

PÅ JAKT EFTER FÖRMÅGOR

Matematikutvecklingskonferensen, april 2011

Ola Helenius

ola.helenius@ncm.gu.se

Varför förmågor?

Hur kan förmågorna komma till uttryck?

Kursplanen och dess olika delar

VARFÖR FÖRMÅGOR?

$$18+5=23$$

$$51-49=18$$

$$a^2 \cdot a^3 = a^5$$

1. Hedda: två rutiner (räkneramsan + uppräknning på fingrarna) + problemlösningsförmåga

2. TIMMS: avsaknad av matematiskt förhållningssätt

- Otto vad är 51 minus 49?
- ÖÖÖh, 2 - vad då?
- Vänta lite, det gick fort! Hur gjorde du?
- Va? Ööööh tänkte, vad då 2!...det är väl 2?
- Ja, ja...jag bara undra...Lillit vad är 32 - 29?
- 3
- Oj vad fort! Hur gjorde du då?
- Ja Ottos blev ju 2 och då blir väl min 3, eller hur?

3. Kan vara rutin, men också begrepp+problemlösning.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

Att erövra kunskaper i djupare mening är att lära sig se, att erfara världen på sätt som annars inte vore möjliga och på så sätt vidga sitt medvetande. Olika ämnen bidrar på olika sätt till detta genom de särskilda kunskapskvaliteter de omfattar. Man läser inte ämnen i första hand för att lära sig särskilda fakta och begrepp utan för att lära sig uppfatta saker och använda begrepp på särskilda sätt. Genom de olika ämnena erövrar man de särskilda sätt att erfara och förhålla sig till världen som utvecklats inom de kunskapstraditioner som enskilda ämnen eller ämnesgrupper representerar.

(Ur Grundskola för bildning,
1996)

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

Kursplaneperspektiv

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

Kursplaneperspektiv

Vilka följder får en traditionell beskrivning?

- Svårt att klargöra vad matematikundervisning går ut på (utan cirkelresonemang)
- Reduktion av kunskande i matematik
- Svårt att jämföra matematikundervisning
- Svårt att karakterisera nivåskillnader – högre nivå = mer stoff

Vi söker ett överordnat medel för kursplanbeskrivningar som fastlägger och karakteriserar, utan cirkelresonemang, vad det vill säga att man behärskar (dvs veta, förstå, utföra och använda) *matematik*, både inom matematiken och i olika sammanhang, utan referens till ett bestämt matematiskt stoff (KOM-rapporten)

Medlet: Matematisk kompetens...

(KOM - Kompetencer og Matematiklæring, Niss & Højgaard-Jensen, 2002)

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

Kursplaneperspektiv

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

Kursplaneperspektiv

Didaktiskt perspektiv

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.

VARFÖR FÖRMÅGOR?

Kunskapsperspektiv

Kursplaneperspektiv

Didaktiskt perspektiv

In this chapter, we describe the kinds of cognitive changes that we want to promote in children so that they can be **successful in learning mathematics**. Recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen **mathematical proficiency** to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully. Mathematical proficiency, as we see it, has five components, or **strands...**

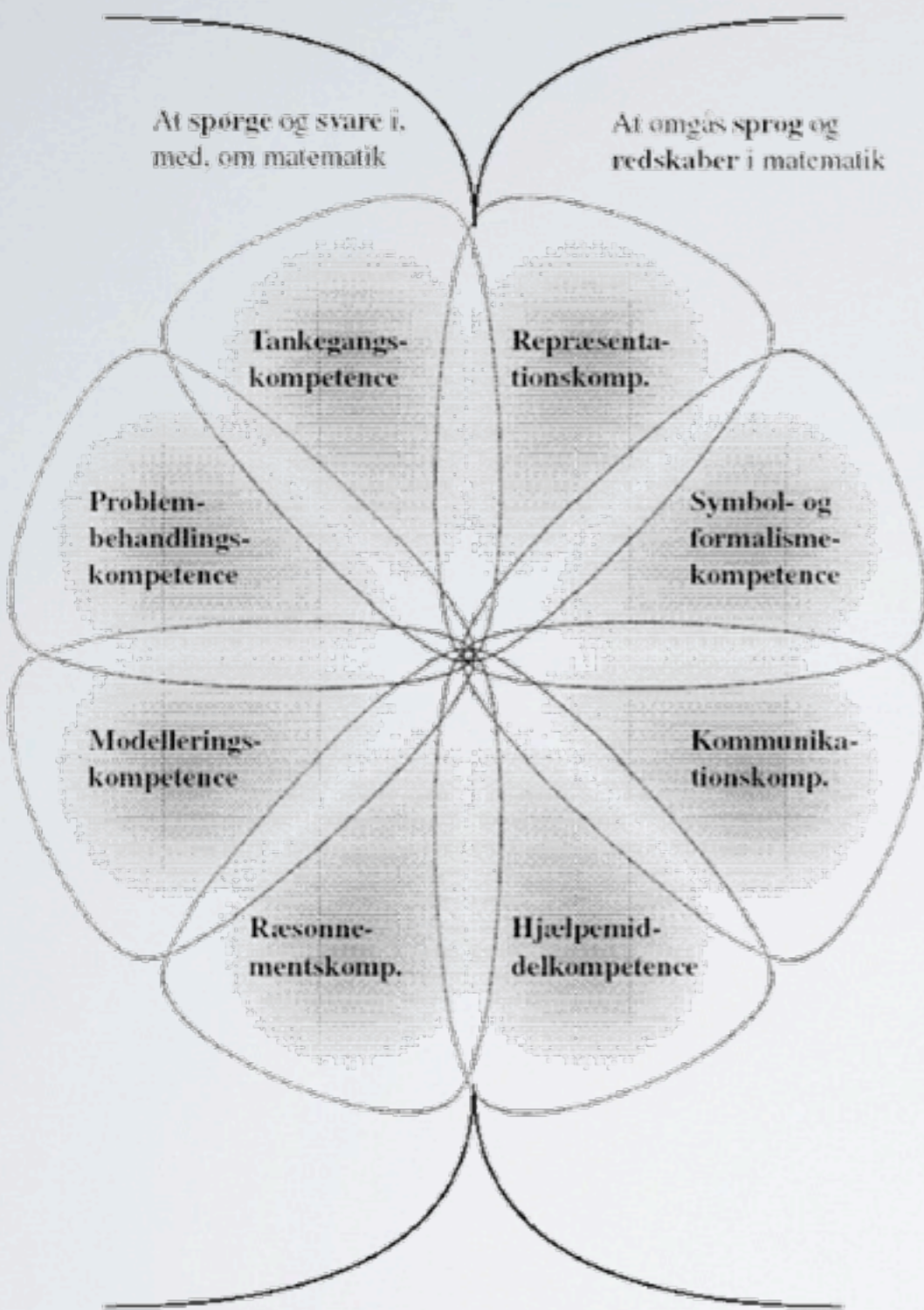
(proficiency = färdighet, kunnighet, skicklighet)

(Adding it up, Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001)

3 olika perspektiv (minst) som har lett fram till kompetenser/förmågor.

Även: TIMSS, NCTM Standards.

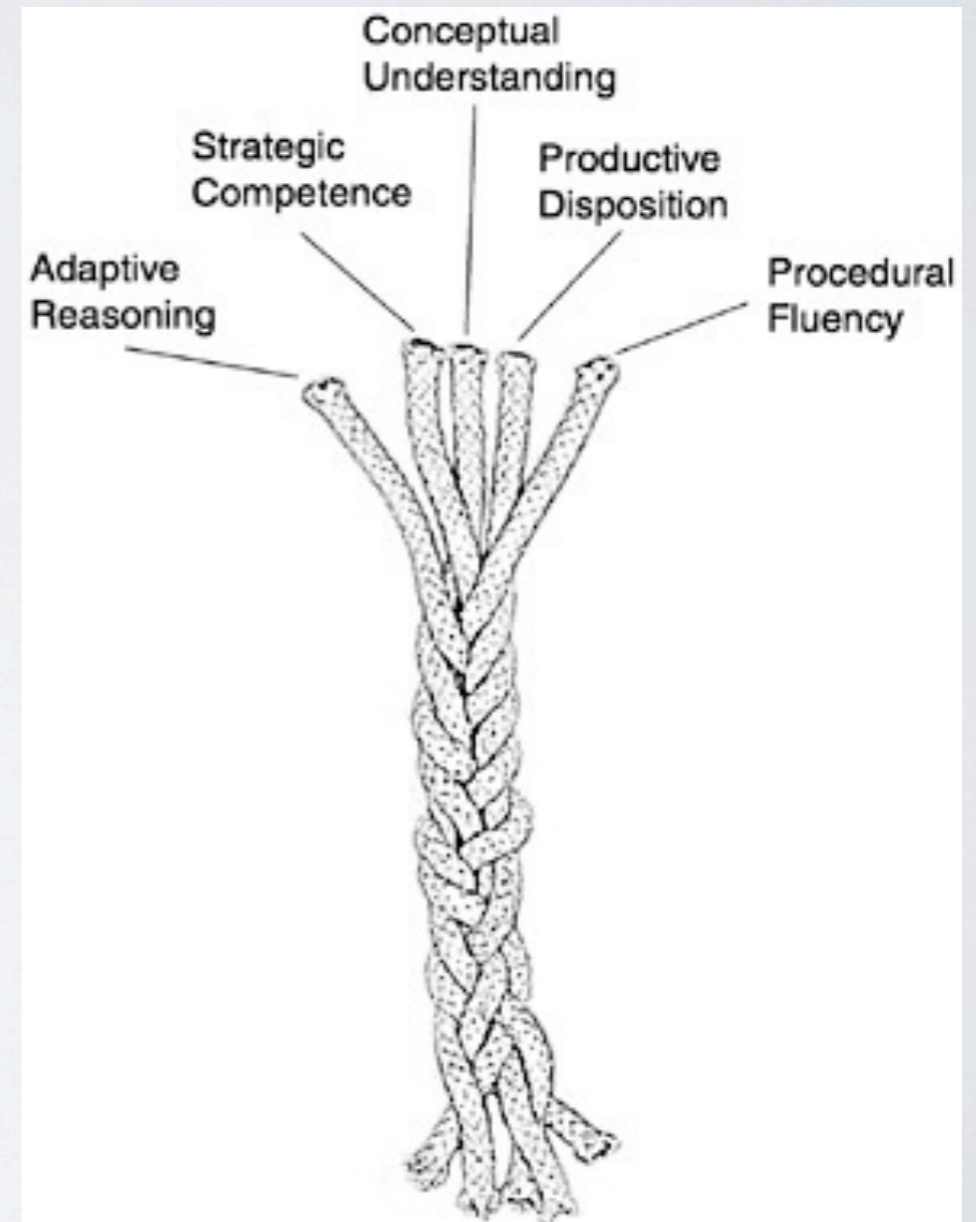
Notera Adding it up som har ett starkt "påverkansperspektiv": De olika förmågorna är sådant vi vet är svårt att få eleverna att lära sig, därför vill de lyfta fram dessa (en viktig poäng som antyder varför det inte är så lätt att "implementera" dessa förmågor som undervisningsmål.



