



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder

En utvärdering av matematiksatsningen.

Madeleine Löwing, Marie Fredriksson, Eva Färjsjö
Södertörns Högskola och Göteborgs Universitet



Institutionen för didaktik och pedagogisk profession



Övergripande utgångspunkter för utvärderingsuppdraget:

”Statsbidraget syftar till att få ökad kunskap om vilka åtgärder och under vilka förutsättningar som lokal skolutveckling leder till önskad måluppfyllelse.”

- synliggöra faktorer som påverkar kvaliteten i positiv riktning
- utvärdera om det skapats nya möjligheter inom undervisningen, vilka i sin tur kan leda till ökad måluppfyllelse
- studera lärares undervisning och hur aktuella material har använts





Tillvägagång:

- Studerat ansökningar
- Skickat ut enkäter
- Genomfört intervjuer
(projektledare, lärare, matematikutvecklare, skolledare, elever)
- Besökt (beställda) **lektioner. (ca 35 st. vid 12 skolor)**

Urvalet av skolor som besökts har gjorts med en jämn fördelning mellan åldersgrupper, matematikinnehåll, geografisk spridning, kommunala och fristående skolor.

Hälften av besöken har genomförts i skolor som fått medel beviljade 2009 och hälften i skolor som fått medel 2010.





Vanligaste målen i projektansökningarna

- Bort från läromedlens styrning
- Mer variation i undervisningen
- Arbeta med förmågor
- Bygga upp en Matematikverkstad





Insamling och analys av material utifrån:

- Ramfaktormodellen
- Didaktisk ämnesteor

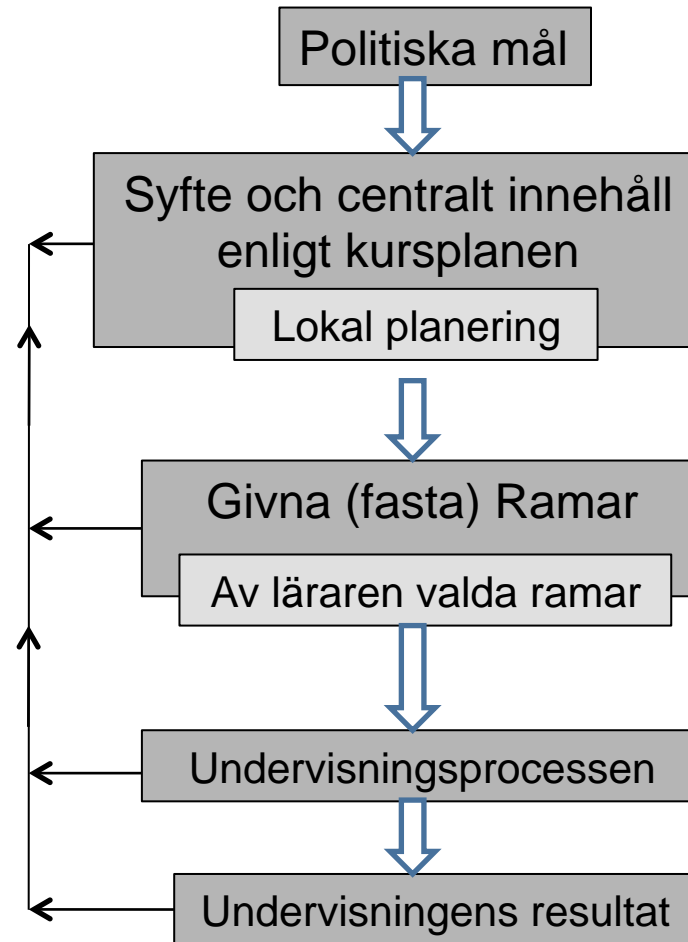
Teori för:

