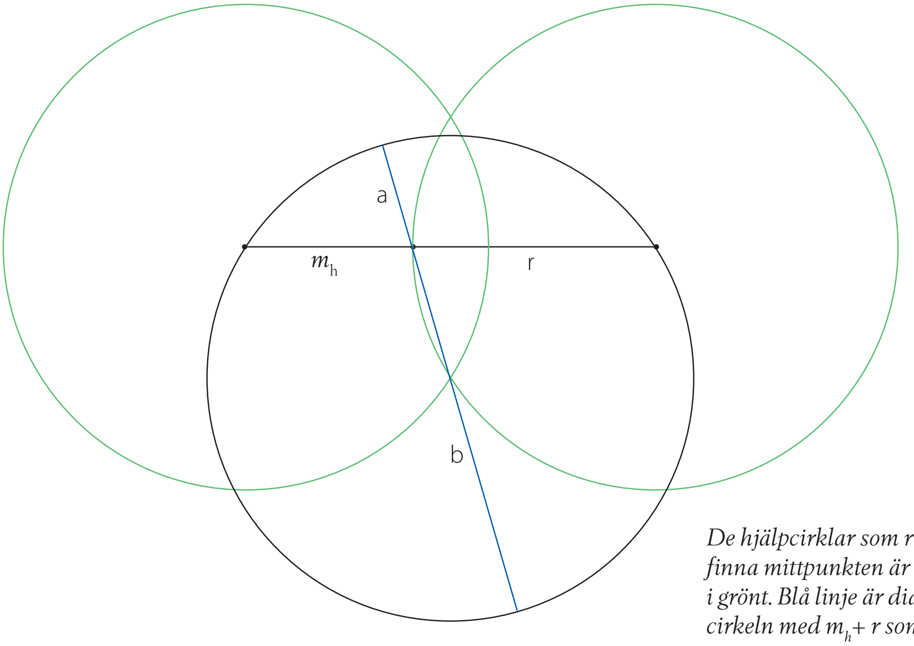
Den kan tolkas som kvoten mellan en rektangels area och aritmetiskt medelvärde av rektangelns längd och bredd. Det värdet är alltid fyra gånger större än kvoten mellan arean och hela omkretsen:

$$\frac{ab}{2a+2b}$$

Att skapa numeriska värden för sidors längder för sådana rektanglar är inte särskilt komplicerat. Vi bestämmer oss för ett värde på m_h. Därefter väljer vi ett värde på en av sidorna och genom vanlig ekvationslösning, som exemplifieras nedan, hittar vi den andra sidan. Låt oss säga att vi vill ha en rektangel med det harmoniska värdet 8 och den ena sidan 20. Ekvationen får då utseendet

$$8 = \frac{2 \cdot 20x}{20 + x}$$

där x står för den andra sidan. Den andra sidan är då 5. Genom att hålla m_h konstant och variera ingångssidor skapar vi en mängd bestående av harmoniska rektanglar. Något roligare är det däremot att *konstruera* sådana rektanglar. Vi bestämmer en sträcka som vi kallar m_h. Därefter bestämmer vi en sträcka som är längre än föregående, kallar den för r eller $(a+b)/2$, och konstruerar en sträcka som är lika lång som m_h och $(a+b)/2$ tillsammans. Den sammanlagda sträckan ska vara korda i cirkeln med radien r (som är lika lång som $(a+b)/2$). För att åstadkomma en sådan cirkel slår vi bågar med centra i sträckans ändpunkter och med radien r på samma sida om sträckan. Bågarnas skärningspunkt är den sökta cirkelns mittpunkt. Efter att ha fullbordat cirkeln drar vi diametern genom gränspunkten mellan sträckorna m_h och $(a+b)/2$. Gränspunkten delar diametern i två delar a och b som är sidorna i en rektangel vilka har det harmoniska medelvärdet m_h. Upprepas proceduren med en annan längd på radien får vi en rektangel som är harmonisk med den föregående.



De hjälpcirklar som ritas för att finna mittpunkten är här ritade i grönt. Blå linje är diametern i cirkeln med m_h+ r som korda.

LITTERATUR

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer i skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
Laksman, P. (2011). Medelvärdenas släktskap och gestaltning. *Nämnaren* 2011:4, 20–23.
Larson, N. (2010). Skilda lösningar på ett självdifferentierande problem. *Nämnaren* 2010:2, 45–49.