

En katedral för lärande i geometri

Här beskrivs spännande erfarenheter från ett temaarbeite kring Nidarosdomen i Trondheim. Författaren är matematiker och samarbetade med en klass 6–7-åringar och deras lärare kring geometri och att utveckla varierade arbetsformer i inläringen.

Nidaros domkirke i Trondheim er en mektig katedral, hovedsakelig i gotisk stil, med mange interessante detaljer. Den ble påbegynt på 1100-tallet og hadde en byggeperiode på nesten 200 år. Etter en rekke branner i middelalderen lå den lenge i ruiner før det i 1869 ble igangsatt et stort restaureringsarbeid som har pågått helt fram til vår tid. Før reformasjonen var Nidarosdomen hovedkirke for erkebispesetet i Trondheim som ble grunnlagt i 1153. For mer informasjon om, og bilder fra, Nidarosdomen, se f.eks. (Danbolt 1997). Figur 1 viser kirkens fasade mot vest som er tydelig inspirert av engelske katedraler med såkalt skjermfront (screenfront).

Sammen med klassens lærere ønsket jeg å se hvilke matematiske erfaringer elevene kunne gjøre gjennom et besøk i katedralen. Besøket fant sted i oktober, og da hadde elevene gått på skolen om lag to måneder. De hadde arbeidet en del med geometriske figurer og lært navn på noen slik at de var kjent med begreper som trekant, kvadrat og rektangel. Det ville da være interessant å se om de kunne

kjenne igjen disse figurene når de dukket opp i katedralens forskjellige former, og om de eventuelt kunne finne noen nye figurer og eventuelt sette navn på disse.

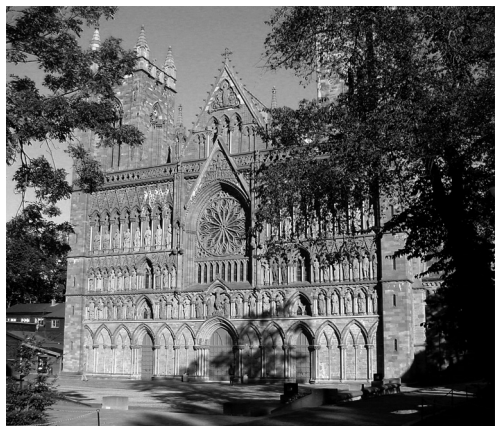
Variert begrepsstimulering

Et av hovedpoengene med å arbeide med matematikk på ulike læringsarenaer, i dette tilfellet i en kirke, er å la elevene få muligheten til å gjøre erfaringer med de matematiske begrepene i ulike omgi-

velser. Elevene skal se at matematikken finnes i omgivelsene rundt dem. Etter hvert skal de også se at matematikken ofte har en funksjon der den finnes, praktisk eller es-

tetisk. For å kunne utvikle gode, rikholdige og levedyktige begreper er det viktig å la elevene møte begrepene i mange sammenhenger. På den måten kan en sikre at flest mulig av de sentrale egenskapene ved begrepet blir erfart. Det er viktig å se f.eks. geometriske figurer i mange ulike størrelser, i ulike posisjoner og i samspill med andre geometriske

Frode Rønning är professor i matematik vid Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim



figur 1

figurer. Det er dette jeg mener med *varierte begrepsstimulering*. Gjennom diagnostiske undersøkelser kan en se at mange elever ikke kjenner igjen f.eks. en rett vinkel dersom den er plassert på en annen måte enn de er vant til å se den. Dette kan være et resultat av ensidig begrepsstimulering. Oppgaven nedenfor (Gjone og Nordtvedt, 2001) ble gitt til over 2000 elever i 6. klasse.

Uppgave 3
Er noen av disse vinklene rette? Hvilke?

a b c d e

Her var det 46 % som bare markerte vinklene A og D som rette, og 41 % som markerte alle de tre rette vinklene (A, B og D). Nesten alle (93 %) gjenkjenner vinkelen D som rett, den vanligste måten å vise en rett vinkel på, mens det er over halvparten som ikke gjenkjenner B som en rett vinkel.

