Rika matematikuppgifter

Ole Björkqvist

Matematiskt rika uppgifter är viktiga hjälpmedel i undervisningssituationen och fungerar som bärare av undervisningskultur. I artikeln ges exempel på hur sådana uppgifter kan uppmuntra användning av olika representationer och lösningsmetoder. Rika uppgifter kan användas som ”nyckeluppgifter”, vilka läraren återkommer till gång på gång för att stärka elevens begreppsförståelse och förmåga att se sammanhang.

Vad är en rik uppgift?

För att göra undervisning i matematik effektiv är det viktigt att man väljer arbetsuppgifterna med omtanke. Läroböckerna innehåller en hel del goda matematikuppgifter, men vissa är värdefullare än andra. Somliga kan t ex vara bra som motivationshöjande inslag i undervisningen, medan andra framhäver matematikämnets anknytning till omvärlden genom att de är realistiska tillämpningar av matematik.

En *matematiskt rik matematikuppgift* är en värdefull uppgift på grund av sitt matematiska innehåll. Jag vill speciellt framhäva uppgifter som är mångsidigt användbara genom att de

- kopplar olika tillvägagångssätt till varandra eller
- utgör utgångspunkter för utvecklandet av två eller flera helt skilda teman inom matematiken.

Inom EMU-projektet (Effektiv Matematik-Undervisning) vid lärarutbildningen i Vasa är ett av våra delmål att samla sådana matematiskt rika matematikuppgifter och göra dem tillgängliga för lärare – som komplement till alla de värdefulla uppgifter som var och en själv kan identifiera i läroböckerna. Ett sådant kompendium med uppgifter för högstadiet och gymnasiet har redan getts ut (se slutet av artikeln). Speciellt viktigt har jag personligen ansett det vara att i detalj reda ut varför de olika uppgifterna klassificerats som matematiskt rika och att i kompendiet ge förslag på hur de kan sättas in i olika sammanhang i matematikundervisningen.

I vissa fall kan man se de utvalda uppgifterna som klassiska bärare av matematisk undervisningskultur – de är helt enkelt välbekanta trotjänare som lärare genom generationer konstaterat vara effektiva för god inlärning. Trots det kan det vara på sin plats med en utredning av just varför de fungerar så bra som de gör.

Ur inlärningssynvinkel kunde man se de matematiskt rika uppgifterna som viktiga hjälpmedel vid uppbyggandet av kognitiva scheman. De känns ofta lätt igen genom de objekt som ingår i situationen och de relationer som råder mellan objekten. De har alltså potential att fungera som nyckeluppgifter för förståelse, för minnet och för vidareutveckling genom generalisering eller modifiering. Behärskandet av sådana uppgifter är viktig pedagogisk ämneskunskap för läraren genom att de förväntas

- göra matematikens struktur klarare för eleverna,
- vara lätta att komma ihåg eller
- fungera som utgångspunkter för nya uppgifter.

Ole Björkqvist *är professor i de matematiska ämnenas didaktik vid Åbo Akademis lärarutbildningsinstitution i Vasa, Finland.*

En matematiskt rik uppgift kan fungera som ett slags brobyggare inom matematikundervisningen, mellan teman, mellan metoder och över tid. Det är ingen engångsartikel, utan snarare är det en uppgift som man gärna återkommer till senare, när man lärt sig mera matematik. Då kan man undersöka den med hjälp av de nya kunskaperna.

Ibland kan man också se länkarna mellan olika teman eller tillvägagångssätt som exempel på att matematisk kunskap kan *representeras* på olika sätt. En uppgift som ”hör hemma” i algebran kan genom ett nytt betraktelsesätt plötsligt ”höra hemma” i geometrin. Man använder en annan begreppsapparat. Förmågan att gå över från en representation till en annan utvecklas inte automatiskt, men kan övas systematiskt genom att man på ett balanserat sätt använder uppgifter som tränar just detta vid sidan av de mera traditionella uppgifterna. De senare håller sig ofta bara till en enda representationsform.

Eftersom uppgifterna betonar mångsidig användbarhet, är det inte lätt att entydigt knyta dem till någon bestämd årskurs eller ens till något bestämt stadium. Ett viktigt råd är att *inte* försöka utnyttja uppgiftens hela potential vid ett enda tillfälle, och därefter anse den färdigbehandlad. Man kan återkomma till den senare om man utnyttjar dess karakteristiska drag eller ger den ett namn som gör den lätt att komma ihåg. Då kan det också vara viktigt att införa de konventionella termer som matematiker använder för sina tillvägagångssätt (t ex kvadratkomplettering). Man borde också använda litet tid för gemensam reflektion över uppgiften tillsammans med eleverna innan man lämnar den. Detta är en allmän rekommendation, men den är särskilt viktig om man avser att använda uppgiften som ”nyckeluppgift”. I samband med reflektionen är det naturligt att både diskutera variationsmöjligheter och dra allmänna slutsatser. Ofta går det då att lämna hypoteser ”hängande i luften”.

