



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Negativa Tal

om elevers förståelse av abstrakta tal

Cecilia Kilhamn
Lektor i matematikdidaktik
Göteborgs Universitet



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

STUDIEDESIGN

1	interviews		interviews		interviews	
	participant observations					
time line:	grade 6 (spring)	grade 7 (autumn)	grade 7 (spring)	grade 8 (autumn)	grade 8 (spring)	grade 9 (autumn)
2				video recorded lessons		one video recorded lesson

En lärare, en klass; samma från åk 6 till åk 9.

Dessutom:

99 lärarstudenter i enkätundersökning med uppföljande fokusintervjuer.

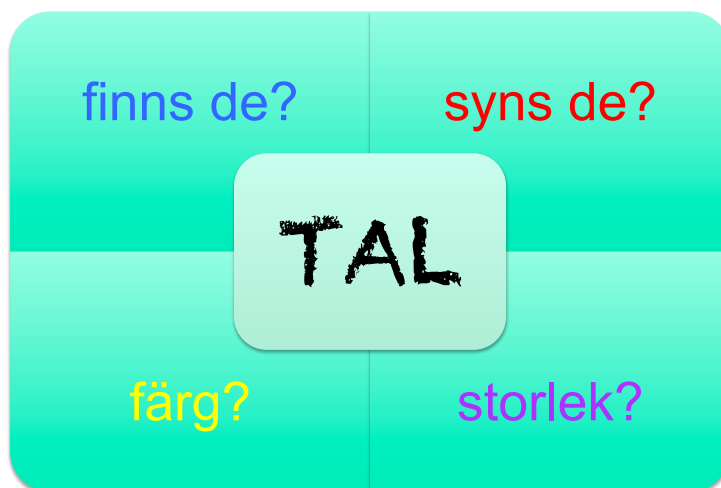
Genomgång av de negativa talens historia.

Analys av metaforer för negativa tal.

Cecilia Kilhamn, 2011

2

- ✧ **TAL** (tallinjen och storlek på tal)
- ✧ Subtraktion som **skillnad**
- ✧ Subtraktion som att **ta bort från...**
- ✧ Att förklara matematiken i matematiska termer
- ✧ Goda råd



För *Euklides* var talet 2 ett *adjektiv* som beskrev en storhet: 2 *stycken* av något.

Det användes för att kvantifiera och beskriva andra objekt.

För *oss idag* är 2 ett *substantiv*:

ett abstrakt och i någon mening autonomt objekt, som i sin tur beskrivs av andra adjektiv såsom naturlig, negativ, rationell, kontinuerlig, diskret...

Skriv ett **tal**,
vilket som helst.

Skriv nu ett tal som är större än ditt första
och ett som är mindre än ditt första

Tänk nu att du går i årskurs 6 :

$$3+12=15$$

$$1+1=2 \quad (\text{mindre tal})$$

$$600 \cdot 10000 \quad (\text{större tal})$$

Vilket är det minsta talet som finns?

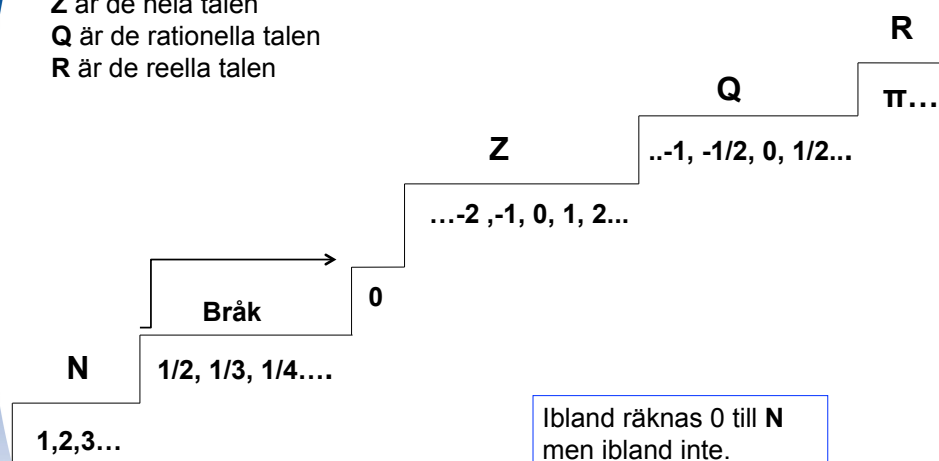
Intervjuer åk 6:

- 1
- 0,5 "Det är liksom halvt. Det är liksom inte ett helt tal."
- 0,000...1
- 0 "fast det är egentligen inget tal", "räknas inte", "är inget värt", "är ju ingenting"
- Mindre än 0? Ja det skulle väl vara 0,1 då.

Cecilia Kilhamn, 2011

7

N är de naturliga talen
Z är de hela talen
Q är de rationella talen
R är de reella talen



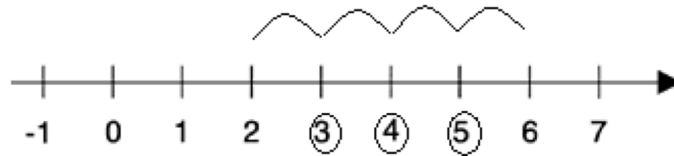
Cecilia Kilhamn, 2011

8



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Tallinjen



Pinnarna och mellanrummen

Platser, sträckor, rörelser

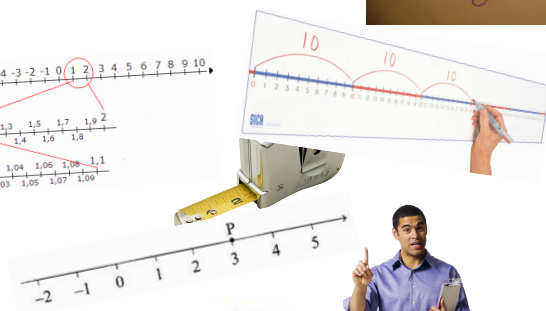
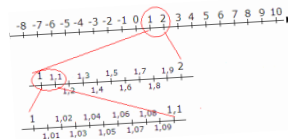
Cecilia Kilhamn, 2011

9

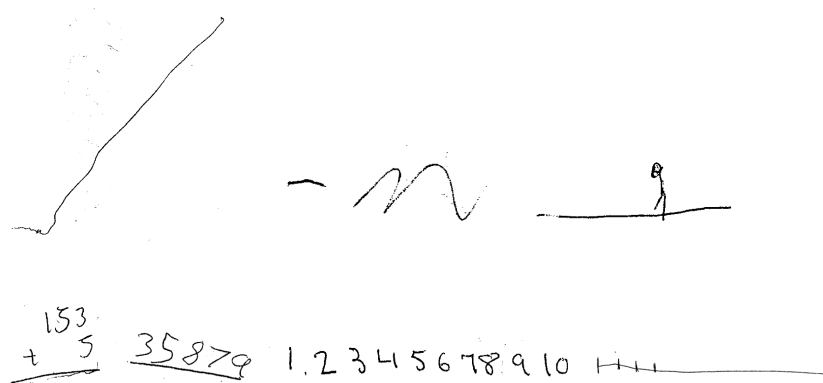


GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Vart tog tallinjen vägen i den svenska skolan?

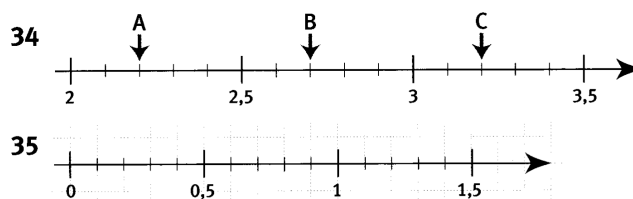


Elever åk 6: Rita en tallinje:



Cecilia Kilhamn, 2011

11



Rita av tallinjen och rita pilar som pekar på talen.

a) 0,1 b) 0,6 c) 1,2

Uppgifter i läroboken.

