# UPPSLAGET

## Hyperkuber

*Från Tomas Bergqvist på Umeå universitet kommer denna laboration som han har använt i gymnasieskolan. Den är också möjlig att prova på högstadiet.*

För de flesta människor är dimensioner utöver de tre vi känner till en ren fantasi. Det är dock inte alls omöjligt att diskutera geometriska figurers egenskaper i både fyra och fem dimensioner.

Begreppet hyperkub kan beskrivas på så sätt att kvadraten är en hyperkub i två dimensioner och kuben är en hyperkub i tre dimensioner. Dvs. från varje punkt utgår lika många kanter som dimensionstalet anger. I två dimensioner kan vi alltså rita två vinkelräta kanter från varje hörn. När dessa sammanbinds får vi en kvadrat. I tre dimensioner får vi tre kanter från varje hörn och en kub uppkommer. Om vi tänker oss att göra detta i fyra dimensioner får vi en figur med fyra kanter från varje hörn. Den kan vara lite svår att föreställa sig men skulle kunna se ut som i bild 1. Från varje hörn utgår alltså fyra kanter och de är samtliga vinkelräta mot varandra. Varje kant är en enhet lång och alla ytor är lika stora. På samma sätt kan man sen ta fram en hyperkub i fem dimensioner …

Vi ska titta på samma sak ur ett annat perspektiv. Om vi startar med en hyperkub i en dimension (d.v.s. två punkter sammanbundna med en kant) och gör en kopia av denna, så kan vi sen sammanbinda dessa figurer och erhålla en hyperkub i två dimensioner (se bild 2).

På samma sätt kan man duplicera en hyperkub i två dimensioner och sammanbinda hörnen för att skapa en hyperkub i tre dimensioner. Men fyra dimensioner då? Vi gör på samma sätt. Vi startar med en hyperkub i tre dimensioner, duplicerar den och sammanbinder hörnen. Tänk på att vi sammanbinder varje hörn med sin motsvarighet i den duplicerade figuren (bild 3).

Det blev ju inte så mycket bättre, eller? Vi ska se vad som händer när vi börjar undersöka hyperkubens egenskaper.

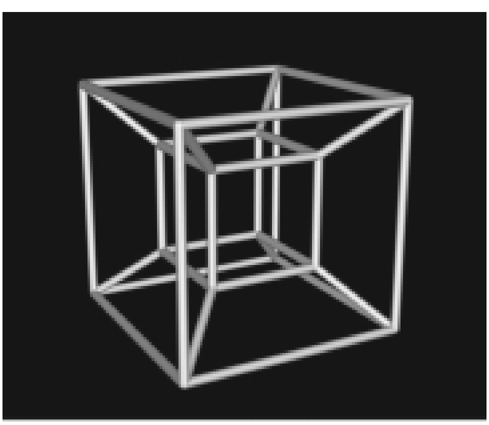

*Bild 1. Hyperkub i fyra dimensioner avbildad i tre dimensioner.*

# En laboration i flerdimensionell geometri

Vad kännetecknar en hyperkub? Jo, den består av ett antal hörn, kanter och sidoytor. Varje kant är en enhet lång och varje sidoyta är en tvådimensionell kvadrat med arean 1 a.e. Vi kan skapa en tabell som beskriver antalet hörn, kanter och sidoytor i olika dimensioner.

Denna laboration går alltså ut på att fylla i tabellen nedan. Upp till och med dimension 3 brukar inte vara nåt problem. Inte heller dimension 4 vad gäller hörn och kanter. Antalet sidoytor i dimension 4 brukar bli lite besvärligare. Det brukar lösa sig om man tittar på bild 3. När man så försöker ge sig i kast med dimension 5 tar det stopp. Nu måste vi angripa problemet inte genom att räkna, utan genom att försöka extrapolera de resultat vi redan har. Antalet hörn kan gå bra, eftersom vi kan använda oss av dupliceringsidén. Även kanterna kan fungera på det sättet. Däremot brukar antalet sidoytor i 5 dimensioner vara svårt. När man har klarat av att fylla i tabellen till och med dimension 5 kan man ge sig i kast med att generalisera resultaten till *n* dimensioner.

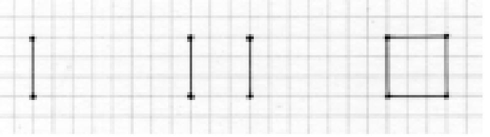

*Bild 2: Konstruktion av hyperkub i två dimensioner.*

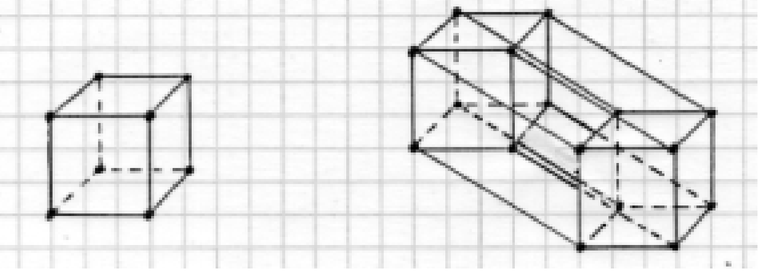

*Bild 3: konstruktion av hyperkub i fyra dimensioner.*

| Dimension | Hörn | Kanter | Sidoytor |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 1 |
| 3 | 8 | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| *n* | | | |

## Kommentarer

Många elever blir omedelbart mycket upptagna av att räkna hörn och sidor i figur 1. För att förstärka bekantskapen med hyperkuben i dimension 4 kan man själv (eleverna) bygga en modell av figur 1 med sugrör och modellera. Det underlättar självklart räknandet. Om detta görs kan man ta upp att i en sådan modell representerar vi en fyrdimensionell figur i tre dimensioner. Det är motsvarigheten till att rita en tredimensionell kub i perspektiv på ett papper, dvs. i två dimensioner.

Laborationen brukar aktivera alla elever i ganska stor utsträckning, även om inte alla hänger med i generaliseringsdiskussionen i slutet. En intressant iakttagelse har också varit att när eleverna diskuterar det $n$-dimensionella fallet går de gärna tillbaka till det *enkla* fallet med fyra dimensioner.

Jag vill tacka Manya Raman som visade laborationen för mej.

| Dimension | Hörn | Kanter | Sidoytor |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 1 |
| 3 | 8 | 12 | 6 |
| 4 | 16 | 32 | 24 |
| 5 | 32 | 80 | 80 |
| $n$ | $2^n$ | $n2^{(n-1)}$ | $n(n-1)2^{(n-3)}$ |