Kompetencer og Matematiklæring,
Niss & Højgaard-Jensen, 2002



Focus on High School Mathematics, Reasoning and Sense making, NCTM 2009



Adding it up, Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001

Olika ramverk, och delvis olika motiv, men på det stora hela är det samma budskap. Förmåga att utöva matematik – uppdelat på lite olika sätt.

Matematisk kompetens i allmänhet

..//..matematisk kompetens består av att ha kunskap om, att förstå, utöva, använda och kunna ta ställning till matematik och matematisk verksamhet i en mångfald av sammanhang, där matematik ingår eller kan komma att ingå. Detta implicerar naturligtvis en mångfald av konkreta kunskaper och färdigheter inom olika matematikområden, men matematisk kompetens kan inte, ..//..., reduceras till dessa förutsättningar.

*Definition av **en** matematisk kompetens*

Det är en självständig, rimligt avgränsad huvudkomponent i matematisk kompetens som beskrivits ovan. Man kan också säga, att en matematisk kompetens är en insiktsfull beredskap att handla ändamålsenligt i situationer, som rymmer ett bestämt slags matematiska krav/utmaningar. Att sådana kompetenser är självständiga och rimligt avgränsade betyder inte att olika kompetenser är utan förbindelse med varandra eller är skarpt avgränsade utan överlapp.

Att arbeta matematisk

Matematiken: en autopoietisk verksamhet: skapar det innehåll den handlar om. I princip kan man tänka sig att arbeta "omatematiskt" med matematiska objekt, och jag skulle säga att "51-49=18" på det stora hela inte kan uppkomma om man förhåller sig matematisk till frågan.

KOMs kompetenser kan se som olika delaspekter av vad det innebär att arbeta matematiskt. Arbetar man matematisk så kommer man beröra/behöva alla kompetenserna och omvänt om man använder sig av alla kompetenser för att hantera olika former av matematiska situationer så kommer man att arbeta matematiskt.

KURSPLANEN (LGR 11)

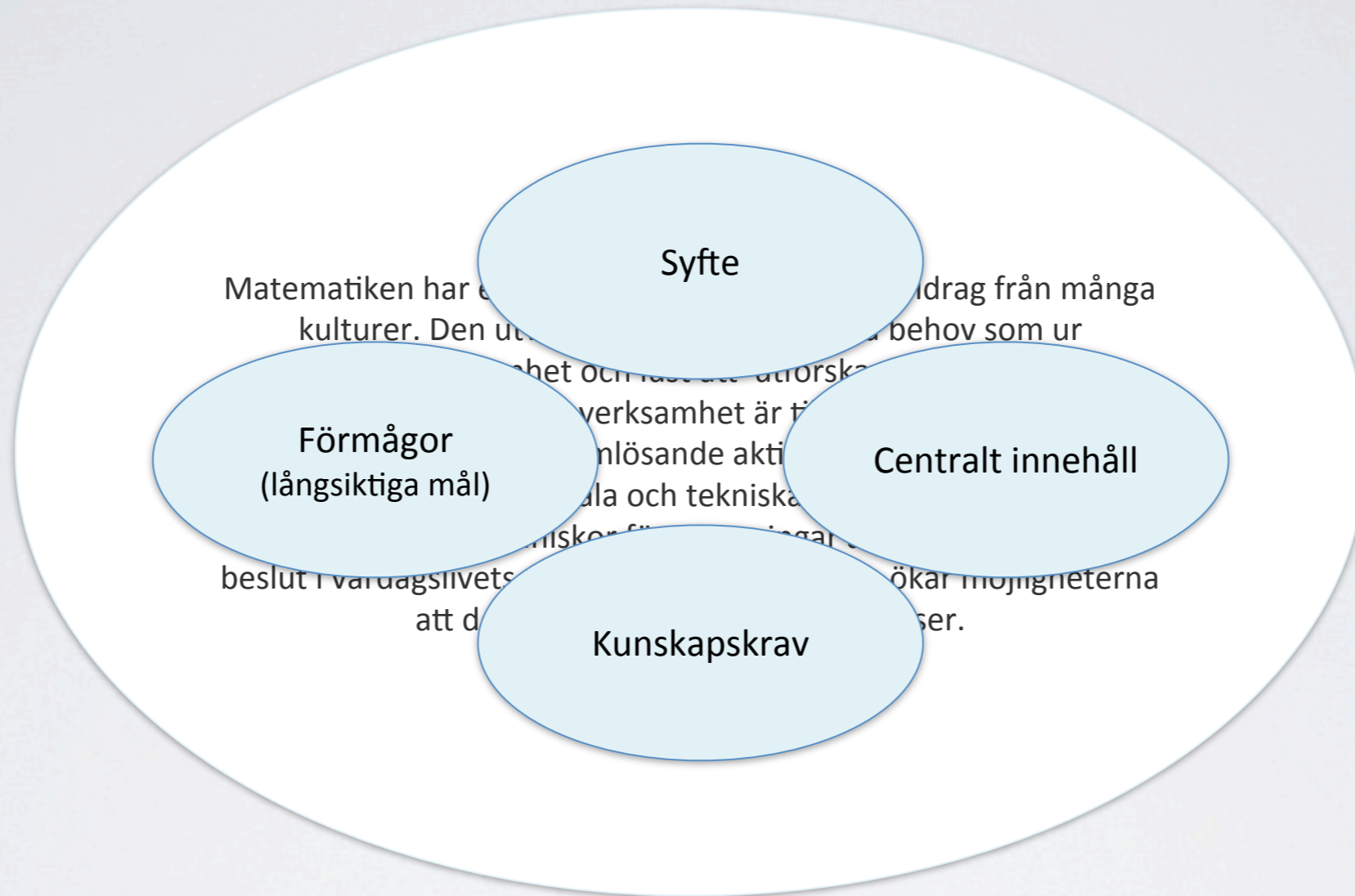
Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att **utveckla sin förmåga att**

- formulera och lösa **problem** med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- att använda och analysera matematiska **begrepp** och samband mellan begrepp,
- välja och använda lämpliga matematiska **metoder** för att göra beräkningar och lösa **rutinuppgifter**
- föra och följa matematiska **resonemang**
- använda matematikens **uttrycksformer** för att **samtala** om, **argumentera** och **redogöra** för frågeställningar, beräkningar och slutsatser

LGR 11

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen. Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser.

LGR 11



KURSPLANEN (LGR 11)

Problem

Begrepp

Procedur

Resonemang

Kommunikation

Kompetensmålsreformsförvåningsparadoxen.

KURSPLANEN (LGR I I)

Problem

Begrepp

Procedur

Resonemang

Kommunikation

KURSPLANEN (LGR I I)

Begrepp

BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda

BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda



BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda



BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda



$$A = \pi r^2$$

$$O = 2\pi r$$

BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda

gettyimages®

"den är rund"

"alla punkter på ett visst
avstånd från en given punkt"

$$(r \cos(t), r \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z = r e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

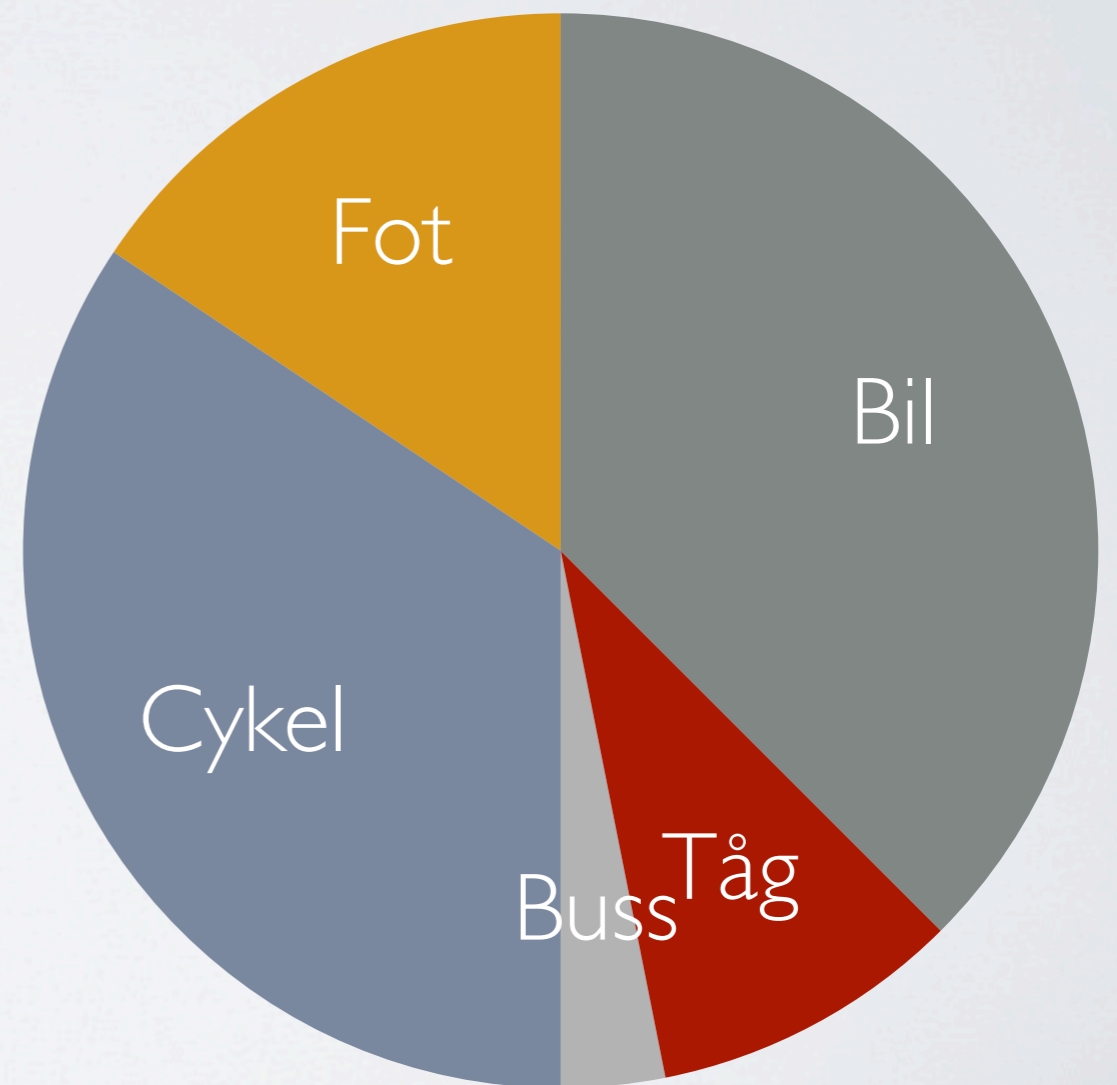
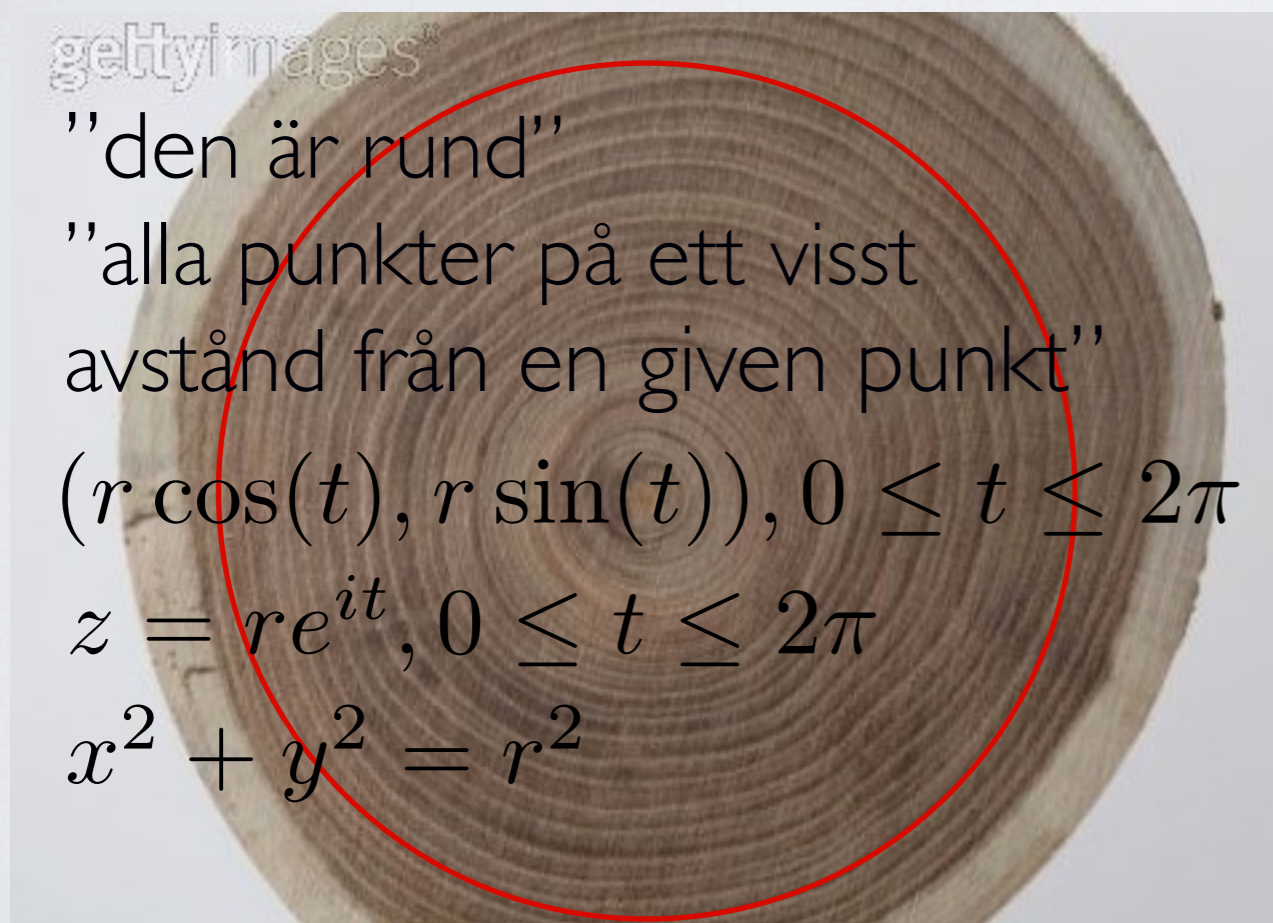
$$A = \pi r^2$$