Endast en aspekt av tal finns med: tal som platser.

Om begreppet "tallinje" inte lyfts i klassrummet blir det inte ett tillgänglig mentalt redskap.

Cecilia Kilhamn, 2011

12

Tals storlek: vilken är minst: 1 eller -2
-3 eller -4

I årskurs 6 ser Lina enbart talens *magnitud* (*absolutbelopp*):
 $1 < -2$ och $-3 < -4$

I årskurs 7 ser Lina bara talens *värde* (*ordinalitet*):
 $-2 < 1$ och $-5 < -4$

I årskurs 8 kan Lina uttrycka att man kan se talens storlek på
två olika sätt. Hon har valt 1 som större än -2, efter lång tvekan:

Cecilia Kilhamn, 2011

13

Lina intervju G8, Q8.
Lina har valt 1 som större än -2, efter lång tvekan

8-801

Lina så är 1 ... liksom, positivt sätt större, eller förstår du
hur jag menar?

I mm

Lina och 2 är liksom minus och det är alltid mindre så

I mm?

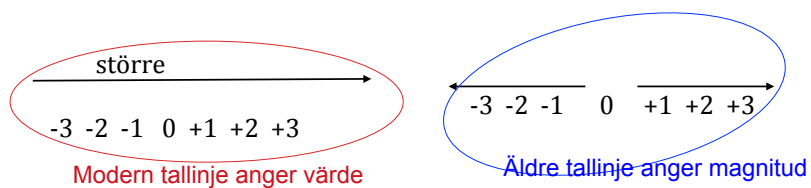
Lina men själva tvåan är större än ettan.

Cecilia Kilhamn, 2011

14

Naturliga tal och bråktal utan tecken
har bara en storlek:
värde och **magnitud** smälter samman.

Tal med tecken
har två storlekar:
värde (knutet till ordning) och
magnitud (knutet till kardinalitet / kvantitet / absolutbelopp)



Cecilia Kilhamn, 2011

15

Metaforer för tal med tecken

- Termometern – en tallinjemetafor
- Pengar – en objektsmetafor

Termometern

Lärarstudenter: $(-3) - (-8) = (-11)$

Jag tänker mig termometern
är det -3 grader och blir 8 grader kallare då blir det -11

Om jag har -3 på en termometer. Ta bort 8, då blir det -11.

- är lika med + $(8+3=11)$ tänk termometern

Termometern : stiger och sjunker

$$\pm a + b = \pm c \text{ eller } \pm a - b = \pm c$$

Kan inte hantera ett negativt b :

temperaturen kan inte sjunka eller stiga med minusgrader.
En hiss kan inte åka upp eller ner ett negativt antal våningar.

Bra för att introducera *existensen av* negativa tal.

Men sedan: Nu har vi dessa tal....

Hur ska vi tro att de beter sig
när vi subtraherar och multiplicerar dem...?

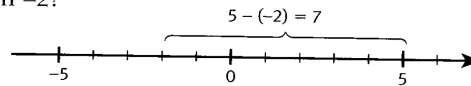


Skillnad på tallinjen: en sträcka

Vad är skillnaden mellan 5 och -2?

$5 - (-2)$. Titta på tallinjen.

$$5 - (-2) = 7 \quad 5 + 2 = 7$$



Skillnaden (sträckan) mellan punkterna a och b illustrerar

subtraktionen $a - b$ (villkor: $a > b$): $5 - (-2) = 7$

eller additionen av sträckorna a och b : $5 + 2 = 7$.

Skillnaden är en *sträcka*, kan bara vara positiv.