Ved å ta med elevene ut av klasserommet vil en fort finne mange av de grunnleggende geometriske figurene på bygninger i nærmiljøet. Ved å oppsøke en

kirke vil en gjerne finne andre figurer enn dem man ser på mer ordinære hus. I en kirke er det kanskje runde buer, tårn og spir, og figurene kan kanskje ha andre former og dimensjoner enn det man finner på vanlige hus. I tillegg kan kirken representere et visst moment av spenning, og naturligvis ligger det vel til rette for å registrere tverrfaglige prosjekter dersom en tar i bruk kirken som læringsarena. Dette er ingen ny tanke, men kanskje er det ikke så vanlig å trekke matematikk inn i et slikt prosjekt. I denne artikkelen vil jeg først og fremst konsentrere meg om geometriske former, men det er klart at arbeid med tall også kan være sentralt i et slikt prosjekt. F.eks. vil man i en kirke ofte finne romertall, og det kan være et utgangspunkt for å arbeide med andre tallsymboler, og å snakke om hvordan tallene har utviklet seg og hvor våre tall har kommet fra. Med tanke på alderen til de elevene som er involvert her, vil fokuset være på grunnleggende geometriske former. Eksempler på mer avansert geometri i forbindelse med katedralen finnes f.eks. i (Rønning 2003).

Observasjoner i katedralen

Her vil jeg nevne noen av de observasjonene som elevene gjorde sammen med meg i kirken og drøfte disse observasjonene i sammenheng med begrepsdanning. I den eldste delen av kirken er det den romanske stilen som er framtrедende. Denne delen av kirken er bygd i årene 1155–1160. På én av veggene ble elevene oppmerksomme på buerekken som er vist på figur 2.

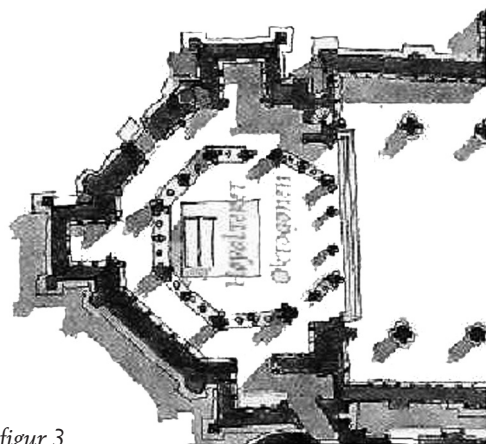


figur 2

Det første de ble opptatt av var å finne ut hvor mange slike buer det var, og de kom fram til at det på den ene veggen var 11. Så spurte jeg dem om de hadde noe forslag til hva vi skulle kalle en slik figur (bue). Etter litt samtale kom vi fram til at den lignet på en sirkel, men det var ikke en hel sirkel. De foreslo at det kanskje var en halv sirkel, og dermed ble vi enige om å kalle det en halvsirkel.

Her har vi et eksempel på at et begrep utvikles i samtale mellom barn og voksne. Den voksne styrer til en viss grad utviklingen av begrepet gjennom samtalen, men det er barna selv som konstruerer begrepet ut fra hva de ser og hører. Det navnet som kom fram, *halvsirkel*, var i dette tilfellet identisk med det formelle navnet i matematikkspråket, men slik behøver det ikke alltid å bli.