$$O = 2\pi r$$

BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda



$$A = \pi r^2$$

$$O = 2\pi r$$

BEGREPP

Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda

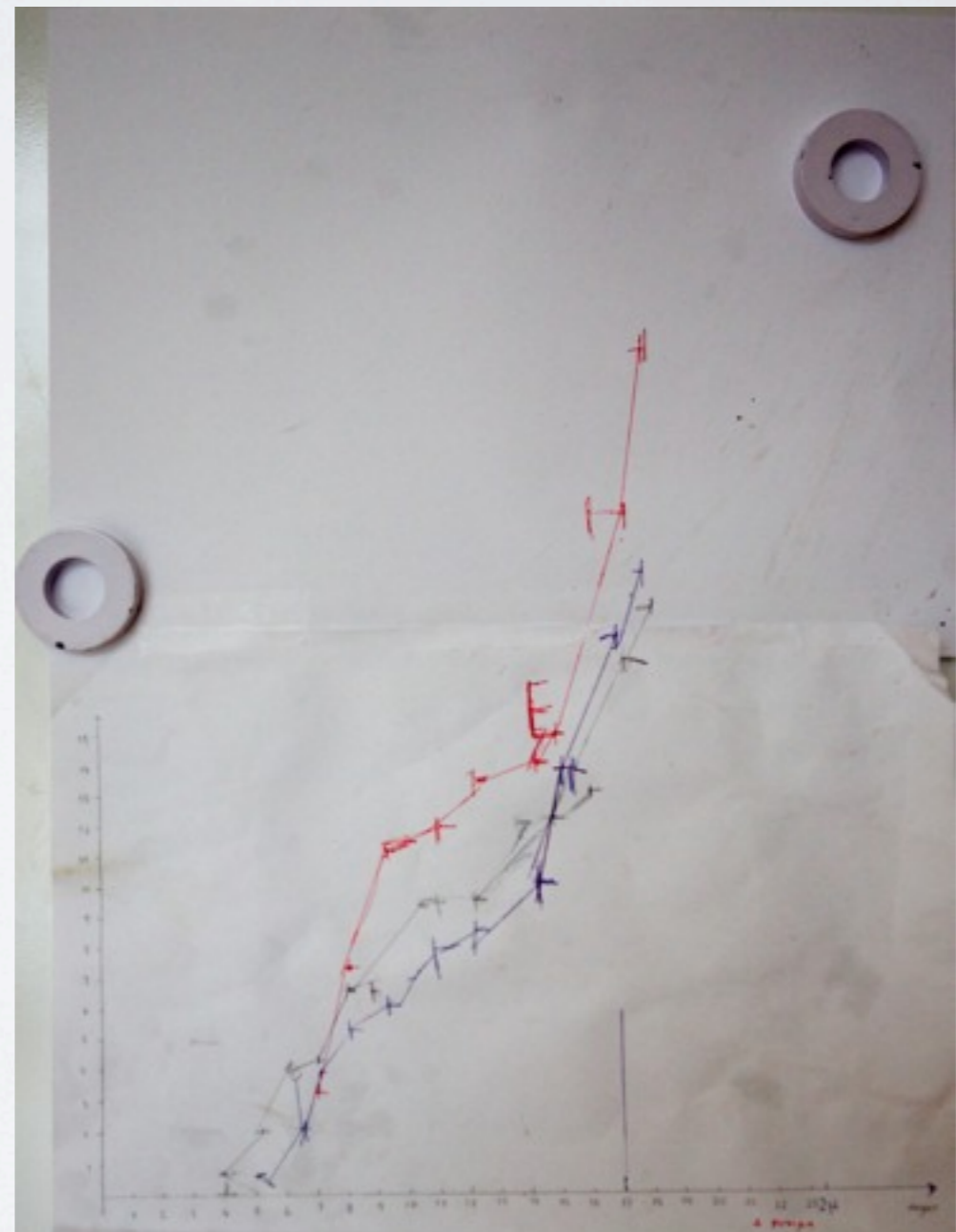


Gisela och Hedda har planterat fröer - solros, pumpa, majs. Hedda mäter växterna varje dag och ritar av på ett papper hur höga de är. Små barn kan mäta med papperet direkt mot växten och bara rita av växtens höjd, men Hedda ville mäta med linjal. Hon mäter alltså de tre växterna och letar sedan upp rätt dag och ritar in samma mätvärde på papperet.

BEGREPP

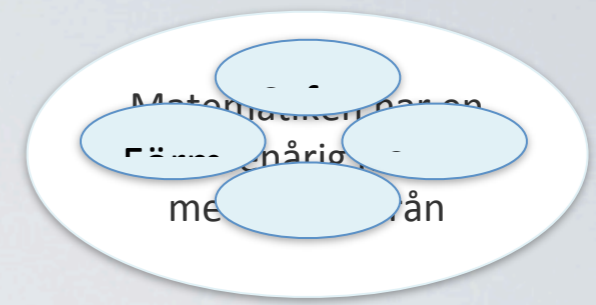
Utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Förskolan: urskilja - uttrycka - undersöka - använda

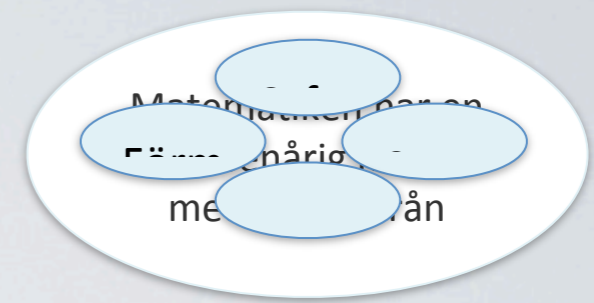


Gisela och Hedda har planterat fröer - solros, pumpa, majs. Hedda mäter växterna varje dag och ritar av på ett papper hur höga de är. Små barn kan mäta med papperet direkt mot växten och bara rita av växtens höjd, men Hedda ville mäta med linjal. Hon mäter alltså de tre växterna och letar sedan upp rätt dag och ritar in samma mätvärde på papperet.

LGR 11 – BEGREPP



LGR 11 – BEGREPP

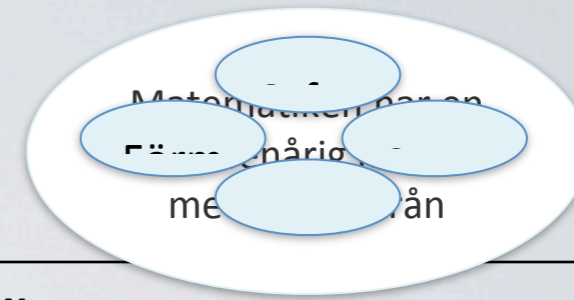


Syfte

Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska **begrepp** och metoder och deras användbarhet.

Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga **begrepp** och metoder i matematiken har utvecklats.

LGR 11 – BEGREPP



Syfte

Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska **begrepp** och metoder och deras användbarhet.

Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga **begrepp** och metoder i matematiken har utvecklats.

Centralt innehåll, Åk 1 – 3, text

Taluppfattning och tals användning (Åk 1 - 3)

- **Naturliga tal** och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning.
- Naturliga tal och **enkla tal i bråkform** och deras användning i vardagliga situationer.
- De **fyra räknesättens** egenskaper och samband samt användning i olika situationer.

Algebra

- **Matematiska likheter** och likhetstecknets betydelse.
- Hur enkla mönster i **talföljder** och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.

Geometri

- Grundläggande **geometriska objekt**, däribland punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock samt deras inbördes relationer. **Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt.**
- Konstruktion av geometriska objekt. **Skala** vid enkel förstoring och förminskning.
- **Symmetri**, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras.
- Jämförelser och uppskattningar av matematiska **storheter**. **Mätning** av längd, massa, volym och tid med vanliga nutida och äldre måttenheter.

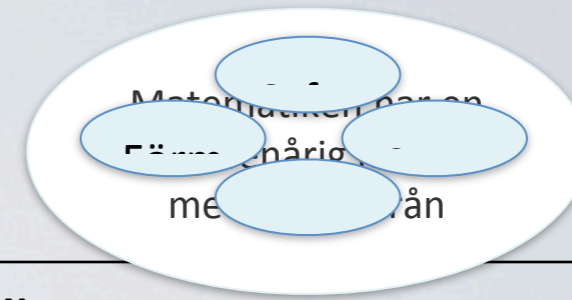
Sannolikhet och statistik

- **Slumpmässiga händelser** i experiment och spel.