Ingen talar om för eleverna att det här

tankesättet inte fungerar om $a < b$;

$$(-2) - 5 = -7 \quad 2 - 5 = -3$$



En skillnad är alltid positiv

Skillnaden mellan -13° och $+22^\circ$

Skillnad mellan -35° och $+20^\circ$

$$22 - (-13) = 35$$

Int hur vet ni att ni ska ta 22 minus minus 13?

Tomas för att det, vi ska ju ha om man ska räkna ut skillnaden då ska man ta minus, alltså det, **stora talet minus, det, mindre.** [...]

$$20 - (-35) = 55$$

Tomas om man har nånting, nån skillnad då måste man ja ha ett **högre** och ett **lägre** [...] om man ska räkna ut skillnaden då, är det väl enda sättet, ta det största... alltså det måste ju alltid va... nånting, mindre än det... större.

Så det måste ju liksom finnas en... **skillnad** mellan dom,

**Axel,
intervju i slutet av årskurs 8
-6 - 2**

"Det kan vara -4"

"Man har -6 och tar bort 2 från det så blir det mindre tal: $-(6 - 2)$

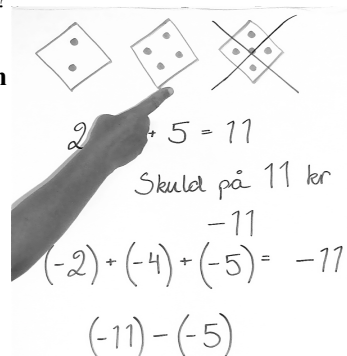
Jämför: $x - 6 - 2$ eller $0 - 6 - 2$

Tar bort *från*...

B/ $(-10) - 5 = (-5)$
Har man 10kr i skuld
och tar bort 5kr så
har man fortfarande en
skuld på 5kr

-11 - (-5) : ta bort en skuld från en skuld

- 28 Lärare Vilken **skuld** skulle du helst **ta bort**
 29 om du ville få så **liten skuld** som möjligt kvar?
 30 för att **spara så mycket pengar** som möjligt?
 31 Elev femman
 32 Lärare femman, eftersom det är **den största skulden**
 33 så **jag tar bort den**
 34 Så vi har det här och **tar bort den skulden**
 35 vad gör du när du **tar bort**?
 36 vi har minus 11 och sen, **tar vi bort**....
 37 ... **en skuld** på 5 kronor



Cecilia Kilhamn, 2011

23

Generalisera (av-kontextualisera)

Den avgörande delen – tro inte att elever klarar den själv.

$$(-11) - (-5) = (-6)$$

$$(-11) + 5 = (-6)$$

Alltså: $-(-5)$ och $+(+5)$ ger *samma värdeförändring*

Alltså: $x - (-5) = x + 5$ oavsett x

$$-(-5) = +(5)$$

Slutsats (regel): subtraktion av ett tal ger samma värde som addition av det motsatta talet.

Cecilia Kilhamn, 2011

24

Alternativ: tal som relation, förhållande, balans

Konto-**balansen** är (+50)

Vad händer med balansen om jag nu *tar bort* -30?

Vad händer om jag *lägger till* +30?

studiebidrag	+1050
mat	-250
tågresor	-300
kurslitteratur	-200
väska	-220
penna	-30
kontobalans:	+50

$$(+50) - (-30) = (+80)$$

$$(+50) + (+30) = (+80)$$

Cecilia Kilhamn, 2011

25

Alternativ: tal som relation, förhållande, balans

Konto-**balansen** är (-50)

Vad händer med balansen om jag nu *tar bort* -200?

