

Taluppfattning och allsidiga räknefärdigheter

Handbok för stöd och stimulans

Alistair McIntosh

NCM

NSMO

Alistair McIntosh

Professor emeritus, University of Tasmania Australien



"Nya vägar i räkneundervisningen"
*Lära och undervisa matematik –
internationella perspektiv (2006)*

"Mental computation of school-aged
students: Assessment, performance
levels and common errors"
Google.se, Alistair McIntosh, mathematics.

"Perspektiv på Number sense och
taluppfattning" *ncm.gu.se, Strävorna*

Perspektiv på Number sense och taluppfattning

En elev med Number sense

- *tittar på ett problem i sin helhet innan hon går in på detaljer*
- *letar efter samband mellan tal och operationer och tar hänsyn till ett problems sammanhang*
- *väljer att hitta en metod som stämmer med den egna förståelsen av sambandet mellan tal, eller mellan tal och omvärld och strävar efter den mest effektiva representationen eller tolkningen av den givna uppgiften*
- *använder hållpunkter eller "benchmarks" för att bedöma tals storlek*
- *känner igen orimliga resultat på uträkningar när man på vanligt sätt reflekterar över svar (B. Reys & R. E. Reys, 1995)*

Kursplanen: Matematik utgår från begreppen TAL och RUM

Kommentarer till grundskolans kursplan och
betygskriterier, 1997

Taluppfattning (Number sense)

Relationer inom tal, talet 7:

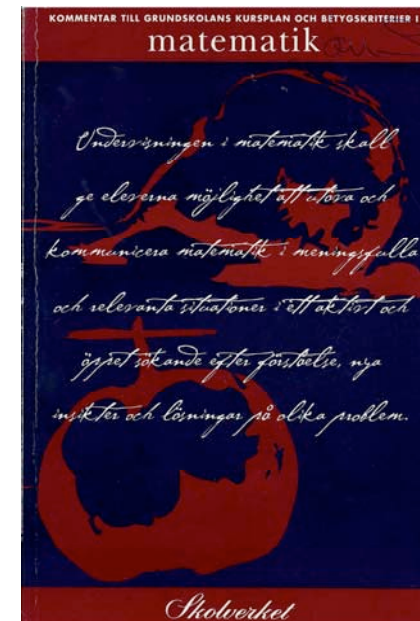
0 och 7, 1 och 6, 2 och 5, 3 och 4

Relationer mellan tal:

6 är ett mindre än 7, 9 är två mer än 7

Relationer mellan tal och omvärld

Vi är fem i familjen, två vuxna och tre barn



<http://www.skolverket.se/publikationer?id=294>

Innehållet i handboken bygger på forskning och beprövad erfarenhet

- *Ett stöd i undervisningen för att elever ska utveckla god taluppfattning och goda räknefärdigheter.*
- *Ett stöd för att visa på vidden och progressionen i arbetet med tal i grundskolan.*
- *En hjälp för lärare att kartlägga, analysera och åtgärda missuppfattningar och svårigheter som elever ger uttryck för.*
- *Ett stöd för lärare att undvika att skapa missuppfattningar genom sin undervisning. Förebyggande insatser är centrala!*

Taluppfattning, f-klassen – årskurs 9

- *Översiktstest och utvärderingsschema*
- *Stöd för tolkning av enskilda test på respektive nivå*
- *Stöd för uppföljande intervjuer*
- *Exempel på vanliga missuppfattningar och svårigheter*
- *Bakgrunden till problemen*
- *Allmänna och specifika förslag för undervisningen.*



1. Vad kan du få veta genom att låta elever lösa den här uppgiften?
2. Vilka svårigheter och missuppfattningar kan finnas?
3. Vad kan du göra i undervisningen?

Översiktstest, taluppfattning nivå 2

1	2	3	○	○	6	○	○	●	10
11	12	○	14	○	○	○	○	○	○
21	○	○	○	●	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	●	○	○

Talen är placerade i följd, men några gömmer sig bakom prickar. Vilka tal finns bakom de svarta prickarna?

Kommentar

Uppgiften avser att visa hur säker eleven är på att räkna där flera inblandade tal saknas och om eleven uppfattar det aktuella mönstret och kan använda det.

(Eftersom talen är ordnade i rader om tio är talsorterna de samma i varje kolumn).