Samband och förändringar

- Olika **proportionella** samband, däribland dubbelt och hälften.

LGR 11 – BEGREPP



Syfte

Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska **begrepp** och metoder och deras användbarhet.

Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga **begrepp** och metoder i matematiken har utvecklats.

Kunskapskraven åk 3

Eleven har grundläggande kunskaper om matematiska **begrepp** och visar det genom att använda dem i vanligt förekommande sammanhang på ett i huvudsak fungerande sätt. Eleven kan beskriva **begreppens** egenskaper med hjälp av symboler och konkret material eller bilder. Eleven kan även ge exempel på hur några **begrepp** relaterar till varandra...//... Dessutom kan eleven använda grundläggande geometriska **begrepp** och vanliga lägesord för att beskriva geometriska objekts egenskaper, läge och inbördes relationer.

Centralt innehåll, Åk 1 – 3, text

Taluppfattning och tals användning (Åk 1 - 3)

- **Naturliga tal** och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning.
- Naturliga tal och **enkla tal i bråkform** och deras användning i vardagliga situationer.
- De **fyra räknesättens** egenskaper och samband samt användning i olika situationer.

Algebra

- **Matematiska likheter** och likhetstecknets betydelse.
- Hur enkla mönster i **talföljder** och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.

Geometri

- Grundläggande **geometriska objekt**, däribland punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock samt deras inbördes relationer. **Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt.**
- Konstruktion av geometriska objekt. **Skala** vid enkel förstoring och förminskning.
- **Symmetri**, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras.
- Jämförelser och uppskattningar av matematiska **storheter**. **Mätning** av längd, massa, volym och tid med vanliga nutida och äldre måttenheter.

Sannolikhet och statistik

- **Slumpmässiga händelser** i experiment och spel.

Samband och förändringar

- Olika **proportionella** samband, däribland dubbelt och hälften.

KURSPLANEN (LGR I I)

Problem

Begrepp

Procedur

Resonemang

Kommunikation

KURSPLANEN (LGR I I)

Procedur

Procedur i Adding it up

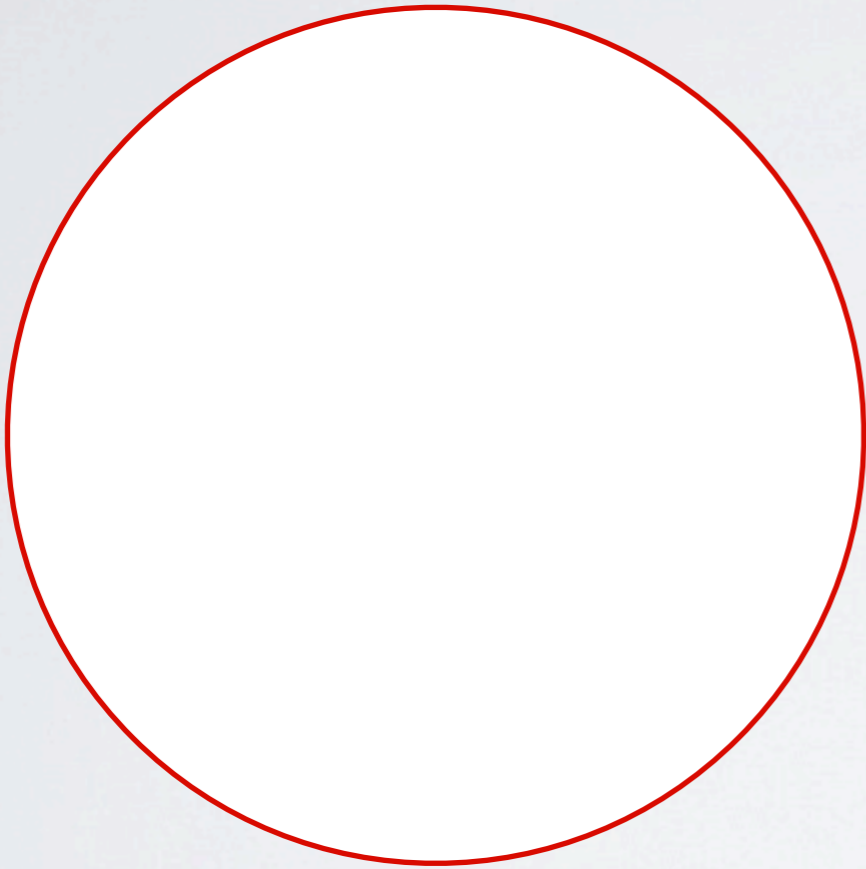
Procedur i KOM

PROCEDUR

Utveckla förmågan att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter

PROCEDUR

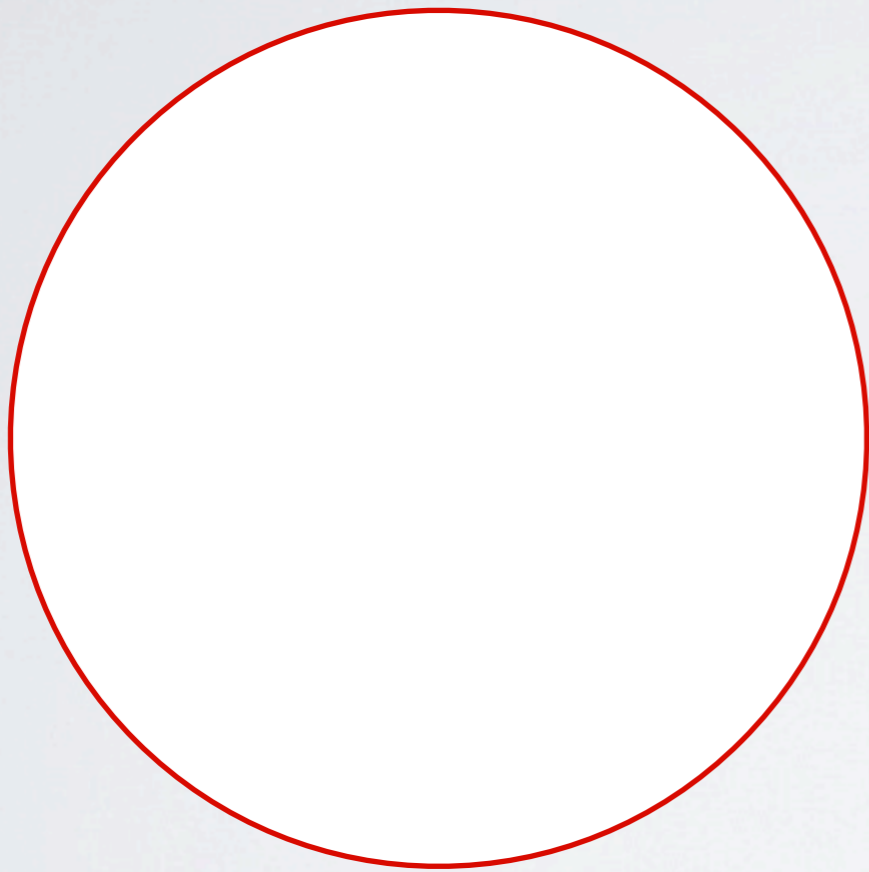
Utveckla förmågan att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter



Beräkna arean

PROCEDUR

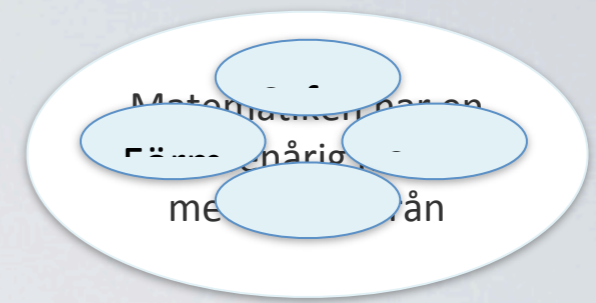
Utveckla förmågan att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter



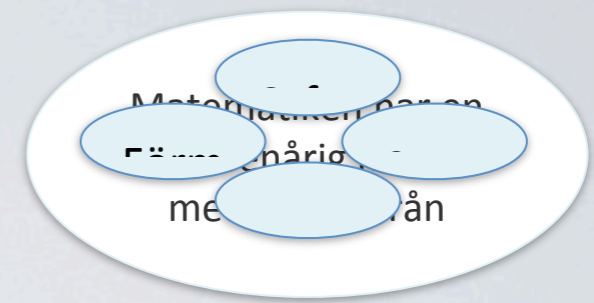
Beräkna arean



LGR II – PROCEDUR



LGR 11 – PROCEDUR



Syfte

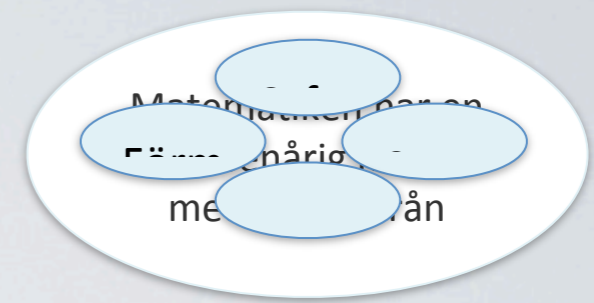
...utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, **metoder**, modeller och resultat.

...utveckla förtrogenhet med grundläggande ..//..**metoder** och deras användbarhet

...utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna ..//...göra **beräkningar**.....

...utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och **metoder** i matematiken har utvecklats

LGR 11 – PROCEDUR



Syfte

...utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, **metoder**, modeller och resultat.

...utveckla förtrogenhet med grundläggande **metoder** och deras användbarhet

...utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna **beräkningar**....

...utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och **metoder** i matematiken har utvecklats

Centralt innehåll Åk 4 – 6, tex

Taluppfattning och tals användning

- Centrala **metoder för beräkningar** med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. **Metodernas användning** i olika situationer.
- **Rimlighetsbedömning** vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.

Algebra

- **Metoder** för enkel ekvationslösning.

Geometri

- **Konstruktion** av geometriska objekt
- **Metoder** för hur omkrets och area hos olika tvådimensionella geometriska figurer kan bestämmas och uppskattas.
- Jämförelse, uppskattning och **mätning** av längd, area, volym, massa, tid och vinkel med vanliga måttenheter. Mätningar med användning av nutida och äldre metoder.

Sannolikhet och statistik

Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar.

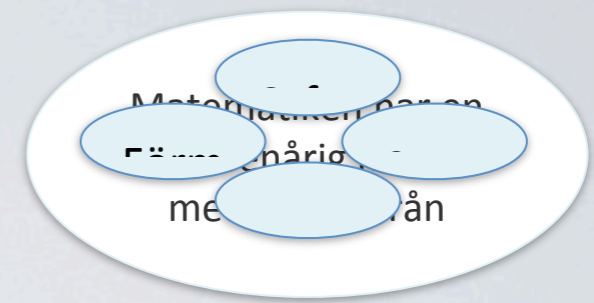
Lägesmått

medelvärde, typvärde och median

Samband och förändring

Koordinatsystem och strategier för gradering av koordinataxlar.

