PER-ESKIL PERSSON

Konstnärens kvadrat

I Albrecht Dürers konstverk Melencolia I kan man se en tavla där talen 1 till 16 är avbildade i ett kvadratiskt mönster. Vid närmare gransking är detta en magisk kvadrat som ger upphov till mycket spännande problemlösning.

Den dystra kvinnan sitter djupt försjunken i tankar. Hennes blick är fäst i fjärran och hon lutar tungt sitt huvud i ena handen. Vad tänker hon på? Kanske är det egentligen en ängel vi ser? Bakom henne skymtar ett par vingar, och det verkar nästan som om de sitter på hennes skuldror. Men vad är det för märkliga saker hon är omgiven av?

Verktyg och instrument av skilda slag ligger strödda på golvet eller är upphängda på väggen bakom henne. En sovande hund och en liten kerub är de enda andra levande varelserna i bilden. Men vad är det för en märklig geometrisk kropp som står vid sidan om henne? Och är det inte ett ansikte som skymtar i en av kroppens sidor, kanske en spegling?

Till slut fångas ändå ögat av tavlan på väggen bakom kvinnan. Vi ser lite närmre på den.

Talen 1 – 16 är placerade i ett 4 × 4-mönster. Vi summerar första raden och får 34. Samma summa får vi i de tre andra raderna, i de fyra kolumnerna och även längs diagonalerna. Detta är alltså en äkta magisk kvadrat av 4:e ordningen! Varför finns den egentligen med i bilden?

Verket heter *Melencolia I* och är en etsning av renässanskonstnären *Albrecht Dürer*, utförd 1514. Årtalet finns faktiskt med i den magiska kvadraten! Dürer levde i Nürnberg 1471 – 1528 och var, liksom Lionardo da Vinci, inte bara konstnärligt och filosofiskt utbildad utan hade studerat såväl fysik och metafysik som matematik. Särskilt väl behärskade han geometrin, och gav mot slutet av sitt liv ut en lärobok i praktisk geometri. Han konstruerade också en anordning för exakta perspektivavbildningar av föremål, och använde sig flitigt av matematik i sina konstnärliga verk. *Melencolia I* innehåller mängder av symbolik på flera plan, och diskussionerna har varit många om betydelsen av föremålen i bilden. I en av förklaringarna spelar den magiska kvadraten en speciell roll.

Historia och astronomi

De magiska kvadraterna har långt tillbaka i tiden tillskrivits ockulta egenskaper. I en tidigare artikel i Nämnaren (nr 3, 2004), har beskrivits den stora betydelsen av Loshu (3:e ordningen) i den kinesiska kulturen. Men även magiska kvadrater av högre ordning hade sin plats, och dessa spreds över världen via Indien och det arabiska Kalifatet till Europa. Cornelius Agrippa (1486 – 1535), som var läkare, astrolog och teolog, konstruerade magiska kvadrater av ordning 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9. Han förknippade dem dels med de då kända "planeterna": Saturnus, Jupiter, Mars, Solen, Venus, Merkurius och Månen, och dels med mänskliga åkommor, sinnesstämningar mm. I *Melencolia I* symboliseras Saturnus av den "himmelska världen" man ser i bakgrunden, och dit kvinnan kommer med hjälp av stegen och vingarna. Även den sovande hunden är av Saturnus och också själva melankolin.

Saturnus bekämpas av Jupiter, som skyddar kvinnan med en örtakrans. Bakom henne hänger torsdagsklockan (torsdag = Jupiters dag) över den magiska Jupiterkvadraten. Kvadratens summakonstant är 34, och om man fördjupar sig i en analys av bildkonstruktionen av etsningen, finner man ett antal linjer med vinkeln 34°! Lägg till exempel märke till stegen, som står med 17° mot lodlinjen, och som har en motlinje snett ner genom kvinnans knä. Korsningen mellan linjen längs stegens högra kant och motlinjen går rakt igenom balansvågens upphängning! Det finns ett antal andra linjepar med vinkeln 34° i bilden, men det överlåtes åt läsaren att finna dem.

Under denna tid, och även betydligt senare, tillverkades och såldes speciella Jupiter-amuletter. Dessa ansågs befrämja rikedom, frid och harmoni, och skyddade mot motsatserna: fattigdom, oro och melankoli. De innehöll magiska kvadrater av ordning 4, skrivna både i latinsk och hebreisk skrift, samt mängder med religiösa och ockulta symboler. Dürer fyllde ofta sina verk med symboler, och den så kallade Dürers kvadrat hör definitivt hemma i *Melencolia I*. Men vad betyder hela verket och vem är kvinnan? Några menar att etsningen visar otillräckligheten hos mänsklig kunskap både när det gäller att uppnå himmelsk visdom och att tränga in i naturens hemligheter. Melankoli avbildades vid den här tiden ofta som en grubblande kvinna, så hon kan helt enkelt vara en allmän symbol. Men många vill också i henne se den intellektuelles (vetenskapens) frustration inför de svårigheter hon möter när hon vill undersöka den fysiska och metafysiska världen.