*Exempel på vanliga svårigheter och missuppfattningar
i samband med räkneord och räkning*

Elever kan ha en allt för begränsad talrad. Observera en tröskel vid talet 29 (tjugotio, tjuogoelva..).

Elever kan ha svårt att förstå den "brutna" tallinjen.

Elever kan inte utnyttja att räkna i 2-, 5- och 10-steg därför att de helt enkelt har för få erfarenheter av att göra detta i vardagliga situationer, muntligt och skriftligt.

(Observera att det inte är samma sak att tyst skriva talföljder som att säga dem).

Förslag på aktiviteter

- Räkna ofta framåt och bakåt på räkneramsan i små och stora talområden. Det hjälper eleven att etablera mönstret i den aktuella talföljden.
- Räkna framåt och bakåt i steg om två, fem och tio med och utan hjälp av tex tallinje och hundraruta.
- Räkna framåt och bakåt i steg om två, fem och tio från vilket tal som helst (tex 70, 23, 82...).
- Arbeta med talserier kopplat till addition och subtraktion med hjälp av miniräknaren. Eleven säger vilket tal som följer på det aktuella talet och kontrollerar med den programmerade miniräknaren.
- *Skriv* aktuella talföljder. Skriv talen under varandra så att mönstret i sekvensen framträder tydligare.

Översiktstest, nivå 7

Jag tänker på ett tal mellan 1,1 och 1,2. Ringa in A, B eller C och skriv färdigt svaret:

A. Det finns inga tal, därför att _____

B. Det finns bara ett tal, det är talet _____

C. Det finns många tal, t.ex. _____ och _____

Kommentar

Visar om eleven har förståelse för positionssystemet i decimalform och att det mellan två decimaler finns många tal.

Tal i decimalform – vanliga missuppfattningar

6,50 består av två separata tal, 6 och 50.

0,5 är inte samma tal som 0,50.

Decimaltecknet uppfattas som centrum i talet med tiotal på var sida.

0,12 är ett större tal än 0,9 eftersom 12 är större än 9.

Det finns inga decimaltal mellan 0,5 och 0,6 eftersom det inte finns några hela tal mellan 5 och 6.

- Visa båda formerna av skrivna längdmått – i decimalform och som meter och centimeter, intill varandra. Gör det samma för tider, penningbelopp, vikter, volymer etc.

Kajsa Bergqwist 2,06 m. 2 m och 6 cm.
2 m 0 dm 6 cm.

Emma Green 1, 96 m. 1 m och 96 cm.
1 m 9 dm 6 cm.

- Använd Tanketavlan för att utveckla förståelsen för olika uttrycksformer.
- Låt eleven representera tal i decimalform på Tomma tallinjen.

- *Räkna i kör framåt och bakåt*

0,1 0,2 0,3...1,0 1,1

0,3 0,6 0,9...

0,01, 0,02 0,03...

0,25 0,50...

1,9 1,8...

3 2,5 2...

- *Skriv talföljder*

- Låt eleverna förklara att 0,75 kan uppfattas både som $7/10 + 5/100$ och som $75/100$ och att 1,5 kan vara både en hel och fem tiondelar och 15 tiondelar.

- Uppmärksamma riktmärken bland tal i bråkform och decimalform, tex: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{3}{4} = 0,75$ osv.

Tre Stråk med 22 områden

Förståelse för tal

Räkneord,

Räkna,

Positionsvärde,

Decimaltal,

Bråk,

Relationer mellan bråk, procent och decimaltal,

Negativa tal,

Skattning.

Förståelse för operationer med tal

*Representationer – textuppgifter/ symboler
– addition och subtraktion,*

*Representationer – textuppgifter/symboler -
multiplikation och division,*

Multiplikation med tal som är mindre än ett

Användning av parenteser

Välja relevant beräkningssätt.

Räkna

Grundläggande tabellkunskaper, addition, subtraktion

Grundläggande tabellkunskaper, multiplikation och division

Generalisering av grundläggande tabellkunskaper

Huvudräkning, addition och subtraktion

Huvudräkning, multiplikation och division

Skriftliga räknemetoder, addition och subtraktion

Skriftliga räknemetoder, multiplikation och division

Användning av miniräknare

Generella ståndpunkter

- Alla elever möter svårigheter och missuppfattningar uppstår när de lär sig matematik. En del elever gör det någon gång ibland, andra gör det ganska ofta.
- Fel som beror på dålig begreppsförståelse är inte slumpartad. Det är resultatet av att eleven försöker förstå situationer genom att använda logik som inte passar in i situationen.
- Elevers missuppfattningar grundar sig ofta i bristande erfarenheter eller olämplig undervisning.
- Det ska finnas utrymme för att memorera viktiga fakta, till exempel grundläggande multiplikationsfakta, men det är lämpligt när eleven helt förstår idéerna och sambanden till andra fakta och när eleven kan härleda fakta, om det är bortglömt. Lära utantill är inte en inledande aktivitet.

