Algebra i olika former

Victor Firsov

Här blir vi påminda om de möjligheter som geometriska uttrycksformer kan ge vid arbetet med introduktion av algebraiska uttryck.

Varje matematiklärare känner till historien om den unge Gauss. Hans lärare bad eleverna i klassen att addera alla naturliga tal från 1 till 100. Läraren tänkte sig nog att uppgiften skulle ta lite tid, men plötsligt gav Gauss det rätta svaret, 5050.

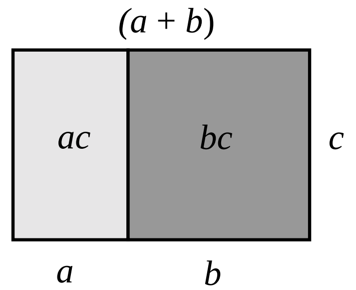
Ingen vet hur lille Gauss tänkte. Kanske såg han en geometrisk figur?

Det är faktiskt så att vissa aritmetiska och algebraiska uttryck kan illustreras med mycket enkla och tydliga geometriska bilder.

Genom att använda sådana kan elever se dolda strukturer i algebraiska uttryck, förstå varför vissa termer finns med, samt förutse och kontrollera resultat av komplicerade beräkningar.

Detta är särskilt viktigt när man har att göra med elever som har ett visuellt tänkande.

En välkänd illustration av distributiva lagen $(a + b) \cdot c = ab + bc$ är ett av de enklaste exemplen.

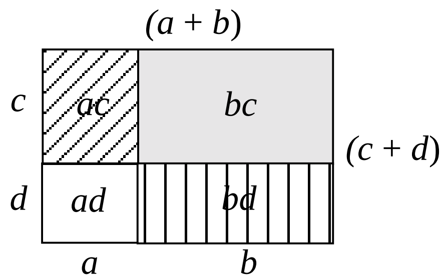


Du hittar denna bild i många läroböcker i algebra, men ofta utnyttjas den inte i den fortsatta undervisningen.

Victor Firsov är F. D. i matematikämnets didaktik samt ledare för projektet Education for all i Moskva. Han är också contributing editor till Nämnaren

Kanske är skälet att bilden inte är generellt korrekt ur strikt matematisk synvinkel eftersom a, b och c inte begränsas till positiva tal. Vi får dock inte kräva alltför mycket av bilder som ska vara minnesstöd och hjälp vid förklaringar och inte användas som bevis. Det finns därför ingen motsättning mellan dessa bilder och den formella matematiken.

Den naturliga utvecklingen av idén leder till nästa exempel som visar resultatet av en multiplikation av två binom.



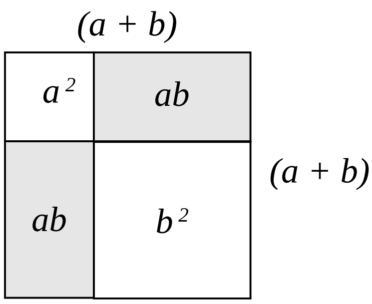
För att undvika det välkända misstaget

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

är varianten med två lika binom

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

särskilt användbar, eftersom det är uppenbart att två lika stora rektanglar kommer att finnas.



