Per-Eskil Persson

Magikerns kvadrat

Magiska kvadrater har kinesiskt ursprung och även om de också förekommer i många kulturer så har dessa talmönster haft allra störst betydelse i kinesisk kultur. Med hjälp av ett stycke kinesisk historia inbjuds ni här att ta del av de magiska kvadraternas mysterium.

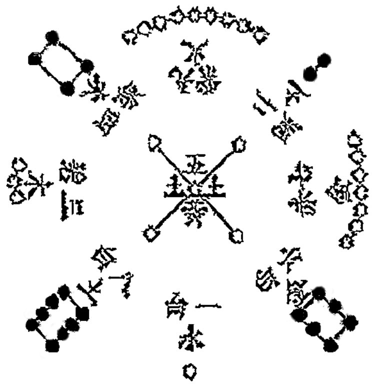
Kejsaren Yu stannade plötsligt till på sin raska promenad i den tidiga morgontimmen. Vad var det egentligen han skymtat i floden Luos grumliga vatten? En krusning på ytan som om någonting stort rörde sig in mot stranden, rakt emot honom där han stod som fastfrusen.

En blank sköld höjde sig ur vattnet, och kejsaren kunde känna en märklig utstrålning från djuret, som mödosamt kravlade upp på sanden. Det glänste som guld i morgonsolen, och i sitt hjärta visste han att sköldpaddan inte var av denna världen. Himmelens härskare Taiyi måste ha sänt den i ett speciellt ärende till honom, Yu.

Nu såg han vad han inte lagt märke till förut. På sköldpaddans skal avtecknade sig svarta och vita punkter, som satt tillsammans i nio grupper. Mitt på sköldpaddans skal var 5 vita prickar och kring kanten satt 1, 8, 3, 4, 9, 2, 7 och 6 prickar, varannan grupp vit och varannan svart. Det här måste betyda något förfärligt viktigt, men vad? Yu var väl bevandrad i kinesisk talmagi, och visste att de udda, vita talen var yang och de jämna, svarta talen var yin. Yang var den positiva energin och yin den negativa. För att en stabil värld skulle kunna existera, måste yinyang-balansen upprätthållas. Yu såg, att yin fanns vid var och en av sköldpaddans fötter och yang fram och bak, på sidorna och, naturligtvis, mitt på skölden. Men talen var också ordnade i ett annat, ännu mer perfekt mönster ...

Kejsaren Yu förstod med ens vad Taiyi ville visa honom. Det var ju en plan över Kina och hur flodernas översvämningar skulle lindras och istället utnyttjas för bevattning! Mänskligheten hade plågats av en sekellång översvämning, som tvingade många upp i bergen eller i trädtopparna och som förorsakade en fruktansvärd svält. Vattnet var fyllt av drakar och ormar som slukade allt de kom åt. Nu såg kejsaren klart hur allt skulle kunna göras. Sköldpaddan gled med ens ljudlöst ner och försvann ur synhåll i det gula vattnet. Yu skyndade mot palatset för att kalla samman sina ministrar. Nu måste handling till, och Taiyi hade stakat ut vägen.

Yu skulle snart komma att bli känd som den store magikern och schamanen, vattnens mästare, som räddade mänskligheten från att bli dränkt. Han ordnade utlopp för vattnet genom att föra de nio floderna ut till de fyra haven, och lät sedan rensa och fördjupa kanaler och diken och leda dem till floderna. Drakarna och ormarna försvann till havs med vattnet och nu kunde låglandet odlas och bebyggas och de svältande människorna kunde få mat. Det magiska mönstret blev känt som *Luoshu*, den första magiska kvadraten:

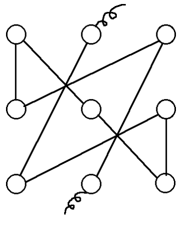


Kejsaren *Yu* levde c:a 2200 f.Kr., och var grundaren av *Xia*-dynastin i Kina. Om hans storverk berättas ännu i våra dagar många historier och legender. Det finns också ett ordspråk, som säger: ”Om inte Yu hade varit skulle vi alla varit fiskar”. Om den magiska kvadraten vet man att dess ursprung är kinesiskt, men att den sedan spritts till i första hand de hinduiska och islamiska kulturerna, och senare till de judiska och europeiska. Men ingenstans har detta talmönster haft och har ännu så genomgripande betydelse som i kinesisk kultur.