Kvadratkonstruktion

Det är faktiskt tämligen lätt att konstruera Dürers kvadrat. Man börjar med att skriva talen 1 – 16 i ordning uppifrån och ner i tabellen. Därefter "vänder" man talen i båda diagonalerna (gråmarkerade i vänster figur på nästa sida), och slutligen byter man plats på mittenkolumnerna (grå i mittenfiguren):

Dürers kvadrat har, vid sidan om den magiska kvadratens grundvillkor, en mängd fantastiska egenskaper. Om man delar in den i fyra kvadranter, utgående från mittpunkten, har talen i dessa kvadranter var för sig summan 34. Även 2 × 2-kvadraten i mitten har summan 34, liksom de fyra hörntalen (16 + 13 + 4 + 1). Det finns fyra stycken

Per-Eskil Persson *är lärarutbildare vid Malmö högskola och doktorand vid Luleå tekniska universitet.*

per-eskil.persson@telia.com

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

underkvadrater med rutor, och summan av hörntalen i dem är också 34. Men det finns fler sätt att få 34 ...

En spännande övning i matematikundervisningen är att låta eleverna gå på upptäcktsfärd i Dürers kvadrat för att finna summan 34 på så många olika sätt som möjligt. En ledtråd är att man kan leta efter par av tal med summan 17. Då kommer man fram till en intressant upptäckt. Dürers kvadrat är nämligen en *associativ* kvadrat. Med det menas för en kvadrat av ordning 4 att talpar, vars summa är hälften av summakonstanten, alltid ligger *symmetriskt* motsatt i förhållande till mittpunkten (spegling i punkt). Ett par är 3 och 14, och ett annat är 8 och 9. Se där! Ännu en uppsättning med fyra tal, som har summan 34! Med denna upptäckt i minnet kan många kvartetter av symmetriskt belägna tal med samma summa hittas. Vem kan hitta flest? Och vilka typer av symmetri finns det egentligen?

Det finns ännu en klass av magiska kvadrater med andra, lika fantastiska egenskaper, nämligen de *panmagiska* eller *diaboliska* kvadraterna. Faktiskt är den första magiska kvadrat av ordning 4 man historiskt känner till, den s k *Jainakvadraten*, av denna typ. Jainakvadraten hänger över porten till ett jainistiskt tempel i Khajuraho i Indien, och bedöms vara från ungefär år 1100. I en diabolisk kvadrat av ordning 4 har även de brutna diagonalerna summan 34:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Exempelvis är 16 + 13 + 1 + 4 = 34 (gråmarkerat i figuren), eftersom de bildar en bruten diagonal. Prova gärna övriga brutna diagonaler! Men diaboliska kvadrater har fler roliga egenskaper:

- Varje 2 × 2-kvadrat har summan 34, även ”över kanten”, eller i de fyra hörnen. Exempelvis är 7 + 12 + 9 + 6 = 34.
- Summan av hörntalen i varje 3 × 3-kvadrat är 34, även ”över kanten”.
- Man kan flytta över en ytterrad eller ytterkolumn till andra sidan.

Dessa egenskaper kommer bäst till sin rätt om man sätter samman flera stycken likadana diaboliska kvadrater. Här är fyra jainakvadrater tillsammans:

7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4

Vilken som helst 4 × 4-kvadrat (exempelvis den gråmarkerade i figuren) i talmönstret blir en diabolisk kvadrat. Likaså gäller egenskaperna ovan för 2 × 2- och 3 × 3-kvadrater. Vilket fantastiskt mönster att arbeta med!

En intressant fråga är hur man kan konstruera sådana kvadrater och magiska kvadrater av ordning 4 i allmänhet. Det finns många olika konstruktionssätt, och Dürers metod beskrevs ovan. Vi ska se på en annan metod, som också avslöjar ett underliggande mönster i den till synes kaotiska Jainakvadraten. Men först ett par allmänna regler för magiska kvadrater som bevarar deras magiska egenskaper:

- Man får addera, subtrahera, multiplicera eller dividera samtliga tal i kvadraten med en konstant.
- Man får addera eller subtrahera två eller flera kvadrater ruta för ruta.