Vad händer om jag *lägger till* +200?

studiebidrag	+1050
mat	-250
tågresor	-300
kurslitteratur	-200
väska	-320
penna	-30
kontobalans:	-50

$$(-50) - (-200) = (+150)$$

$$(-50) + (+200) = (+150)$$

Cecilia Kilhamn, 2011

26

- ✧ **TAL** (tallinjen och storlek på tal)
- ✧ Subtraktion som **skillnad**
- ✧ Subtraktion som att **ta bort från...**
- ✧ Att förklara matematiken i matematiska termer
- ✧ Goda råd

Vilken sorts förklaring?

Observationspåstående => visa med konkreta exempel.

Teoretiskt påstående => bevisa med hjälp av teorin. (inom-matematiskt)

Struktur, mönster, inga motsägelser, följer av definitioner och axiom...

Generaliseringar av tidigare kända samband.

Subtraktion som *riktad* skillnad:
den första termen jämfört med den andra

Vad är det för skillnad i storleken på det först
talet jämfört med det andra?

$7 - 4$: svar 7 är 3 *större* än 4: $7 - 4 = +3$

$4 - 7$: svar 4 är 3 *mindre* än 7: $4 - 7 = -3$

$(-5) - (-9)$: svar (-5) är 4 *större* än (-9): $+4$

$(-9) - (-5)$: svar (-9) är 4 *mindre* än (-5): -4

Subtraktion som uppräknings från delen

Subtraktion ses som en addition med en obekant.

$100 - 97 = x$ ses som additionen $97 + x = 100$
vad ska jag lägga till 97 för att det ska bli 100?

$7 - 4$ är det tal som jag lägger till 4 för att få 7 : $+3$

$3 - (-2) = \underline{\quad}$ ses som $(-2) + \underline{\quad} = 3$

$(-9) - (-5)$ är det tal jag lägger till (-5) för att få (-9) : -4

Subtraktion som uppräknings från delen: *förändring i tid*

Subtraktion ses som en addition med en obekant.
Vad har hänt? Subtrahera **nu** med **det som var förut**.

Idag 7°C igår -4°C: temperaturen har *stigit* med 3°
 $7 - 4$ är det tal som jag lägger till 4 för att få 7 : +3
+3 tolkas som *förändring uppåt* med 3°

Idag -5°C, igår -9°C: temperaturen har *sjunkit* med 4°
 $(-5) - (-9)$ är det tal jag lägger till -9 för att få -5: -4
-4 tolkas som en *förändring neråt* med 4°

Cecilia Kilhamn, 2011

31

Subtraktion genom lika tillägg

Lika tillägg : $38 - 19$

Lägg till 1 på varje term: $(38+1) - (19+1) = 39 - 20 = 19$

Lika tillägg : $(-3) - (-8)$

lägg till 8 på varje term: $(-3+8) - (-8+8) = 5 - 0 = 5$

Lika tillägg : $(-8) - (-3)$

lägg till 3 på varje term: $(-8+3) - (-3+3) = (-5) - 0 = (-5)$

Generalisera detta:

Vi kan alltid lösa subtraktioner genom att tillämpa lika tillägg och göra den andra termen till 0.

Cecilia Kilhamn, 2011

32

7 goda råd...

1. Problematisera elevernas taluppfattning.
2. Arbeta medvetet med *tallinjen* (tidigt!).
3. Klargör skillnaden mellan ett tals *magnitud* (absolutbelopp) och dess *värde*.
4. Använd begreppen *negativt tal* och *positivt tal* istället för *minustal* och *vanligt tal* (när vi inför tecken har alla tal tecken) - *subtrahera* istället för *minusa* / *ta minus*
5. Säg inte "minus minus blir plus" utan troliggöra istället att motsatt operation med motsatt tal ger samma värde.
6. När du ger eleven en metafor eller tankemodell, var då också tydlig med vilka *begränsningar* den har.
7. Våga ta steget in i matematikens värld – tala om tal som egna objekt med egna egenskaper!

Tack,

Cecilia Kilhamn

cecilia.kilhamn@ped.gu.se

Avhandlingen finns på:
<http://hdl.handle.net/2077/24151>