Rundt høyalteret i katedralen er det konstruert en rundgang (koromgang, ambulatorium), opprinnelig laget for å kunne ta imot strømmen av pilegrimer som kom til Trondheim i middelalderen. Koromgangen er skilt fra selve området nærmest alteret med vegger med åpninger i slik at man kan se inn, og disse veggene er bygget som en åttekant. Ytermurene rundt høyalteret har også form som en åttekant, og dette byggverket kalles da også for *oktogonal*. Figur 3, hentet fra (Danbolt 1997) viser grunnrisset av oktogonen med tre kapeller i ytterveggene, samt den øverste



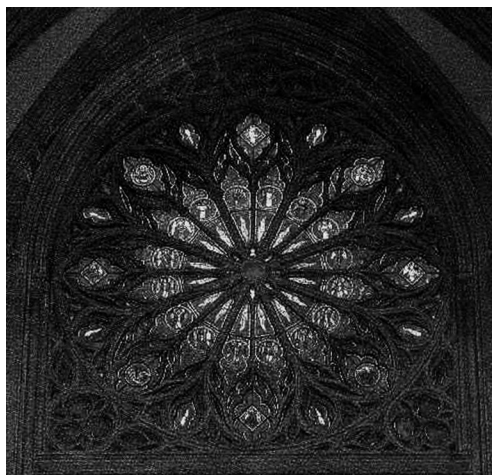
figur 3

delen av langkoret med sine søylerekker. Konstruksjonen av oktogonen med koromgang og sidekapeller var nok inspirert av Gravkirken i Jerusalem.

Jeg spurte elevene om de kunne se hva slags form golvet rundt alteret hadde, men det kunne de ikke. Her ble muligens dimensjonene for store til at de klarte å få oversikt. For å finne et navn på denne formen ble vi enige om å gå langs veggene til vi hadde kommet helt rundt og finne ut hvor mange vegger det var. Elevene gikk rundt, strøk hånden langs veggene, og for hver gang de passerte et hjørne talte de én opp. Da de kom helt rundt, hadde de talt til åtte. Da kom de til at dette måtte kalles en *åttekant*. De hadde tidligere arbeidet med trekanter og firkanter, og de var altså nå i stand til å generalisere denne måten å lage begreper på til å kunne sette navnet åttekant på det de observerte her.

Det som etterpå var interessant var at gjennom denne konkrete erfaringen med oktogonen, ble de svært bevisste på denne formen slik at de fant åttekanter på mange andre steder i kirken. De så på søylene i langkoret, og fant ut at noen av dem var åttekantete, mens andre hadde en annen form, og de begynte å diskutere hva de skulle kalle denne andre formen. Poenget med dette er dels å skape oppmerksomhet for matematikk i omgivelsene rundt oss, men det kan også uttrykkes mer allment som det å skape oppmerksomhet for detaljer. Gjennom opplevelsen med åttekanten ble elevene oppmerksomme på, ikke bare at noen av søylene var åttekantete, men kanskje viktigere; søylene var forskjellige. Det kan meget godt tenkes at en stor del av de mange mennesker som besøker Nidarosdomen, både én og flere ganger, aldri legger merke til at søylene i koret har to ulike former. Dette er slik av konstruksjonstekniske årsaker knyttet til bæringen av det gotiske ribbehvelvet i taket, men det skal jeg ikke gå inn på her.

Alle som besøker Nidarosdomen legger nok merke til rosevinduet på Vestfronten (figur 4).



figur 4

I forbindelse med dette begynte vi å telle armer i stjerna, og elevene ble overrasket over å se at også her dukket tallet åtte opp. Dette kunne også ha vært utgangspunkt for en samtale om tallet åtte sin betydning i religiøs sammenheng, men det ville kanskje ha passet bedre for litt større elever. Jeg snakket her spesielt med en gutt i klassen. Vi så at det fra hver av de åtte armene i den innerste stjerna gikk ut to armer, og jeg spurte hvor mange armer det ble til sammen. Han svarte 16. Etterpå sa han, uten oppfordring fra meg: *"Og hvis det hadde gått ut to armer fra hver av dem igjen, så hadde det blitt 32 til sammen."* På spørsmål fra meg kunne han fortsette dette tankeeksperimentet og se for seg 64 armer i neste steg. Her har vi altså et eksempel på at noe som startet som en geometrisk betraktning, utviklet seg til hode-regning med, for en seksåring, store tall. Vi ser at dette er et første steg på arbeid med multiplikasjon (fordobling), og det peker faktisk også i retning av eksponentiell vekst. En beskrivelse av et mer systematisk arbeid med dette for små barn (8–9 år) finnes i (Rangnes 1997). Mer allment har vi her et eksempel på at dette vinduet har initiert et tankeeksperiment hos denne eleven, og han er i stand til å se for seg en hypotetisk situasjon.