Förståelse är motiverande

Förståelse skapar förutsättningar för mer förståelse

Förståelse hjälper minnet

Förståelse förbättrar transfer

Förståelse påverkar attityder och föreställningar

Förståelse leder till självständiga elever

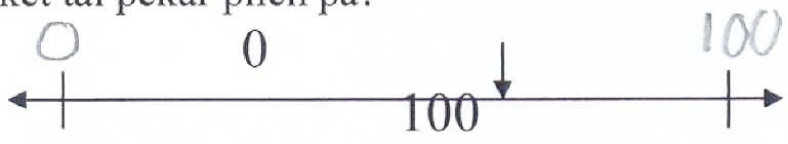
Lester & Lambdin, 2006. *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*

Översiktstest, taluppfattning, nivå 3, lärarex.

Instruktioner:

- Läs texten för klassen och den / de elever som behöver hjälp. Undvik att läsa tal eller att förklara.
- Betona ordet *ungefär*, i uppgift 11. Förklara att vi inte söker ett exakt tal.
- Läs räkneexemplen i uppgifterna 18 - 26, men skriv inga tal. Eleverna ska bara skriva svaren. Tillåt upp till 10 sek betänketid till var och en av de uppgifterna.

U #	Uppgifter	Kod
3.1	Skriv de tre följande talen: 26, 27, 28, <u>29</u> , <u>30</u> , <u>31</u>	2
3.2	Skriv de tre följande talen: 54, 53, 52 , <u>51</u> , <u>50</u> , <u>49</u>	2
3.3	Skriv de tre följande talen: 96, 97, 98, <u>99</u> , <u>100</u> , <u>101</u>	2
3.4	Skriv de tre följande talen: 3, 5, 7, <u>9</u> , <u>11</u> , <u>13</u>	2
3.5	Skriv de tre följande talen: 52, 54, 56 , <u>58</u> , <u>60</u> , <u>62</u>	2
3.6	Skriv de tre följande talen: 5, 10, 15, <u>20</u> , <u>25</u> , <u>30</u>	2

3.8	Använd siffrorna 4, 7, 3, 9 för att göra två tal mellan femtio och etthundra. Du får bara använda varje siffra en gång. <i>Antingen 74 och 93 eller 73 och 94</i>	3
3.9	Vilket tal kommer närmast före sexhundra när man räknar? _____ <i>599</i> _____	3
3.10	Oscar föds idag. Vilket år fyller han hundra år? _____ <i>2105</i> _____	3
3.11	Ungefär vilket tal pekar pilen på?  <i>vilket tal som helst mellan 60 och 80</i>	8
3.12	Stig hade femton kronor med sig när han gick till affären. När han kom hem hade han två kronor. Gör en ring om den uppgift som visar hur mycket pengar han använt. 2 + 15 B. 2 - 15 C. 15 + 2 <u>D. 15 - 2</u>	9

3.23	$120 - 50$ $\underline{\hspace{2cm}}70\underline{\hspace{2cm}}$	16
3.24	$3 + 8 + 7$ $\underline{\hspace{2cm}}18\underline{\hspace{2cm}}$	18
3.25	$13 + 18$ $\underline{\hspace{2cm}}31\underline{\hspace{2cm}}$	18
3.26	Dubbelt så mycket som 15 $\underline{\hspace{2cm}}30\underline{\hspace{2cm}}$	19
3.27	Använd papper och penna för att lösa dessa uppgifter. Skriv i rutan. Ex: $32 + 26$ $100 - 63$	20