Exempel på rika uppgifter

Bland de uppgifter som man finner inströdda bland övningsuppgifterna i läroböcker för de tidigare åldersstadierna hittar man ibland riktiga pärlor, som med fog kan kallas matematiskt rika. Två exempel av ifyllnadstyp är följande

a) $2 \cdot 3 \cdot 4 = \_ \cdot \_$

b) $3 \cdot \_ = 4 \cdot \_$

Gemensamt för båda är att de framhäver uppfattningen av likhetstecknet som symbol för en relation mellan två led. I a) fungerar uppgiften diagnostiskt i detta avseende – om eleven uppfattar likhetstecknet som symbol för ”beräkna svaret”, skrivs talet 24 på det första strecket. a)-fallet har två huvudsakliga korrekta lösningar som man erhåller genom att associera faktorerna i enlighet med $(2 \cdot 3) \cdot 4$ respektive $2 \cdot (3 \cdot 4)$. Uppgiften är alltså en möjlig konkret utgångspunkt för diskussion om multiplikationens associativitet, utan att någon speciell formalisering behövs. Eftersom det därtill finns andra korrekta lösningar är uppgiften ”öppen” till sin natur och ger möjlighet till diskussion av de olika lösningarnas kvalitativa förtjänster.

b)-fallet har också oändligt många korrekta lösningar. I det fall att man väljer att sätta in talen 4 respektive 3 är uppgiften en direkt konkretisering av multiplikationens kommutativa lag. För alla andra lösningar gäller att talen i luckorna bör ha förhållandet $4 : 3$, och uppgiften är därför lämplig också när man diskuterar proportionalitet. Som kontrast mot dessa principrelaterade användningsmöjligheter kan det nämnas att uppgiften också passar i samband med övandet av tabellkunskap. Finns det något tal som ingår i såväl treans som fyrans tabell (t ex talet 24) och vilka tal skall vi då skriva i luckorna?

> Du har två kärl som rymmer 9 liter respektive 4 liter. Uppgiften är att ösa upp exakt 6 liter vatten ur en sjö. Hur kan du gå till väga?

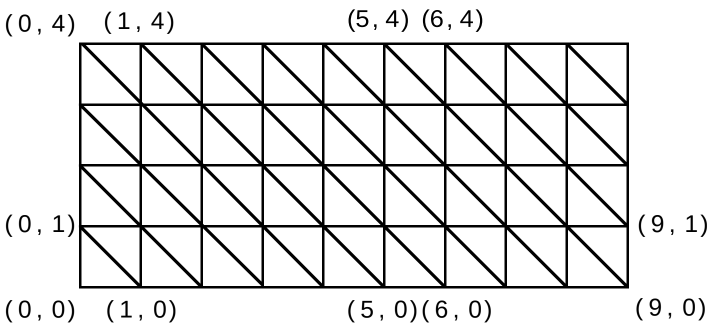
Detta är vad man kunde kalla en klassiker. Fokuseringen är här på lösningsstrategier. Samtidigt kan man betona olika sätt att föra bok över lösningsförsöken och att slutligen representera lösningen på ett lättfattligt sätt. T ex kan det vara lämpligt att med talparet (x, y) ange hur många liter man har i 9-literskärlet respektive 4-literskärlet.

En *framlängeslösning* innebär att man studerar vilka tillstånd man kan komma till från (0, 0) och hur man stegvis kan komma vidare från de möjliga tillstånden. Den kan, om man så vill, representeras i form av ett träddiagram, där någon av grenarna småningom visar sig leda till målet. En *baklängeslösning* innebär att man utgår från det önskade tillståndet (6, 0) och ser ur vilka tillstånd detta kan nås. Sedan undersöker man stegvis från vilka tillstånd det är möjligt att komma till ett önskvärt tillstånd (ett som har visat sig leda till målet). Också baklängeslösningen kan representeras med ett träddiagram.

En intressant insikt, som kan sättas i samband med att tillstånden representeras som koordinater, är att de möjliga sätten att ösa vatten kan motsvara sträckor i ett begränsat koordinatsystem, se figur nedan.

Att röra sig horisontellt motsvaras av att fylla från sjön respektive hälla bort i sjön från nioliterskärlet, att röra sig vertikalt innebär detsamma för fyraliterskärlet. Den diagonala rörelsen motsvaras av att hälla över från det ena kärlet till det andra, utan att något vatten hälls bort.