LGR 11 – PROCEDUR



Syfte

...utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, **metoder**, modeller och resultat.

...utveckla förtrogenhet med grundläggande **metoder** och deras användbarhet

...utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna **göra beräkningar**....

...utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och **metoder** i matematiken har utvecklats

Kunskapskraven åk 6, E

Eleven kan välja och använda i huvudsak fungerande matematiska **metoder** med viss anpassning till sammanhanget för att göra **enkla beräkningar och**

lösa enkla rutinuppgifter inom aritmetik, algebra, geometri, sannolikhet, statistik samt samband och förändring med tillfredställande resultat.

Centralt innehåll Åk 4 – 6, tex

Taluppfattning och tals användning

- Centrala **metoder för beräkningar** med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. **Metodernas användning** i olika situationer.
- **Rimlighetsbedömning** vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.

Algebra

- **Metoder** för enkel ekvationslösning.

Geometri

- **Konstruktion** av geometriska objekt
- **Metoder** för hur omkrets och area hos olika tvådimensionella geometriska figurer kan bestämmas och uppskattas.
- Jämförelse, uppskattning och **mätning** av längd, area, volym, massa, tid och vinkel med vanliga måttenheter. Mätningar med användning av nutida och äldre metoder.

Sannolikhet och statistik

Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar.

Lägesmått

medelvärde, typvärde och median

Samband och förändring

Koordinatsystem och strategier för gradering av koordinataxlar.

KURSPLANEN (LGR I I)

Problem

Begrepp

Procedur

Resonemang

Kommunikation

KURSPLANEN (LGR I I)

Resonemang

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen
- Hur skriver man då tusen? undrar jag

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen
- Hur skriver man då tusen? undrar jag
- Med fyra nollor säger sjuåringen och ler.

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen
- Hur skriver man då tusen? undrar jag
- Med fyra nollor säger sjuåringen och ler.
- Men hur skriver man tio då? fortsätter jag.

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen
- Hur skriver man då tusen? undrar jag
- Med fyra nollor säger sjuåringen och ler.
- Men hur skriver man tio då? fortsätter jag.
- Ett-noll-noll, två nollor

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen
- Hur skriver man då tusen? undrar jag
- Med fyra nollor säger sjuåringen och ler.
- Men hur skriver man tio då? fortsätter jag.
- Ett-noll-noll, två nollor
- Men ett då?

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

- Mamma, varför har hundra två nollor? frågar sjuåringen.
- Tja, varför...vad händer om hundra har tre nollor då? frågar jag.
- Tja, då skriver man den med tre nollor, ett-noll-noll-noll säger sjuåringen
- Hur skriver man då tusen? undrar jag
- Med fyra nollor säger sjuåringen och ler.
- Men hur skriver man tio då? fortsätter jag.
- Ett-noll-noll, två nollor
- Men ett då?

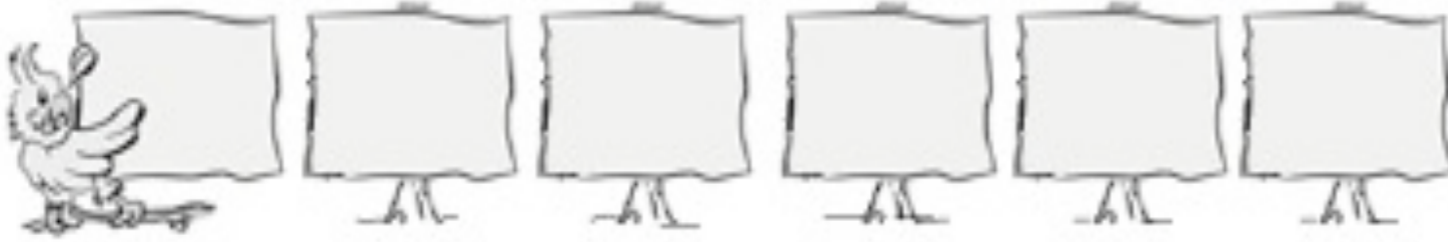
Hon spricker upp i ett brett leende, tanken på *ett* som 10 är bara för roligt...

Reasoning and Sense making (2009). In the most general terms, **reasoning** can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions. ..//.. mathematical reasoning can take many forms, ranging from informal explanation and justification to formal deduction, as well as inductive observations. Reasoning often begins with explorations, conjectures at various levels, false starts, and partial explanations before a result is reached.

RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

Gör en talföljd och förklara hur den är uppbyggd.



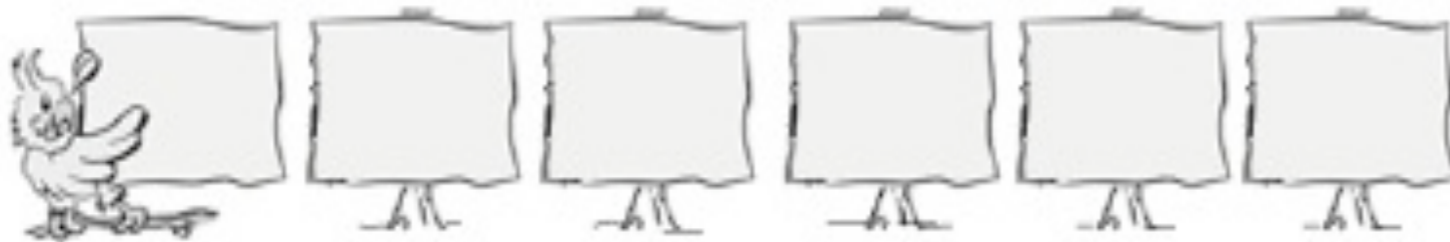
Min förklaring:

Också representationer.

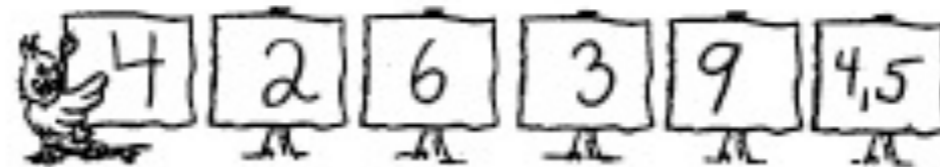
RESONEMANG

Utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang

Gör en talföljd och förklara hur den är uppbyggd.



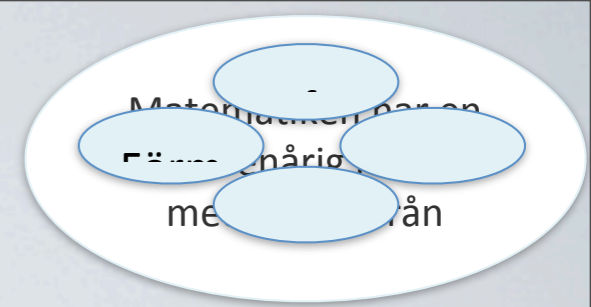
Min förklaring:



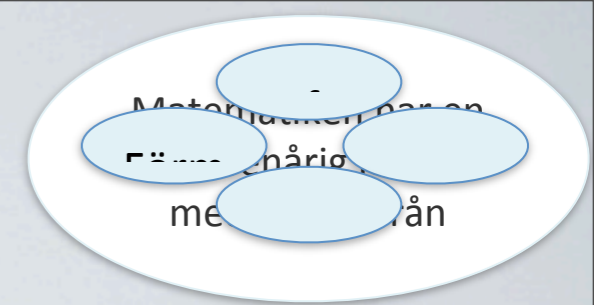
Först skriver man ett tal.
Sedan tar man hälften.
sen tar man det gånger tre,
och hälften av det. Efter
det tar man gånger tre och
hälften igen

Också representationer.

LGR II – RESONEMANG



LGR 11 – RESONEMANG



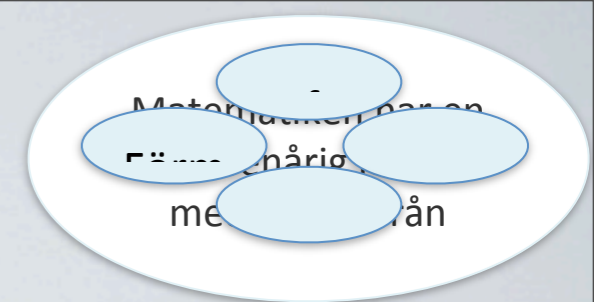
Matematik

Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och **lust att utforska** matematiken som sådan.

Syfte

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska **resonemang**.

LGR 11 – RESONEMANG



Matematik

Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och **lust att utforska** matematiken som sådan.

Syfte

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska **resonemang**.

Centralt innehåll, Åk 4 – 6 tex

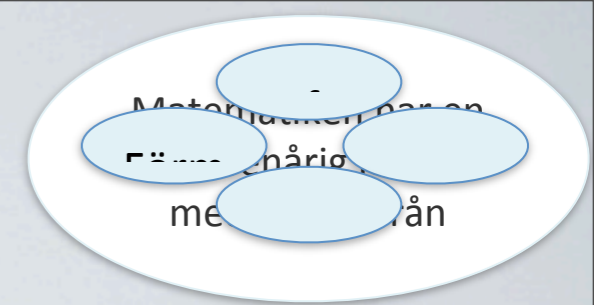
Algebra

- Obekanta tal och deras egenskaper samt **situationer där det finns behov** av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
- Enkla **algebraiska uttryck & ekvationer** i situationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för enkel **ekvationslösning**.
- Hur mönster i talföljder och geometriska **mönster** kan konstrueras, beskrivas, uttryckas.

Sannolikhet och statistik

- **Sannolikhet, chans och risk** grundat på observationer, experiment eller statistiskt material från vardagliga situationer. Jämförelser av sannolikheten vid olika slumpmässiga försök.
- Enkel **kombinatorik** i konkreta situationer.

LGR 11 – RESONEMANG



Matematik

Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och **lust att utforska** matematiken som sådan.

Syfte

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska **resonemang**.

Kunskapskraven åk 3

Eleven kan föra och följa matematiska **resonemang** om val av metoder och räknesätt samt om resultatets rimlighet, slumpmässiga händelser, geometriska mönster och mönster i talföljder genom att ställa och besvara frågor som i huvudsak hör till ämnet.

Centralt innehåll, Åk 4 – 6 tex

Algebra

- Obekanta tal och deras egenskaper samt **situationer där det finns behov** av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
- Enkla **algebraiska uttryck & ekvationer** i situationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för enkel **ekvationslösning**.
- Hur mönster i talföljder och geometriska **mönster** kan konstrueras, beskrivas, uttryckas.

Sannolikhet och statistik

- **Sannolikhet, chans och risk** grundat på observationer, experiment eller statistiskt material från vardagliga situationer. Jämförelser av sannolikheten vid olika slumpmässiga försök.
- Enkel **kombinatorik** i konkreta situationer.