Etterarbeid i klassen

Noen uker etter besøket i Nidarosdomen var jeg sammen med elevene på skolen, og vi arbeidet litt med bretteing og klipping i papir. Jeg ville bygge litt på de erfaringene vi hadde gjort i kirken, så en av oppgavene var å lage en åttetakket stjerne for å henge i vinduet. Denne stjerna lages av åtte ark. Hvert ark brettes til en figur som blir slik som vist i Figur 5, og etterpå settes de åtte delene sammen til en stjerne.

Slik som med halvsirkelene i kirken var jeg nå interessert i å finne ut hva slags navn elevene ville sette på denne figuren. Jeg hadde sett at de kunne kjenne igjen firkanter, i hvert fall hvis de hadde tilnærmet rektangulær form, men ville de gjenkjenne denne figuren som en firkant? Det gjorde de ikke. Deres oppfatning av begrepet firkant er foreløpig ikke rikt nok til at de vil innlemme denne figuren i kategorien firkant. Først fikk jeg ingen forslag på navn, og jeg stilte ingen ledende spørsmål. Etter en liten stund var det en av elevene som foreslo: *"Kanskje vi kan kalle den en to-trekant"*. Dette synes jeg er svært interessant, for det forteller oss noe om hva denne eleven ser i figuren. Hun ser to trekanter. Jeg gikk ikke videre med dette da, men jeg sa at jeg syntes det var et godt navn. Med litt mer stimulering i retning av å telle kanter og hjørner ville vi trolig ha kunnet komme fram til at det også var fornuftig å kalle figuren en firkant. Med det nye, egenproduserte, navnet to-trekant ville vi ha hatt et fint utgangspunkt for å komme fram til den viktige egenskapen ved firkanter, at de er sammensatt av to trekanter.



figur 5

Sammenlignet med episoden med halvsirkelene i kirken, ser vi her at vi kom fram til et navn som var annerledes enn det offisielle navnet. Her ble et nytt navn laget, etter et klart logisk mønster basert på hva eleven så. Sammenliknet med episoden i kirken med halvsirkelene, er det en betydelig forskjell i graden av innblanding fra min side. I kirken stilte jeg spørsmål som ledet dem mot navnet halvsirkel, mens i det andre tilfellet stilte jeg ingen ledende spørsmål. På den annen side ville antakelig ikke navnet to-trekant ha dukket opp heller, hvis jeg ikke i det hele tatt hadde blandet meg inn i prosessen. Målet med arbeidet var å lage den store stjernen, og elevene ville trolig ha vært så opptatt av det at de ikke hadde brydd seg om å tenke på navn på figurene hvis ikke jeg hadde provosert dem til det.

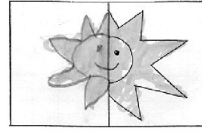
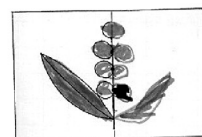
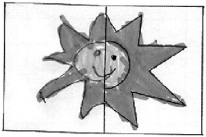
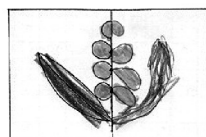
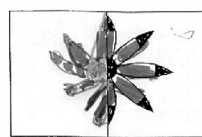
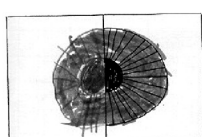
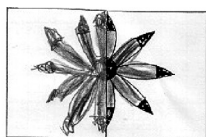
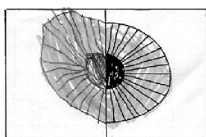
Elevene arbeidet også med å lage bilder med symmetrier. Jeg var ikke til stede under dette arbeidet, men jeg har fått tilgang til noen av tegningene de laget. Jeg tar med to eksempler på bilder laget av Sigurd (til venstre) og Øyvind (til høyre). Her var den ene delen av hver tegning laget på forhånd. Elevene skulle bare fargelegge den, og så skulle de fullføre bildet slik at det ble symmetrisk om den aksens som var inntegnet. Vi ser at elevene nok ikke har brukt en systematisk strategi for å fullføre bildet slik som f.eks. å brette om aksens og tegne over slik at det blir nøyaktig likt. Men det er klart at de har en forestilling