Nu är det dags att låta eleverna förutsäga formlerna för

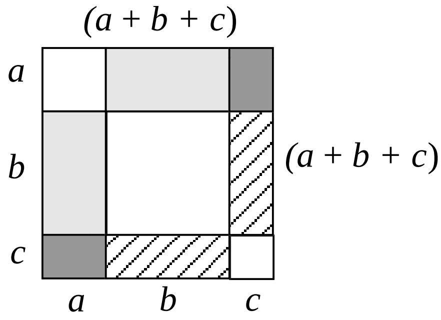
$(a + b + c)^2$

$(a + b + c + d)^2$

$(a + b + c + d + e)^2$

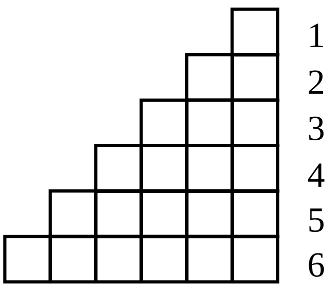
och kanske även

$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n)^2$



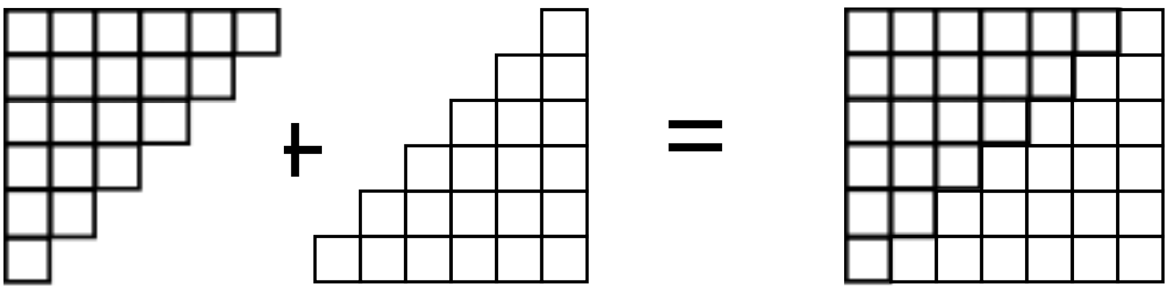
I det senaste exemplet är elevernas problem hur man ska notera resultatet – inte att förstå strukturen.

Låt oss återvända till den unge Gauss. Kanske såg han den aritmetiska summan $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ som arean av figuren nedan.

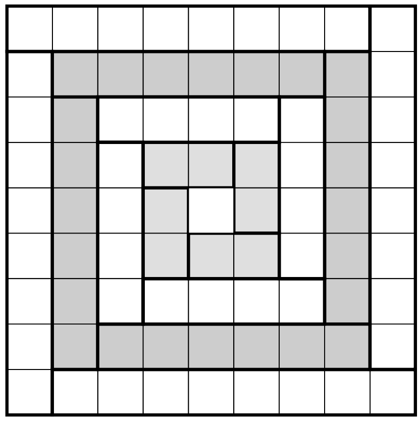


Det är lätt att hitta nästa steg i en geometrisk lösning på problemet.

Vi kan utnyttja liknande bilder för att hitta formeln för en aritmetisk summa.

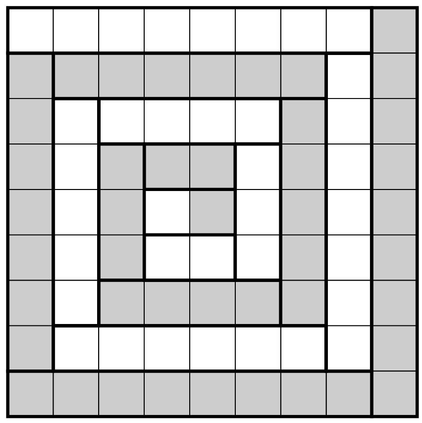


Det är fel att tro att bilden nedan är det enda sättet att se summan av de första naturliga talen. Om elever får experimentera hittar de andra. Ett par exempel:



Det första visar $1 + 4(2 + 4 + 6 + 8) = 9^2$, eller mer allmänt

$$1 + 8(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (2n + 1)^2$$



De två spiralerna i figuren ovan visar uttrycket

$$2\,(1 + 2 + \ldots + 8) + 9 = 9^2$$

eller allmännare

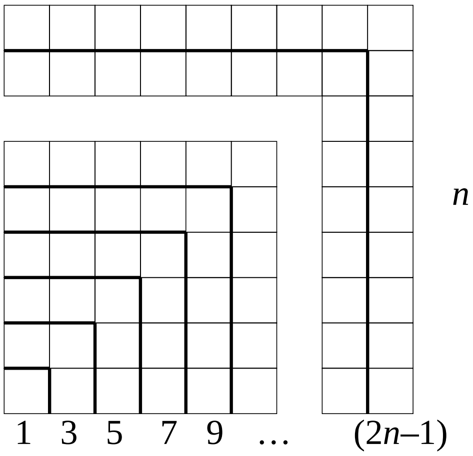
$$2\,(1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1) = (n + 1)^2$$