Förutom *yinyang*-aspekten innehåller *Luoshu* flera andra, för kineser viktiga, talmagiska egenskaper. Talet 5 representerar kejsaren, Kina, mitten och de traditionella fem elementen i kinesisk kosmologi: eld, jord, metall, vatten och trä. Talet 9 stod för fullbordande, och var det kraftfullaste *yang*-talet. Summan av alla talen i *Luoshu* är 45, vilket är 5 multiplicerat med 9. Summan i varje rad, kolumn eller diagonal är 15, alltså 5 multiplicerat med kvadratens ordning, 3. I kvadratens hörn finns *yin*, och *yang* bildar ett kors i mitten. *Yang* balanseras av det kraftfullaste *yin*-talet 10, som inte återfinns direkt i Luoshu. Men 45+10 = 55, och siffersumman av 55 är 10, så talet anses indirekt finnas med i mönstret. Olika metafysiska teorier, gudomlighet och spådomskonst har kopplats till talmönstret och lever fortfarande kvar i den kinesiska kulturen, bl.a. inom Tai Chi och Feng Shui.

Under *Zhou*-dynastin (1122-256 f.Kr.) byggdes *Mingtang*, ett kosmiskt tempel där kejsarna bad till himlen för imperiets räkning. Templet var utformat som en kvadrat, som representerade Jorden. Det var indelat i nio ceremonirum, som bildade de nio jordiska territorierna alternativt Kinas nio provinser. Kina var ”Mittens rike” och placerades självklart i kvadratens mitt. Talen 1 till 9 förknippades med rummen enligt *Luoshu*, som alltså blev en karta över det kinesiska universat, som också var underlag för kejserliga beslut och som bestämde framtiden. Även himlen och dess gudar följde mönstret, och himlens härskare, *Taiyi*, besökte årligen himlens palats i ”Yus steg” eller *Yubu*. Om stegen ritas ut blir det en lyckosymbol inom taoismen och samtidigt en minnesregel för hur talen ska skrivas in:

4	9	2
3	5	7
8	1	6



Vilka är då villkoren för en äkta magisk kvadrat? Jo, *summan av talen i varje rad, kolumn och diagonal ska vara lika*. Det finns inga krav på vilka talen ska vara, men oftast har de något speciellt förhållande till varandra. I det vanligaste fallet består talen av på varandra följande heltal från 1 och uppåt. Kvadraterna kan vara av tredje ordningen med 3×3 tal, fjärde ordningen med 4×4 tal, osv. *Luoshu* består alltså av talen entalen 1 till 9, vars summa är 45. Varje rad, kolumn och diagonal får då summan 45/3 = 15. Men vilka villkor gäller egentligen för hur talen får placeras? Vi symboliserar dem med bokstäverna a - i och summan med S:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Då gäller för diagonaler och mittkolumn:

$$(a+e+i)+(b+e+h)+(c+e+g)=3\cdot S$$

Vänsterledets termer omfördelas till:

$$(a+b+c)+3e+(g+h+i)=3\cdot S$$

$$S+3e+S=3\cdot S$$

$$S=3e$$

Summan måste alltså alltid vara tre gånger mittalet, vilket för talen 1 - 9 betyder att i mitten måste det vara 15/3 = 5. Ingen annan lösning är möjlig! Men hur blir det med de övriga åtta talen? Eftersom vi vet att S = 3e, kan vi ansätta två nya tal, p och q, så att:

$e-p$	$e+p+q$	$e-q$
$e+p-q$	e	$e-p+q$
$e+q$	$e-p-q$	$e+p$

För Luoshu är $e = 5$, $p = 1$ och $q = 3$ (Kontrollera!), men det går att sätta in vilka tal som helst. Exempelvis ger $e = 3$, $p = 1$ och $q = 2$ den magiska kvadraten:

2	6	1
2	3	4
5	0	4

Denna anses nog inte som särskilt "snygg", eftersom 2 och 4 förekommer två gånger, men fungerar likafullt som en magisk kvadrat. Man kan lätt konstruera olika matematiska problem, där mittalet, ett av hörntalen och en sidas mittal ges, t ex:

	10	
	9	15

Känner man till regeln med att summan är tre gånger mittalet, är det bara att räkna på för att få fram de övriga talen i kvadraten, annars kan man använda sig av algebra. Antag att talet ovanför 10 är x. Då måste talet till vänster om det vara $(x–6)$ och talet till höger $(25–x)$ (Varför?) och man får en ekvation i den nedre vänstra rutan:

$$(25-x)+10=9+15$$

som har lösningen x=11. Detta ger den efterfrågade summan 30, och resten går utan problem.