om hvordan det skal være, og særlig når det gjelder *antall* går dette bra. Stort sett er det samsvar mellom antall elementer på høyre og venstre side av aksens. Det viktigste unntaket er Sigurds stjerne øverst til høyre. Her er det blitt for mange spisser på venstre side. Det kan være at han har hatt litt problemer med den spissen som deles av aksens og regnet den som tilhørende den høyre delen. Til gjengjeld har Sigurd fått med seg like mange radielle streker (18) på hver side i figuren (solsikken?) øverst til venstre. Dette stemmer ikke hos Øyvind. Der ser det ut til å være 12 på venstre side. Uansett er det *mange* streker. Det som er vanskeligst å få til er å få lik *form* på hver side. Det ser absolutt ut som de har en forestilling om lik form, og at de prøver å få det til, men at det er de motoriske ferdighetene som er restriksjonen.

Det som er viktig i denne aktiviteten er at elevene ikke bare trener på å *gjenkjenne* symmetrier, men at de selv skal *gjenskape* symmetrier. Det er i mye større grad en aktiv handling som forutsetter at de er bevisste både på antall, form, størrelse og i dette tilfellet også farge. Forskjellen mellom å gjenkjenne og å gjenskape er beskrevet bl.a. hos von Glasersfeld (1995) der han snakker om begrepene *recognition* og *re-presentation*. I denne aktiviteten ble det nok ikke brukt noen spesielle hjelpemidler, men det kunne ha vært til god støtte å bruke et speil der man kan se speilbildet samtidig som tegningen blir laget.

Sigurd

Øyvind



Sluttkommentarer

En konklusjon på mine små, uformelle observasjoner kan være at elever som får gå på oppdagerferd i spennende bygninger med bevisst støtte fra læreren kan utvikle rike matematiske begreper, samtidig som de også blir oppmerksomme på detaljer ved denne bygningen som de muligens ellers ikke ville ha lagt merke til. Det samme gjelder for øvrig voksne mennesker. Jeg har flere ganger hatt med meg både lærere og mine egne lærerstudenter på en matematisk omvisning i Nidarosdomen. Jeg opplever da stadig at de gir uttrykk for at de blir oppmerksomme på detaljer ved katedralen som selv de som har vært der mange ganger tidligere, aldri har lagt merke til. Det samme vil nok gjelde mange (de fleste?) bygninger. Ved å se på dem med matematiske øyne, vil en få nye opplevelser og kanskje også utvikle en annen forståelse for deler av bygningens kulturelle historie.

REFERANSER

Danbolt, G. (1997). *Nidarosdomen, fra Kristkirke til nasjonalmonument*, Andresen og Butenschøn, Oslo.

Gjone, G. og Nordtvedt, G.A. (2001). *Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til geometri*. Læringssenteret, Oslo.

Glasersfeld, E. von (1995). *Radical Constructivism*, Routledge/Falmer.

Rangnes, T. E. (1997). Vekst og grafer. Undervisningsopplegg i 2. klasse. *Tangenten 1*, 27–35.

Rønning, F. (2003). Geometrien på Vestfronten, I *Idéhefte for grunnskolen*, Komitéen for 850-årsjubileet for Nidaros erkebispesete, Grunnskolekomitéen, Trondheim.