En förflyttning längs koordinaterna (0, 0), (9, 0), (5, 4) och (5, 0) innebär alltså att man först fyller nioliterskärlet från sjön, sedan fyller man fyraliterskärlet genom att hälla över från nioliterskärlet, och därefter tömmer man fyraliterskärlet i sjön.

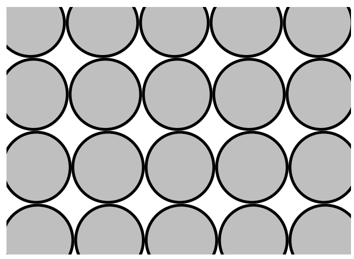


Varje förflyttning i en riktning måste vara så lång som möjligt, eftersom kärlen inte har någon litergradering.

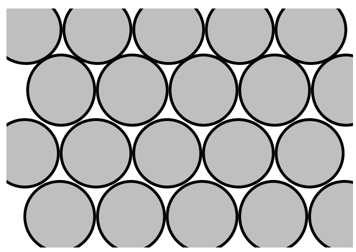
En stegvis förflyttning längs dessa sträckor, från (0, 0) till (6, 0), är en lösning till uppgiften.

En naturlig generalisering är att se på kärl med andra volymer och en annan önskad mängd vatten. Den *största gemensamma faktorn* till kärlens volymer bestämmer vilka vattenmängder som går att ösa upp – det är sådana som utgör multipler till denna faktor. Om vi har ett 9-literskärl och ett 4-literskärl är den största gemensamma faktorn 1, vilket innebär att det går att mäta upp alla heltaliga vattenmängder mellan 1 och 13 liter.

I figurerna 1 och 2 ser du två sätt att rita in oändligt många cirklar i ett oändligt stort plan. Av förklarliga skäl ser man i vartdera fallet bara en del av planet. Cirklarna berör varandra utan att täcka varandra. Beräkna hur stor del av planet som täcks av cirklarna i vartdera fallet.



Figur 1

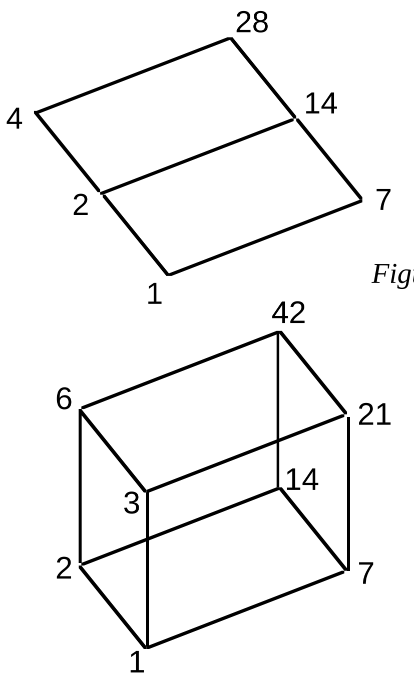


Figur 2

Uppgiften berör relationen mellan konkreta situationer som man lätt kan föreställa sig och den abstrakta föreställningen om ett oändligt plan. Den visar framför allt att man med lämpliga åtgärder kan överföra ”oändligheten” i en ändlig, hanterbar situation. I detta fall sker det genom att man utnyttjar regelbundenheten i mönstret och ser det som bestående av oändligt många likadana ”celler” som uppstår när man sammanbinder medelpunkterna i närliggande cirklar. Den ”täckta” andelen av varje cell är samtidigt den täckta andelen av hela mönstret. Beräknandet av den täckta andelen av cellen innefattar viktiga areaberäkningar.

I figur 3 ser du två *faktornät* där alla de positiva heltal som utgör faktorer till talen 28 och 42 finns inritade. Genom att gå rakt eller snett nedåt i faktornätet hittar du de tal som är *faktorer* till ovanför liggande tal, se figur nedan.

Genom att gå rakt eller snett uppåt hittar du tal som utgör *multipler* till nedanför liggande tal.



Figur 3

a) Rita det faktornät som har talet 30 överst

b) Rita det faktornät som har 90 överst

c) Rita (i samma figur) faktornäten som har talen 60 och 150 överst, så att de gemensamma delarna sammanfaller

Med uppgiften kan man göra kopplingar mellan förståelsen av tal (begrepp som faktorer, multipler, största gemensamma faktor, minsta gemensamma multipel) och förmågan att visualisera geometriska figurer (framför allt rektanglar och rätblock i perspektiv).