En fråga är om det finns flera möjligheter att placera in talen 1–9 förutom enligt mönstret *Luoshu*? Vi har sett att talet 5 måste vara i mitten och att de övriga bildar symmetriska par runt 5:an: 1–9, 2–8, 3–7 och 4–6. Kanske kan man sätta in dessa på olika sätt? Vi provar att sätta in 1–9 längs en diagonal:

	€	1
	5	€
9		

Man inser att talen 6, 7 och 8 inte kan placeras i samma rad eller kolumn som 9 (Varför?), utan bara i de €-märkta rutorna. Men det går ju inte att få in tre tal i två rutor. Alltså kan inte 1 och 9 få lov att vara i en diagonal, utan måste sättas i mittrutor på sidorna. Vidare medför nu den udda summan 15 att två hörntal antingen båda måste vara jämna eller udda, både i raden med 1 och raden med 9. Men det finna bara två udda kvar, så hörntalen måste vara jämna. 3 och 7 placeras in på de båda återstående mittsidesrutorna, och sedan ger sig resten lätt. Totalt kan man få 8 stycken magiska 3×3-kvadrater, som är *Luoshu* roterad eller speglad kring mittrutan (Försök skriva ner dem!). Oftast brukar alla dessa räknas som i grunden en enda lösning, varför Luoshu egentligen är unik!

Men det finns regler för hur nya magiska kvadrater av tredje ordningen kan bildas. Här är några:

- Om alla talen i *Luoshu* multipliceras med en konstant eller om en konstant adderas eller subtraheras från alla talen, bildas en ny magisk kvadrat.
- Om två magiska kvadrater adderas, tal för tal, blir resultatet en ny magisk kvadrat.
- Om *Luoshu* betraktas som en matris och denna multipliceras med sig själv tre gånger, får man också en magisk kvadrat.

Vidare har *Luoshu* ett antal intressanta egenskaper, exempelvis:

- Summan av kvadraterna i den första raden eller kolumnen är lika med summan av kvadraterna i den tredje raden resp. kolumnen.

  $4^2+9^2+2^2=8^2+1^2+6^2$,

  $4^2+3^2+8^2=2^2+7^2+6^2$

- Summan av radernas produkter är lika med summan av kolumnernas produkter:

  $4 \cdot 9 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 8 \cdot 1 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 8 + 9 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 6$

Med andra tal än heltalen 1 - 9 kan man konstruera magiska kvadrater med speciella egenskaper. Här kommer några exempel:

15	1	11
5	9	13
7	17	3

Udda tal

101	5	71
29	59	89
47	113	17

Primtal

18	4	14
8	12	16
10	20	6

Sammansatta tal

2/3	3/2	1/3
1/2	5/6	7/6
4/3	1/6	1/1

Bråk

Till alla talmagikers fasa finns även följande palindromiska magiska kvadrat med ”Vilddjurets tal” i flerfaldig uppsättning:

232	313	121
111	222	333
323	131	212

Magiska kvadrater har fascinerat människor och speciellt matematiker i alla tider sedan kejsaren *Yus* dagar. Man har förundrats över deras fantastiska och ofta överraskande egenskaper. Mycket möda har lagt ner på att finna konstruktioner av magiska kvadrater av alla ordningar, mystiker har utnyttjat dem i sina ritualer, de har avbildats i konsten (som i Albrecht Dürers kopparstick ”Melancholie”), men framför allt har de varit en källa till upptäckarglädje inom matematiken. De magiska kvadraterna kan vara utgångspunkt för spännande problem i matematikundervisningen på alla stadier, både inom aritmetik och algebra. Man kan arbeta med olika former för magiska kvadrater: additions-, subtraktions, multiplikations- eller divisionskvadrater. Vissa kvadrater av fjärde eller åttonde ordningen innehåller de mest fantastiska symmetrier och bjuder på ”magi” i dess högsta form. Men magikerns egen kvadrat, *Luoshu*, kommer alltid att vara den första och mest betydelsefulla av dem alla.

LITTERATUR

Gardner, M. (1985).*Rolig matematik*. Natur och Kultur.

Henriksson, A. & Tsu-Yü, H. (1982). *Kinesisk historia*. Bonnier Pocket.

Johansen, C-O. (1966). *Magiska tal*. Forum.

Swetz, F. (2001). The Most Magical of All Magic Squares. *Mathematics Teacher* Vol. 94 (September 2001): 458–463.

Per-Eskil Persson *är lärarutbildare på Malmö högskola och har tidigare arbetat som gymnasielärare.*