ANDREAS HERNVALD

Den kinesiske bonden och hans skatt

Hur kan ett klassiskt problem om tillväxt användas i klassrummet? Författaren har använt uppgiften för grupparbete i en åk 8. Han ger även förslag på hur arbetet kan utvecklas.

Uppgiften har sin början i den klassiska berättelsen om schackbrädet där första rutan ska innehålla ett riskorn, andra rutan två riskorn, tredje rutan fyra riskorn osv. Den finns i flera varianter och jag skrev ner en påhittad sådan.

Arbetet genomfördes i åk 8 i två klasser och inleddes med att jag läste den korta sagan för eleverna. Därefter överlät jag helt enkelt arbetsgången till dem.

Eleverna satt i grupper om 3 eller 4 och fick använda miniräknare. Arbetet sträckte sig över två lektioner, men kunde med lätthet fortsatt i ett par lektioner till.

Alla grupper förstod principen och kunde fylla i en 3×3-bräda och en 4×4-bräda. De kunde sedan addera ihop summan.

Efter litet funderande såg de ett mönster – att summan av hela brädet var ”nästa tal minus ett”. Summan kan skrivas som $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, där n är antal rutor på schackbrädet. Att teckna detta kan vara en extra utmaning för en del elever.

Detta gjorde i sin tur att de inte behövde addera alla talen i 5×5-brädan, utan kunde använda talet i sista rutan, dubblera det och subtrahera 1.

Sedan gav de sig i kast med att försöka fylla i 8×8-brädan. Snabbt fann flera det tidsödande och försökte hitta något mönster mellan raderna. (Här uppmanade jag dem att gå tillbaka till de första rutsystemen.) Flera såg då att de kunde använda den sista rutan i varje rad och se hur mycket det ökade med till sista i nästa rad. Till exempel i 3×3-brädan fann de att talen under varandra ökade med 8 gånger och i 4×4-brädan med 16 gånger. (Till nästa ruta rakt under multipliceras talet med $2 \cdot 2 \cdot 2$ eller $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.)

Oavsett om de hade detta mönster att arbeta med var alla med på att hitta talet som skulle in i sista rutan och började alltså med miniräknarens hjälp fylla i varje ruta. Efter ett tag räckte inte miniräknaren till då antalet siffror blev för många (runt ruta 28, beroende på miniräknare). Till att börja med fortsatte de att beräkna innehållet i rutorna, fast nu skriftligen. Jag manade dem att hitta andra sätt, svaret måste inte bli exakt – frågan var ju bara vem som gjorde den bästa affären. Här kom vi till avrundning till behändiga tal. Flera ”höll för nollorna” och la till dem sedan. Ingen av mina grupper använde tiopotenser, även om vi nyligen arbetat med detta. Det borde legat nära till hands.

Efter att ha fortsatt så här kom de fram till att den sista rutan borde innehålla ca $9 \cdot 10^{18}$ riskorn. Summan av alla riskorn menade de alltså skulle vara $2 \cdot 9 \cdot 10^{18} - 1$, dvs $18 \cdot 10^{18}$.

Nu gick arbetet in i nästa fas och detta hade vi kunnat lägga mer tid på. Hur mycket ris är detta? Vi talade kort om hur många riskorn det fanns i 1 gram och förslagen var mellan 100 och 1000. Vi "tog i" och räknade med 1000 st. Detta gav oss att det fanns $18 \cdot 10^{15}$ g ris vilket är $18 \cdot 10^{12}$ kg ris eller $18 \cdot 10^{9}$ ton ris (18 miljarder ton!). Här slutade vi med att konstatera att bonden gjorde den bästa affären då allt detta ris (om det nu finns så mycket) skulle kunna mätta hans by, grannbyn, osv för hundratals år framöver.

Efteråt kunde jag se tillbaka på ett grupparbete som innehöll:

- talmönster
- algebraiska uttryck
- beräkning med stora tal eller tiopotenser
- avrundning
- uppskattning av volym
- omvandling av viktenheter.

Det jag ser att jag hade kunnat utveckla är hur man kan benämna de olika rutornas produkt, dvs 2^0, 2^1, 2^2, osv. Man hade då kunnat koppla detta till det binära talssystemet (vilka rutor måste man ha för att få ihop till 7 riskorn? 9 riskorn? osv)

Efteråt har ytterligare frågeställningar dykt upp runt stora tal t ex hur stor volym alla dessa riskorn skulle ha eller hur lång raden skulle bli om alla riskorn lades på rad.

I klasserna varierade kunskaperna och en del grupper hade svårt med en del talmönster, men genom idogt räknande och klurande fick de till slut fram ett ungefärligt värde. Detta räckte för att de skulle se hur snabbt talmönstret utvecklades till stora tal och för att se vilken stor mängd riskorn sagan handlade om.

Det enkla problemet ledde överraskande till ett mycket spännande arbete!

Den kinesiske bonden och hans skatt

Det var en gång en kinesisk bonde som fann en ask av finaste guld när han grävde i sin åker. Kejsaren hörde talas om den vackra asken och begav sig till bonden. Han erbjöd honom ett får i utbyte, men bonden avböjde. Sedan erbjöd kungen honom en häst men bonden avböjde igen. Kejsaren tröttnade då och bad bonden att säga vad han ville ha för att överlämna asken till kejsaren. Bonden tänkte länge och sa:

– Kejsare, jag är mycket intresserad av schack, men det jag mest av allt behöver är mat. Därför önskar jag att du lägger ett riskorn i första rutan på schackbrädet, två riskorn på nästa, fyra på nästa och sedan för varje ruta dubbla antalet riskorn. Alla dessa riskorn vill jag ha.

Kejsaren tänkte att det var en dum bonde som inte önskade mer så han tvekade inte utan lovade att komma med allt ris så fort han kunde. Vem tycker du gjorde den bästa affären?

Frågor på vägen:

1 Hur många riskorn hade han fått om ett schackbräde har 3×3 rutor?

2 Hur många riskorn hade han fått om ett schackbräde har 4×4 rutor? 5×5 rutor?

3 Försök att hitta mönster och genvägar!

4 Ett schackbräde har 8×8 rutor. Beräkna och svara sedan på frågan i historien! Försök att använda metoder du kanske lärt dig i fråga 1 och 2.