Uppgiften erbjuder också möjligheter till studier av likheter i matematiska strukturer. Figurerna som ritas kan göras så att de i princip ser ganska likadana ut, trots att de tal som man utgår från är olika. Uppgiften kan också ses som *grafteoretisk,* dvs som ett exempel på användningen av figurer bestående av ett visst antal *noder* (punkter) och *sträckor* som förbinder noderna.

Faktorisera uttrycket

$$x^9 + x^4 - x - 1$$

i fem faktorer.

Varje faktor skall ha termer med heltaliga koefficienter.

Om man avstår från att använda räknare med möjlighet till symbolhantering, är detta en utmärkt uppgift för övning av algebraiska manipulationer (användning av konjugatregeln, division av polynom, mm). Exponenterna är valda med stor omsorg.

Samtidigt är uppgiften ett gott exempel på att matematisk problemlösning inte behöver vara förlagd i en utanför matematiken liggande kontext och inte heller ha någon lång text. Problemet kan angripas från olika startpunkter (gruppering av termerna på olika sätt) och man kan ledas in i återvändsgränder.

Uppgiftens viktigaste lösningsprincip är tillvaratagandet och sammanställandet av partiell information som erhållits genom olika angreppssätt. Gör ett försök!

En skalbagge rör sig 1 m mot öster, svänger därefter och rör sig 1/2 m norrut. Sedan fortsätter den 1/4 m västerut, 1/8 m söderut, 1/16 m österut, osv i en ”spiralformig” rörelse.

Den kommer allt närmare en bestämd punkt som verkar utgöra slutpunkten för krypandet. Var befinner sig denna punkt?

Uppgiften kombinerar aspekter av gränsvärden, talföljder, vektorer och likformighet. Den kan lösas på ett flertal sätt som betonar dessa aspekter i olika hög grad. Textens formulering ger frihet i fråga om sättet att ange svaret. Det framgår dock ganska klart att det gäller två dimensioner och att man alltså kan behöva mer än ett enda talvärde i svaret (t ex 4/5 m öster och 2/5 m norr om startpunkten). Behandlar man uppgiften med hjälp av vektorer, framhävs förekomsten av vektorer i två vinkelräta riktningar och en diskussion kan aktualiseras om möjligheten att gruppera vektorerna i öst-västlig respektive nord-sydlig riktning skilt för sig.

Likformighet föreligger mellan hela den ”spiralformiga” banan och den bana som återstår efter varje tillryggalagd delsträcka.

Beräkna summan

ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	plus
ett	plus	ett	plus	ett	

Uppgiften kan sägas vara en grunduppgift för flera liknande uppgifter av samma typ. Den bärande idén är multiplikationsprincipen, nämligen att om elementen i en mängd kan delas upp i sinsemellan lika stora grupper (t ex raderna ovan) så kan man beräkna antalet element genom att multiplicera antalet grupper med antalet element per grupp (dvs antalet kolonner med ”ettor” ovan). Rektangelformen gör att man inte behöver uttrycka sig komplicerat – och en jämförelse med ett rektangelformigt rutmönster ligger nära till hands.

Utvidgning av uppgiften kan ske så att man tänker sig (eller placerar in) t ex ”treor” i stället för ”ettorna”, varvid multiplikationsprincipens användning genast fördjupas.

Naturligtvis kan man också skriva raderna som 1 + 1 + 1 + och man ökar då tydligheten i mönstret. Genom att hålla uppgiften som ovan vinner man däremot i utmaningsavseende – eleven måste själv tänka ut om det går att ”räkna snabbare” genom att gå systematiskt till väga, jämfört med att bara ”plussa på”.

Fortsättning

Ovanstående uppgifter har här behandlats mycket kortfattat – de didaktiska aspekterna förtjänar en mycket mer detaljerad genomgång. När man gör en sådan analys uppdagar man efter hand flera anknytningspunkter till annan matematik och får därmed på uppgiftsnivå en konkretisering av det nätverk av begrepp och procedurer, som utgör den matematiska stommen i skolmatematiken.

Som forskningsuppgift är det därtill en trevlig utmaning – att efter hand förstå mera av de matematiskt rika uppgifternas nyckelställning, att reda ut hur de uppfattas av lärare och att systematisera denna kunskap på ett sätt som gör den kommunicerbar t ex inom lärarutbildningen.

För forskningens del är det angeläget att få tillgång till de uppgifter som erfarna lärare värderar högst. Inom EMU-projektet är vi tacksamma för alla sådana bidrag.

Rapporten

Matematiskt rika matematikuppgifter för högstadiet och gymnasiet

av Ole Björkqvist

kan beställas från

Pedagogiska fakulteten, Åbo akademi,
651 01 Vasa, Finland,
fax +358-6-3247 302