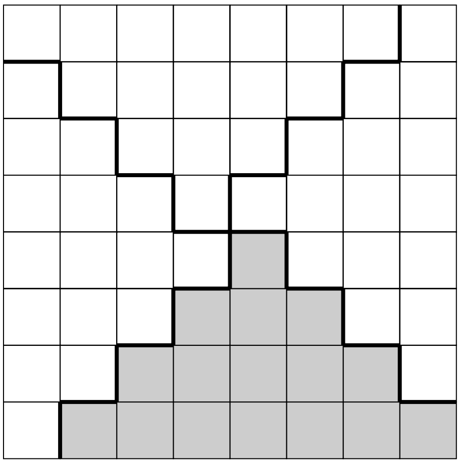
vilket är lätt att kontrollera.

Genom att experimentera med liknande bilder kan eleverna hitta viktiga samband som annars bara dyker upp som formler.

Ett av de mer välkända är nästa som illustrerar summan av de n första udda talen.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2,$$





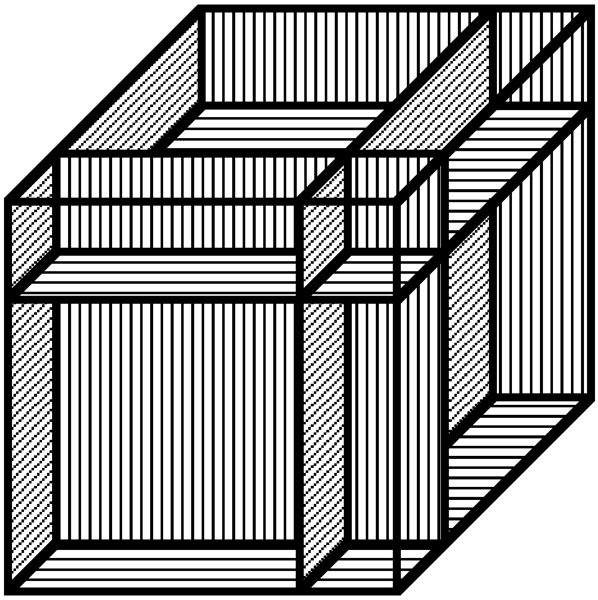
Det nedre är ett exempel på en illustration som en elev kan hitta själv.

Naturligtvis är möjligheten till illustrationer begränsad. Det är ett av skälen till att de som finns bör utnyttjas. Oväntade elevlösningar blir spännande inslag i matematiksamtalen.

Som avslutning visar jag den lockande bilden av en starholk med flera rum som visar det ”tredimensionella” sambandet:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Det är en bra spatial övning att be eleverna bestämma vilka ”rum” som motsvarar olika termer i formeln.



Intresserade elever kan man låta tillverka en $9 \times 9 \times 9$-kub av följande delblock, som man kan göra av papp, trä, frigolit e.dyl.

Delblock	Antal
$2 \times 2 \times 2$	1
$3 \times 3 \times 3$	1
$4 \times 4 \times 4$	1
$2 \times 2 \times 3$	3
$2 \times 3 \times 3$	3
$2 \times 2 \times 4$	3
$2 \times 4 \times 4$	3
$3 \times 3 \times 4$	3
$3 \times 4 \times 4$	3
$2 \times 3 \times 4$	6

Här kan man se hur fantasin i arbetet kopplas till konstruktion av formeln för:

$$(a + b + c)^3 \text{ med } a = 2, b = 3 \text{ och } c = 4.$$

Du kan även ge eleverna andra intressanta frågor som hjälper till att utveckla den spatiala förmågan och leder till kreativa samtal om kombinatorik:

- På hur många olika sätt kan man bygga om man inte betraktar det som olika att delarna bytt plats?
- Ändras resultatet om eleverna målar block av samma storlek i en färg?
- Hur många färger behövs?
- Vad händer om eleverna målar alla sidoytor med samma form i en färg?
- Hur många färger behövs nu?