KURSPLANEN (LGR I I)

Problem

Begrepp

Procedur

Resonemang

Kommunikation

KURSPLANEN (LGR I I)

Kommunikation

KOMMUNIKATION

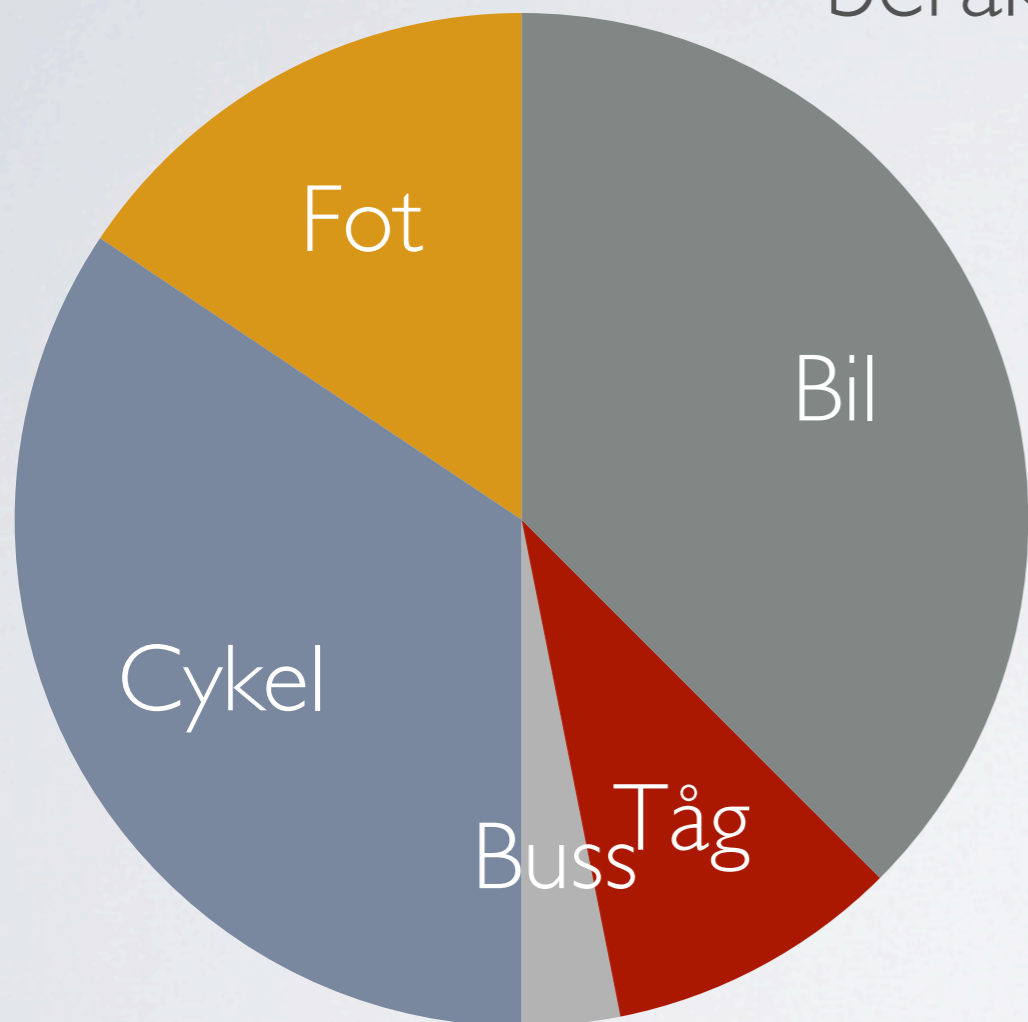
Utveckla förmågan att använda matematiken uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser

Vad? Vem? Hur? Varför? När?

Också dubbelriktat "in i matematiken" "ut ur matematiken", inom matematiken, utom matematiken?

KOMMUNIKATION

Utveckla förmågan att använda matematiken uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser



Vad? Vem? Hur? Varför? När?

Också dubbelriktat "in i matematiken" "ut ur matematiken", inom matematiken, utom matematiken?

KOMMUNIKATION

Utveckla förmågan att använda matematiken uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser

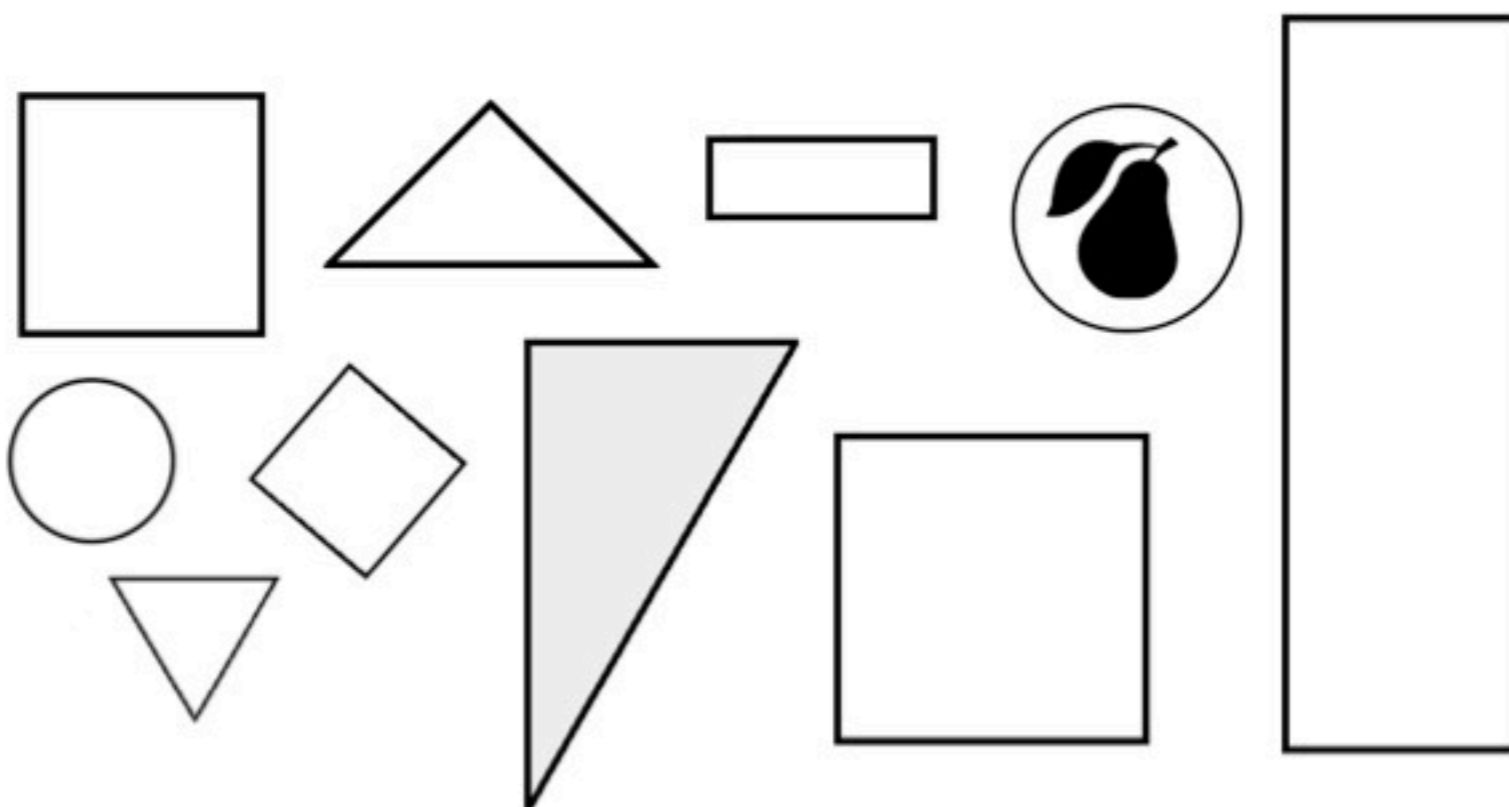
Vad? Vem? Hur? Varför? När?

Också dubbelriktat "in i matematiken" "ut ur matematiken", inom matematiken, utom matematiken?

KOMMUNIKATION

Utveckla förmågan att använda matematiken uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser

I skolrestaurangen finns många olika geometriska figurer. Här ser du några.

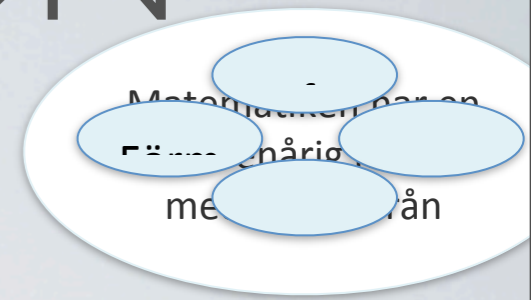


Titta på den grå figuren. Du ska beskriva den så noga att en kamrat skulle kunna rita en precis likadan figur, som är vänd på samma sätt och har samma storlek och form.

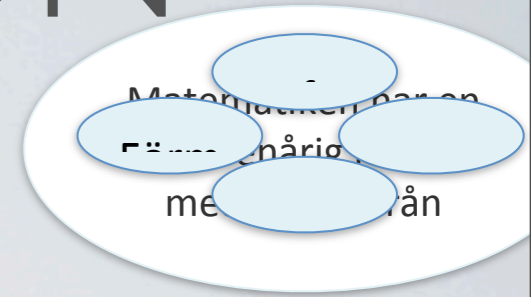
Vad? Vem? Hur? Varför? När?

Också dubbelriktat "in i matematiken" "ut ur matematiken", inom matematiken, utom matematiken?

LGR 11 – KOMMUNIKATION



LGR 11 – KOMMUNIKATION



Matematik

Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser.

Syfte

...att utveckla en förtrogenhet med matematikens **uttrycksformer** och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang.

LGR 11 – KOMMUNIKATION



Matematik

Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser.

Syfte

...att utveckla en förtrogenhet med matematikens **uttrycksformer** och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang.

Centralt innehåll Åk 7 – 9, tex

Taluppfattning och tals användning

- **Talsystemets utveckling** från naturliga tal till reella tal.
- Potensform för att **uttrycka** små och stora tal samt användning av prefix.

Algebra

- Innebörden av variabelbegreppet, dess användning i **algebraiska uttryck, formler, ekvationer**.
- Algebraiska uttryck, formler och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.

Geometri

- **Avbildning och konstruktion** av geometriska objekt.
- Geometriska satser och formler och **behovet av argumentation för deras giltighet**.

Sannolikhet och statistik

- **Tabeller, diagram och grafer** samt hur de kan **tolkas** och användas för att beskriva resultat av egna och andras undersökningar, till exempel med hjälp av digitala verktyg.
- Hur lägesmått och spridningsmått kan **användas för bedömning** av resultat vid statistiska undersökningar.
- **Bedömningar** av risker och chanser utifrån statistiskt material.

Samband och förändring

- **Funktioner och räta linjens ekvation**. Hur funktioner kan användas för att undersöka förändring, förändringstakt och andra samband.

Problemlösning

- ... i vardagliga **situationer** och inom olika **ämnesområden**

LGR 11 – KOMMUNIKATION



Matematik

Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser.

Syfte

...att utveckla en förtrogenhet med matematikens **uttrycksformer** och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang.

Kunskapskrav Åk 9, A

Eleven kan **redogöra för och samtala** om tillvägagångssätt på ett ändamålsenligt och effektivt sätt och använder då symboler, algebraiska uttryck, formler, grafer, funktioner och andra matematiska uttrycksformer med god **anpassning till syfte och sammanhang**.