Sammanställning översiktstest Taluppfattning nivå 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Karin	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/	/	/	/	0		0	/	/
Ebba	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/	/	0
Viktor	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/		/	/
Gustav	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/	0	/	/
Lina	/	/	/	/	/	/	/	0	/	0	/	/	/	/	/	/	/	/	/
Nadja	/	/	/	/	/	/	/	0	/	/	/	/		/		0	/	/	/
Senad	/	/	/	0	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	0	/		/	/
Amanda	/	/	/	/	/	/	/	0	/	/	/	/	0	/		/	/	/	/
Antal korrekta svar	16	16	16	14	14	15	16	11	15	11	16	12	13	16	5	10	12	16	15
l %	100	100	100	88	88	94	100	69	94	69	100	75	81	100	31	62	75	100	94
Huvudsektion	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	8	9	9	9	10	10	10	14	14
Rel . Undersektioner	2.4															3.1 10.2			14.1 14.2

Kommentarer

- Uppg. 15 Att formulera ett rimligt räkneexempel som passar till en given bild, tyder på god förståelse av funktionen. Elever som är ovana vid denna aktivitet kan uppfatta den som svår. Ett additionsexempel ($5+5+5+5=20$) visar inte att eleven förstår sambandet mellan mönstret i bilden och multiplikation.
- Uppg. 16 Ser eleven bilden som fyra grupper, inte bara som 12 enskilda stenar? Förmågan att se en samling av objekt som ett objekt och som kan räknas som ett, kan ses som en kritisk punkt för såväl multiplikation som positionsvärde.
- Uppgift 17 Uppfattar eleven sambandet mellan en räknehändelse och den formella skriftliga formen? Denna uppgift skiljer avsiktligt mellan förmåga att känna igen operationen från förmågan att göra beräkningen.

Översiktstesten leder till frågor

- Varför gör eleven särskilda misstag?
- Vilka bakomliggande faktorer finns i form av missuppfattningar eller bristande kunskaper?
- Vilken typ av åtgärder behöver eleven?
- Vad leder detta till för min undervisning?



Intervjuunderlag – råd och riktlinjer

En intervju är inte ett undervisningstillfälle -
elevens tänkande är i centrum.

Eleven står för "pratandet" under intervjun.

Eleven får ett par uppgifter som hon tidigare har
besvarat korrekt.

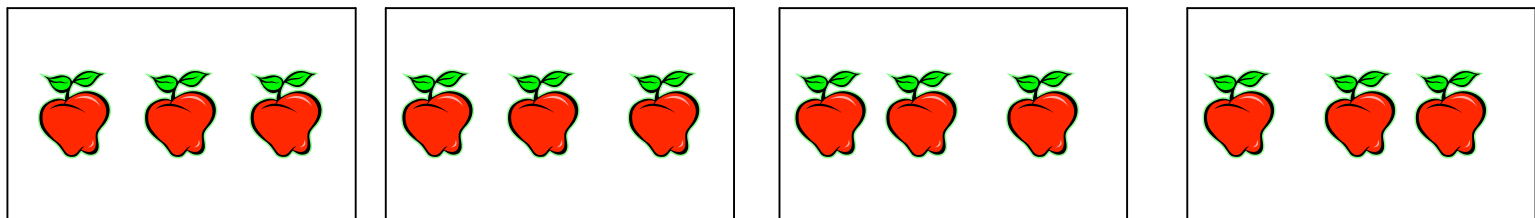
Läraren håller sig neutral och ger varken positiv eller
negativ respons.

Svårigheter och missuppfattningar

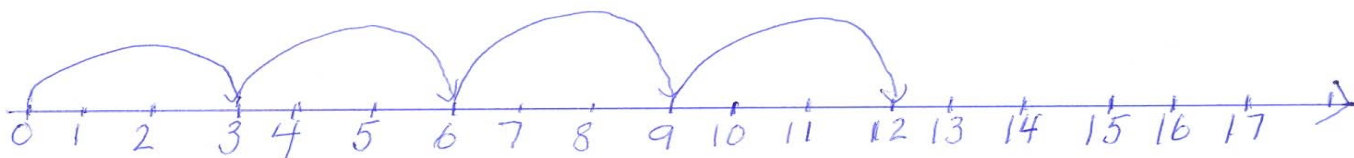
- eleven uppfattar inte en grupp av objekt som en enhet (*jfr ett tiotal, ett hundratal etc.*)
- känner inte till vad multiplikationstecknet betyder
- eleven uppfattar inte att multiplikation representerar situationer där lika stora mängder adderas successivt
- eleven har en begränsad uppfattning av multiplikation, enbart som upprepad addition
- multiplikation leder alltid till något större och division till något mindre