Om vi subtraherar alla talen i Jainakvadraten med talet 1 får vi talen mellan 0 och 15:

6	11	0	13
1	12	7	10
15	2	9	4
8	5	14	3

Dessa kan alla skrivas som en summa av talen 1, 2, 4 och 8, d v s man gör en binär uppdelning:

	8		8
	8		8
8		8	
8		8	

4			4
	4	4	
4			4
	4	4	

2	2		
		2	2
2	2		
		2	2

	1		1
1		1	
	1		1
1		1	

I tabellen har nollorna utelämnats för att mönstren bättre ska synas. Lägg märke till att mönstret för 8 och 2 är detsamma, fast vridet 90°. Detsamma gäller mönstret för 4 och 1. Varje mönster ger faktiskt en enkel diabolisk kvadrat (kontrollera gärna). Om man permuterar talen 1, 2, 4 och 8 mellan mönstren får man 4! = 24 olika diaboliska kvadrater. Dessutom kan det ena mönsterparet spegelvändas i förhållande till det andra, vilket ger totalt 48 möjligheter. Detta är faktiskt antalet i grunden olika diaboliska kvadrater av ordning 4, bortsett från speglingar och rotationer (8 möjligheter för varje).

Om kvadraten inte behöver vara diabolisk, finns det även andra möjliga mönster, t ex:

x	x		
		x	x
		x	x
x	x		

x	x		
x		x	
	x		x
		x	x

	x		x
x	x		
		x	x
x		x	

Prova gärna att bygga nya magiska kvadrater med dessa, som alla är associativa! Men tänk på att dessa grundkvadraters egenskaper följer med. Kan någon av dessa användas för att konstruera kvadrater som Dürers? Prova gärna att analysera den på detta sätt! Och finns det fler mönster som duger, till exempel om det bara ska bli en enkel magisk kvadrat, som varken är associativ eller diabolisk? Totalt finns det 880 fundamentalt olika magiska kvadrater av ordning 4, varav 448 är enkla. Resten är associativa eller diaboliska med olika grader av magiska egenskaper. En kvadrat av ordning 4 kan inte ha båda dessa egenskaper, utan det är först med ordning 5 detta blir möjligt.

Givetvis kan man konstruera magiska kvadrater som inte innehåller talen 1–16, till exempel genom att utgå från andra tal än 1, 2, 4 och 8 i mönstren ovan. De blir då inte så kallat äkta. Kvadraternas egenskaper blir dock desamma som för äkta, och man kan tänka sig roande uppgifter, i vilka man ska ”lösa” kvadraterna, utgående från olika förutsättningar. Här kommer några sådana av varierande svårighetsgrad:

Fullborda kvadraterna genom att fylla i resterande tal i de tomma rutorna:

I

89			
92	93		
	98	84	
86			

Talen 83 – 98, Summa 362

II

			66
	69		72
64			73

Talen 61 – 76

III

	73		
	78	83	72
			86

Talen 72 – 87. Diabolisk

IV

			24
	32	38	26

Jämna tal, 18 – 48. Diabolisk

Det finns också åtskilliga magiska kvadrater, som konstruerats med alldeles speciella förutsättningar. En rolig sådan är följande, som faktiskt också fungerar då man vänder upp och ner på den!

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Slutligen kan nämnas att även de kvadrater, som bildas då man upphöjer varje tal i tex Dürers kvadrat till 2 eller 3, har intressanta egenskaper. Kanske detta även gäller matrisen, som bildas av kvadraten? Men detta lämnas åt läsaren att undersöka. Mycket nöje!

LITTERATUR

Gardner, Martin. *Rolig matematik*. Natur och Kultur, 1985.

Johansen, Carl-Otto. *Magiska tal*. Forum, 1966.

Pickover, Clifford A. *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*. Princeton University Press, 2002.

Swetz, Frank. *The Most Magical of All Magic Squares*. Mathematics Teacher Vol. 94 (September 2001): 458-463.

Ledtrådar till kvadratproblemen:

Om man inte får veta summakonstanten för kvadraten, är den lätt att beräkna om man vet att talen i kvadraten bildar en aritmetisk talföljd. Summan av en sådan är: $n(a_1+a_2)/2$, där n är antalet termer, a_1 det minsta talet och a_2. det största. I en magisk kvadrat av ordning 4 är $n = 16$. Vidare ska totalsumman delas upp på exempelvis 4 rader. Detta ger formeln för summakonstanten: $2(a_1+a_2)$

En bra idé är också att göra en lista av alla tal, som ska ingå i kvadraten, och stryka dem efter hand.

Facit till kvadratproblemen

I

89	88	94	91
92	93	87	90
95	98	84	85
86	83	97	96

II

71	67	70	66
74	62	75	63
65	69	68	72
64	76	61	73

III

76	87	74	81
82	73	84	79
85	78	83	72
75	80	77	86

IV

46	18	44	24
36	32	38	26
22	42	20	48
28	40	30	34