Centralt innehåll Åk 7 – 9, tex

Taluppfattning och tals användning

- **Talsystemets utveckling** från naturliga tal till reella tal.
- Potensform för att **uttrycka** små och stora tal samt användning av prefix.

Algebra

- Innebörden av variabelbegreppet, dess användning i **algebraiska uttryck, formler, ekvationer**.
- Algebraiska uttryck, formler och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.

Geometri

- **Avbildning och konstruktion** av geometriska objekt.
- Geometriska satser och formler och **behovet av argumentation för deras giltighet**.

Sannolikhet och statistik

- **Tabeller, diagram och grafer** samt hur de kan **tolkas** och användas för att beskriva resultat av egna och andras undersökningar, till exempel med hjälp av digitala verktyg.
- Hur lägesmått och spridningsmått kan **användas för bedömning** av resultat vid statistiska undersökningar.
- **Bedömningar** av risker och chanser utifrån statistiskt material.

Samband och förändring

- **Funktioner och räta linjens ekvation**. Hur funktioner kan användas för att undersöka förändring, förändringstakt och andra samband.

Problemlösning

- ... i vardagliga **situationer** och inom olika **ämnesområden**

KURSPLANEN (LGR I I)

Problem

Begrepp

Procedur

Resonemang

Kommunikation

KURSPLANEN (LGR I I)

Problem

PROBLEM

Utveckla förmågan att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder

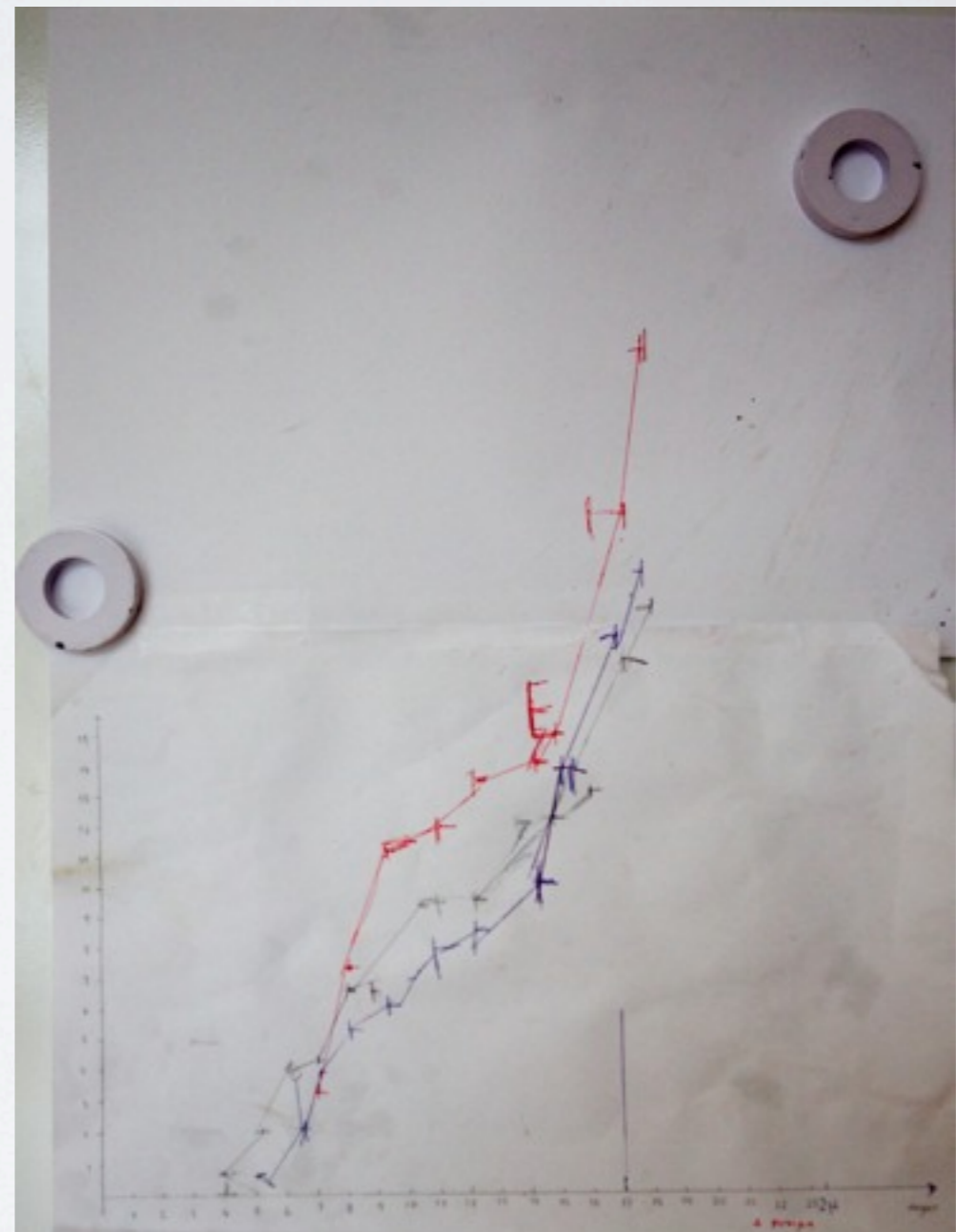
PROBLEM

Utveckla förmågan att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder

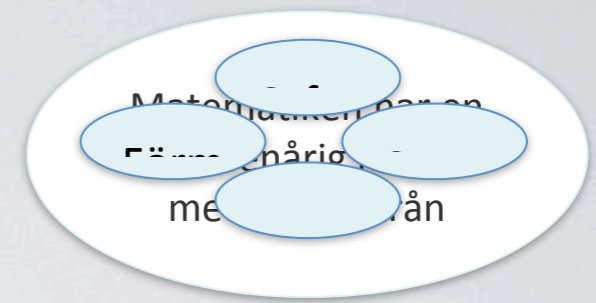


PROBLEM

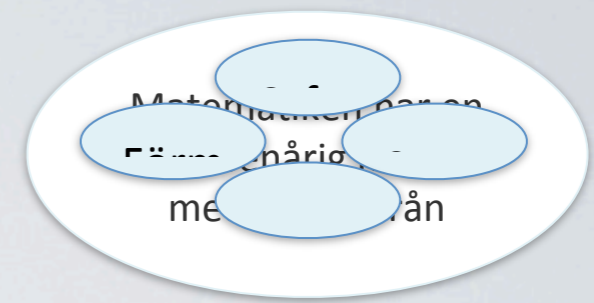
Utveckla förmågan att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder



LGR II – PROBLEM



LGR 11 – PROBLEM



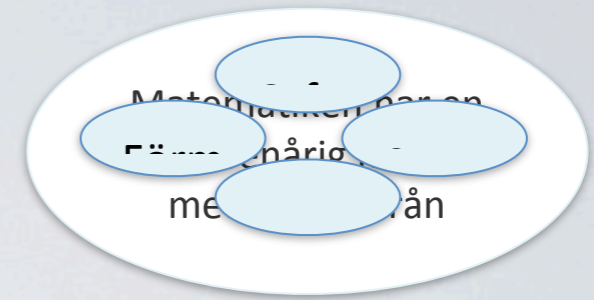
Matematik

Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och **problemlösande** aktivitet som är nära kopplad till den samhälls-, sociala och tekniska utvecklingen.

Syfte

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa **problem** samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska **situationer** samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.

LGR 11 – PROBLEM



Matematik

Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och **problemlösande** aktivitet som är nära kopplad till den samhälls-, sociala och tekniska utvecklingen.

Syfte

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa **problem** samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska **situationer** samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.

Centralt innehåll

Problemlösning

Åk 1- 3

Strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer.

Matematisk formulering av frågeställningar utifrån enkla vardagliga situationer.

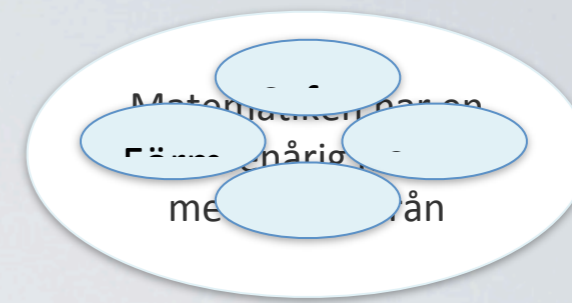
Åk 7 – 9

Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder

Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och olika ämnesområden.

Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer.

LGR 11 – PROBLEM



Matematik

Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och **problemlösande** aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen.

Syfte

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa **problem** samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska **situationer** samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.

Centralt innehåll

Problemlösning

Åk 1- 3

Strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer.

Matematisk formulering av frågeställningar utifrån enkla vardagliga situationer.

Åk 7 – 9

Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder

Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och olika ämnesområden.

Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer.

Godtagbara kunskaper åk 3

Eleven kan lösa enkla **problem** i elevnära situationer genom att välja och använda någon strategi med viss anpassning till **problemets** karaktär. Eleven beskriver tillvägagångssätt och ger enkla omdömen om resultatens rimlighet.

Kunskapskrav åk 9, E

Eleven kan lösa olika **problem** i bekanta situationer på ett i huvudsak fungerande sätt genom att välja och använda strategier och metoder med viss anpassning till **problemets** karaktär samt bidra till att formulera enkla matematiska **modeller** som kan tillämpas i sammanhanget. Eleven för enkla och till viss del underbyggda resonemang om val av tillvägagångssätt och om resultatens rimlighet i förhållande till **problemsituationen** samt kan bidra till att ge något förslag på alternativt tillvägagångssätt.

STRÄVORNA

strävorna

Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleven ges förutsättningar att ..



1 utveckla förmågan att formulera och lösa problem

2 utveckla förmågan att beskriva, analysera och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp

3 utveckla förmågan att hantera procedurer och lösa rutinuppgifter

4 utveckla förmågan att föra, följa och värdera matematiska resonemang

5 utveckla förmågan att kommunicera matematik och använda matematikens uttrycksformer

6 uppleva matematik som en utmanande, kreativ och estetisk verksamhet

7 reflektera över matematikens utveckling och relevans

8 utveckla förmågan att använda digital teknik för matematiskt arbete

9 utveckla förmågan att tolka en situation samt utforma och värdera en matematisk modell

A Tal	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8A	9A
B Algebra	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	8B	9B
C Geometri	1C	2C	3C	4C	5C	6C	7C	8C	9C
D Sannolikhet & statistik	1D	2D	3D	4D	5D	6D	7D	8D	9D
E Samband och förändring	1E	2E	3E	4E	5E	6E	7E	8E	9E
F Problemlösning	1F	2F	3F	4F	5F	6F	7F	8F	9F