Bakgrund

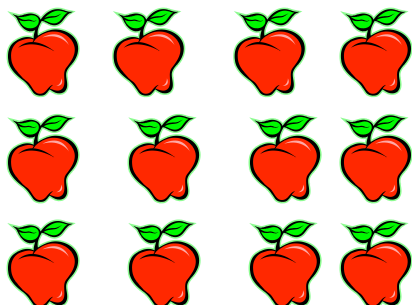
Multiplikation presenteras ofta inledningsvis som upprepad addition.
"fyra korgar med tre äpplen i varje korg"



Bilden kan också representeras på en tallinje



Två tal som multipliceras representerar två oberoende dimensioner



Föreställningar om multiplikationens tvådimensionella karaktär kan fördjupas och utvidgas till förståelse för:

- multiplikation med tal i bråkform och decimalform
- den kommutativa, associativa och distributiva lagen för multiplikation
- multiplikationens relation till areabegreppet
- huvudräkning och algoritmräkning



Allmänna råd

Betona den rektangulära rutnätsstrukturen som en representation för multiplikation så ofta som möjligt och synliggör sådana mönster i omgivningen.

Låt eleverna använda och röra sig mellan olika representationer för multiplikation: *berättelser, bilder, diagram, talat språk och skrivet språk.*

Introducera division med hjälp av laborativa aktiviteter.

Arbeta muntligt och fokusera på språket kopplat till division.

Se till att båda aspekterna av division representeras i olika aktiviteter.

Specifika råd

- Uppmärksamma hur mönster i tak, på fönster och skåp osv. är ordnade i rader och kolumner. Hur många rader?
Hur många kolumner?
- Rita en bild av $5 \cdot 3$.
- Hitta på en berättelse till $7 \cdot 6$.
- *Här är fyra pappersremсор. Var och en är 6 cm långa.*
Skriv detta som en multiplikation.
Skriv det som en division.
Hitta på en berättelse kopplat till multiplikation.
Hitta på en berättelse kopplat till division.
- *Jag delade ut 12 bullar till tre kompisar.*
Rita en bild. Skriv en matteuppgift.

föremål

symboler

ord

bild

föremål

bild

symboler

ord

samband

Gruppaktivitet

Ge varje grupp en Tanketavla och konkret material.

Skriv på en pappersremsa vad eleverna ska arbeta med tex en räknehändelse, talet fem, en addition, en division, talet 7,6, en ekvation, en bråkuppgift, etc.

Gruppens uppgift är att göra relevanta tolkningar av uppgiften i vart och ett av de fyra fälten på Tanketavlan.

1. Representera uppgiften med hjälp av laborativt material och rita av.
2. Skriv med symboluttryck.
3. Skriv en berättelse till symboluttrycket.
4. Visa samband med något annat matematiskt begrepp, räknesätt etc. (*alt. Rita en bild till din berättelse*).

Se A. McIntosh (2006). I Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv.

Tanketavlan – användningsområden

- Vid introduktion av ett begrepp
- För att låta eleven arbeta med ett begrepp i olika representationer
- För att följa upp undervisningens effekter
- För att lyfta fram och synliggöra samband, tex mellan multiplikation och division, tal i bråkform och tal i decimalform osv.

Exempel på hur handboken kan användas

- Upptäcka och analysera hur elever tänker, vilka svårigheter och missuppfattningar som kan finnas.
- Få hjälp att planera innehållet inom ett eller flera områden.
- Kontrollera hur väl en lärobok täcker det aktuella området.
- Hitta goda exempel på aktiviteter och uppgifter inom olika områden av taluppfattning.

- Få hjälp med hur du kan undvika att skapa missuppfattningar genom undervisningen.
- Analysera elevers utveckling och effektiviteten i undervisningen.
- Använda handboken som bas för kontinuerlig reflektion över undervisningen och få fördjupad kunskap om olika vägar till undervisning och lärande i matematik.

Exempel på en modell för intervju

Läs uppgiften för mig är du snäll (*läsning*).

Berätta uppgiften med egna ord (*förståelse*).

Berätta hur du kan göra för att lösa uppgiften (*transformation*).

Visa hur du kom fram till svaret på uppgiften. Försök att förklara för mig under tiden (*metod*).

Skriv nu ned din lösning (*formalisera*).