Eftermiddagen

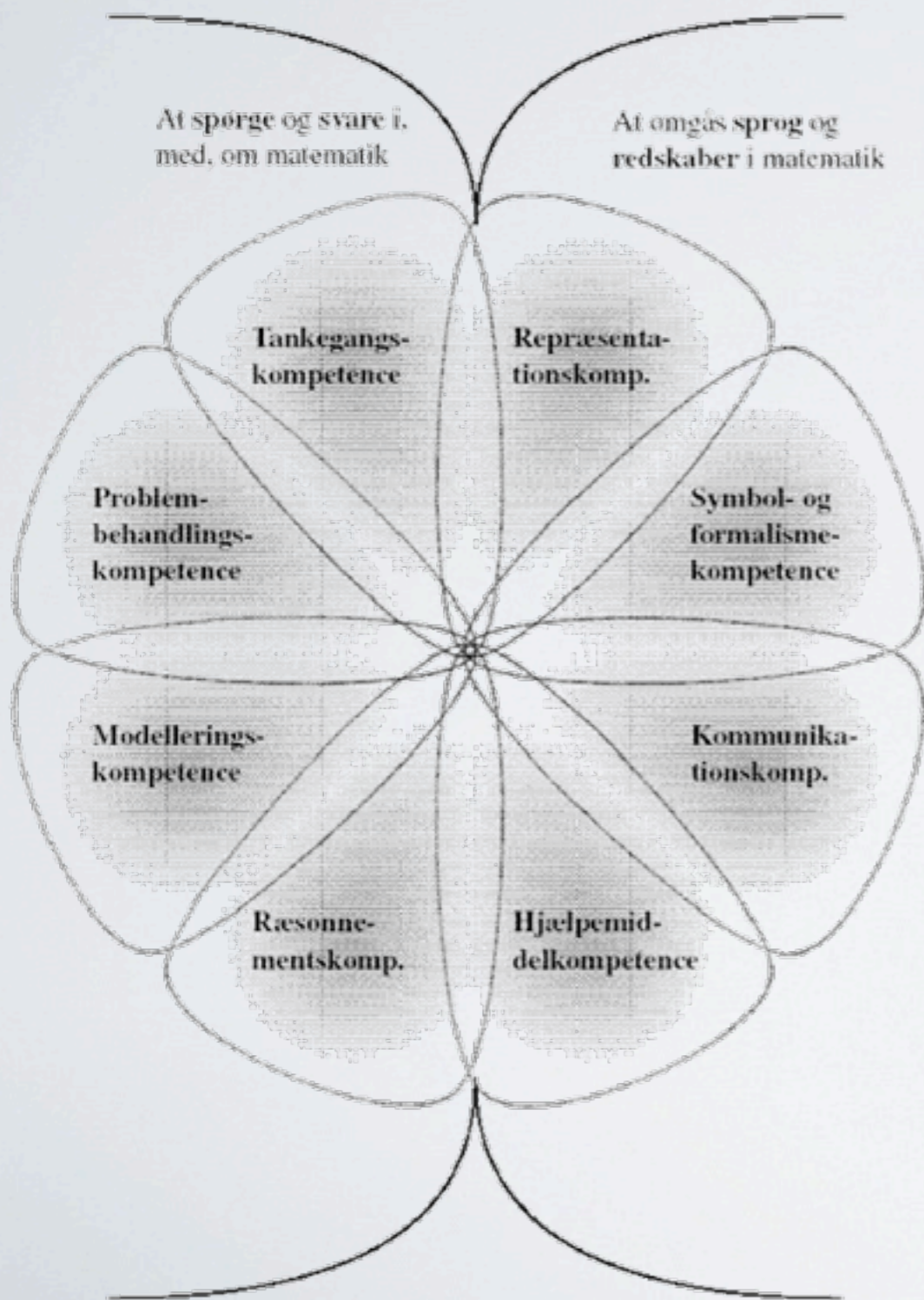
13.00 – 15.00 På jakt efter förmågor – workshop

15.00 – 15.30 Kaffe

15.30 – 16.30 På jakt efter förmågor – redovisning i grupp

16.30 – 17.00 På jakt efter förmågor – uppföljning, *Ola*

KOMPETENCER OG MATEMATIKLÆRING



8 kompetenser i två grupper:
att fråga och svara i med och om matematik
att använda språk och redskap i matematik

All competencies have a dual nature, as they have an analytical and a productive aspect. The analytical aspect of a competency focuses on understanding, interpreting, examining, and assessing mathematical phenomena and processes, such as, for instance, following an controlling a chain of mathematical arguments or understanding the nature and use of some mathematical representation, whereas the productive aspect focuses on the active construction or carrying out of processes, such as inventing a chain of arguments or activating and employing some mathematical representation in a given situation.

Niss, 2003
Niss & Højgaard-Jensen, 2001

KOMPETENCER OG MATEMATIKLÆRING

LGR II – Kommunikation:

Kommunikationskompetens - att kunna kommunicera i, med och om matematik

Denna kompetens består dels av att kunna sätta sig in i och tolka andras skriftliga, muntliga eller visuella uttalanden och "texter" med matematikinnehåll, dels i att kunna uttrycka sig på olika sätt och på olika nivåer av teoretisk eller teknisk precision kring angelägenheter med matematikinnehåll, skriftligt, muntligt eller visuellt med olika kategorier av mottagare.

Communicating in, with, and about mathematics

such as

understanding others' written, visual or oral 'texts', in a variety of linguistic registers, about matters having a mathematical content;

expressing oneself, at different levels of theoretical and technical precision, in oral, visual or written form, about such matters.

Tillbaka till Kommunikation

KOMPETENCER OG MATEMATIKLÆRING

LGR II – Resonemang:

Reasoning mathematically such as

- *following* and *assessing chains of arguments*, put forward by others
- *knowing* what a mathematical *proof is* (not), and how it differs from other kinds of mathematical reasoning, e.g. heuristics
- *uncovering the basic ideas* in a given line of argument (especially a proof), including distinguishing main lines from details, ideas from technicalities;
- *devising* formal and informal mathematical *arguments*, and *transforming* heuristic arguments to valid proofs, i.e. *proving statements*.

KOMPETENCER OG MATEMATIKLÆRING

LGR 11 – Problem:

Posing and solving mathematical problems

such as

- *identifying, posing, and specifying* different kinds of mathematical *problems* – pure or applied; open-ended or closed;
- *solving* different kinds of mathematical problems (pure or applied, open-ended or closed), whether posed by others or by oneself, and, if appropriate, in different ways.

Modelling mathematically (i.e. analysing and building models)

such as

- *analysing* foundations and properties of *existing models*, including assessing their range and validity
- *decoding* existing models, i.e. translating and interpreting model elements in terms of the ‘reality’ modelled
- *performing active modelling* in a given context - structuring the field - mathematising - working with (in) the model, including solving the problems it gives rise to
 - validating the model, internally and externally
 - analysing and criticising the model, in itself and vis-à-vis possible alternatives
 - communicating about the model and its results
 - monitoring and controlling the entire modelling process.

Tillbaka till problem

KOMPETENCER OG MATEMATIKLAERING

LGR 11 – Begrepp:

Representing mathematical entities (objects and situations) such as

- *understanding* and *utilising* (decoding, interpreting, distinguishing between) different sorts of representations of mathematical objects, phenomena and situations;
- understanding and utilising the *relations between different representations* of the same entity, including knowing about their relative strengths and limitations;
- *choosing* and *switching* between representations.

KOMPETENCER OG MATEMATIKLÆRING

LGR II – Procedur:

Handling mathematical symbols and formalisms

such as

- *decoding and interpreting symbolic and formal mathematical language, and understanding its relations to natural language;*
- *understanding the nature and rules of formal mathematical systems (both syntax and semantics);*
- *translating from natural language to formal/symbolic language*
- *handling and manipulating statements and expressions containing symbols and formulae.*

Tillbaka till procedur

KOMPETENCER OG MATEMATIKLÆRING

- Thinking mathematically** (mastering mathematical modes of thought) such as
- *posing questions* that are characteristic of mathematics, and *knowing the kinds* of answers (not necessarily the answers themselves or how to obtain them) that mathematics may offer;
 - understanding and handling the *scope* and *limitations* of a given *concept*.
 - *extending* the scope of a *concept* by *abstracting* some of its properties; *generalising results* to larger classes of objects;
 - *distinguishing* between different *kinds of mathematical statements* (including conditioned assertions ('if-then'), quantifier laden statements, assumptions, definitions, theorems, conjectures, cases):

ADDING IT UP

Recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen *mathematical proficiency* to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully. Mathematical proficiency, as we see it, has five components, or *strands*:

- *conceptual understanding*—comprehension of mathematical concepts, operations, and relations
- *procedural fluency*—skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately
- *strategic competence*—ability to formulate, represent, and solve mathematical problems
- *adaptive reasoning*—capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification
- *productive disposition*—habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one's own efficacy.

These strands are not independent; they represent different aspects of a complex whole. Each is discussed in more detail below. The most important observation we make here, one stressed throughout this report, is that ***the five strands are interwoven and interdependent in the development of proficiency in mathematics*** (see [Box 4-1](#)). Mathematical proficiency is not a one-dimensional trait, and it cannot be achieved by focusing on just one or two of these strands.

ADDING IT UP

LGR II – Begrepp:

Conceptual understanding refers to an integrated and functional grasp of mathematical ideas. Students with conceptual understanding know more than isolated facts and methods. They understand why a mathematical idea is important and the kinds of contexts in which it is useful. They have organized their knowledge into a coherent whole, which enables them to learn new ideas by connecting those ideas to what they already know.

ADDING IT UP

LGR 11 – Procedur:

Procedural fluency refers to knowledge of procedures, knowledge of when and how to use them appropriately, and skill in performing them flexibly, accurately, and efficiently. In the domain of number, procedural fluency is especially needed to support conceptual understanding of place value and the meanings of rational numbers. It also supports the analysis of similarities and differences between methods of calculating. These methods include, in addition to written procedures, mental methods for finding certain sums, differences, products, or quotients, as well as methods that use calculators, computers, or manipulative materials such as blocks, counters, or beads.

Procedural fluency refers to knowledge of procedures, knowledge of when and how to use them appropriately, and skill in performing them flexibly, accurately, and efficiently.

Tillbaka till procedur

ADDING IT UP

LGR 11 – Problem:

Strategic competence refers to the ability to formulate mathematical problems, represent them, and solve them. This strand is similar to what has been called problem solving and problem formulation in the literature of mathematics education and cognitive science, and mathematical problem solving, in particular, has been studied extensively

Tillbaka till problem

ADDING IT UP

LGR II – Resonemang:

Adaptive reasoning refers to the capacity to think logically about the relationships among concepts and situations. Such reasoning is correct and valid, stems from careful consideration of alternatives, and includes knowledge of how to justify the conclusions. In mathematics, adaptive reasoning is the glue that holds everything together, the lodestar that guides learning. One uses it to navigate through the many facts, procedures, concepts, and solution methods and to see that they all fit together in some way, that they make sense. In mathematics, deductive reasoning is used to settle disputes and disagreements. Answers are right because they follow from some agreed-upon assumptions through series of logical steps. Students who disagree about a mathematical answer need not rely on checking with the teacher, collecting opinions from their classmates, or gathering data from outside the classroom. In principle, they need only check that their reasoning is valid.

Tillbaka till Resonemang

ADDING IT UP

Productive disposition refers to the tendency to see sense in mathematics, to perceive it as both useful and worthwhile, to believe that steady effort in learning mathematics pays off, and to see oneself as an effective learner and doer of mathematics. If students are to develop conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, and adaptive reasoning abilities, they must believe that mathematics is understandable, not arbitrary; that, with diligent effort, it can be learned and used; and that they are capable of figuring it out. Developing a productive disposition requires frequent opportunities to make sense of mathematics, to recognize the benefits of perseverance, and to experience the rewards of sense making in mathematics.