- utvärdering
- bedömning
- klassrumsstudier



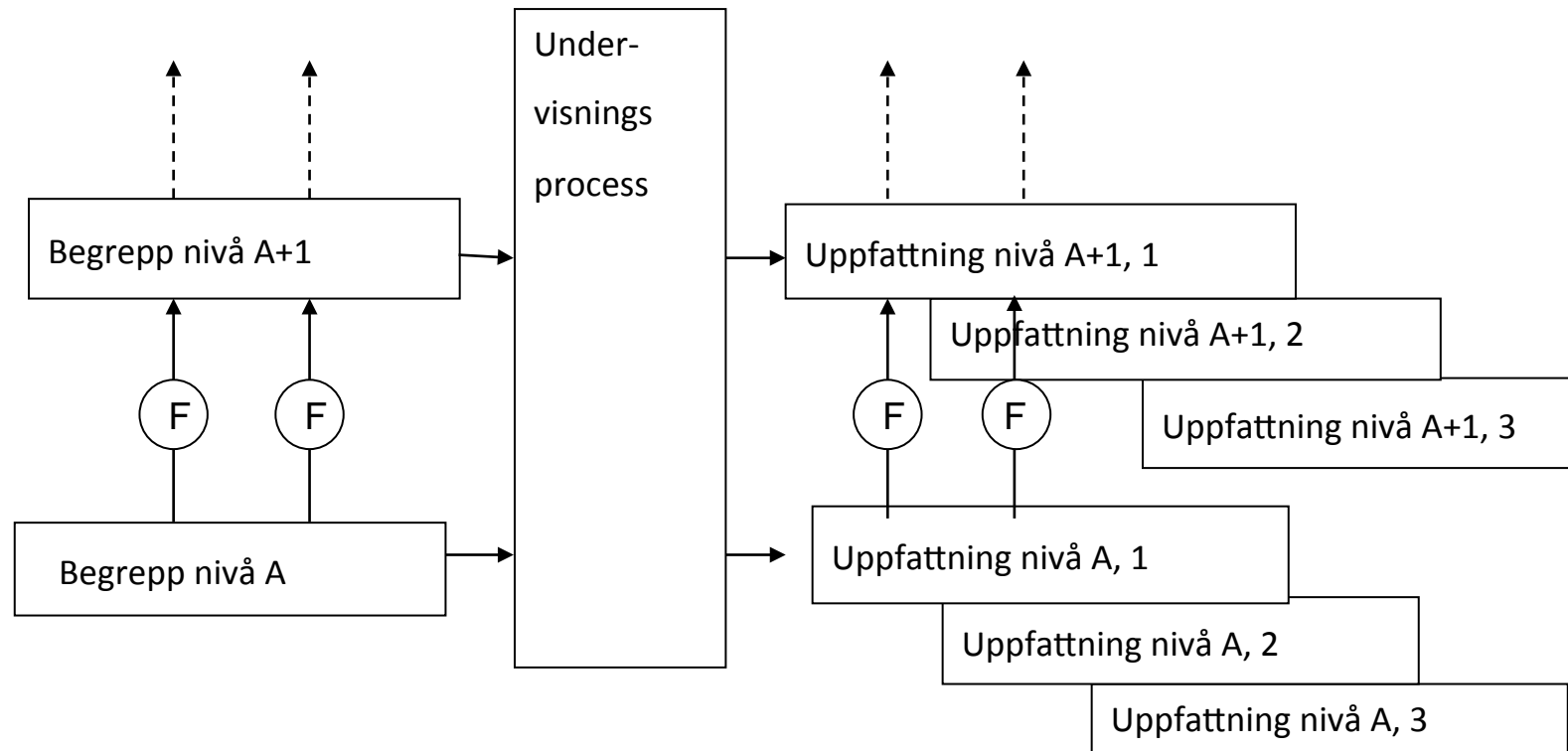


Ramfaktormodellen





Begrepp och uppfattning





Några för utvärderingen centrala definitioner

- Matematikverkstad
- Laborativt arbete
- Konkret matematik
- Färdighetsträning
- Vardagsmatematik
- Begrepp och uppfattning
- Uttrycksform och representationsform
- Varierad undervisning
- Syfte och förmågor i kursplanen





Konkretisering

- Att konkretisera innebär att man lyfter fram och illustrerar strukturen hos en matematisk idé, tankeform eller operation med hjälp av en metafor, en tidigare erfarenhet eller ett material (en artefakt). Konkretisering kan då bli ett stöd för inläringen.
- Målet med matematikundervisningen är att eleverna skall lära sig abstrahera matematiska idéer och operationer.
- Med detta menas att eleverna skall förstå idéer och operationer på ett sådant sätt att de kan generaliseras till att lösa problem av olika slag, i olika situationer.
- Efter hand som eleverna har förstått den idé som har konkretiserats, är det viktigt att man lämnar det konkretiserande materialet.
- Nu är det istället angeläget att eleverna lär sig att i huvudet hantera det som abstraherats.





Laboration

- Det primära syftet med laborativ matematikundervisning är att eleverna genom laborationer ska få uppleva, skapa och (åter)upptäcka någon del av matematiken, inte presenteras för en färdig metod.
- Eleven får erfara att matematiken inte är statisk, utan hur den kan växa fram utgående från givna premisser.
- Detta kan väcka nyfikenhet och stimulera eleverna till att diskutera såväl resultatet som själva processen. En laboration ger tillfälle att bygga upp ett språk med vars hjälp man kan diskutera matematik.
- En rad intressanta laborationer kan lika väl utföras utan material, enbart med papper.
- Det primära syftet med att laborera är inte att aktivera eleverna eller att skapa variation i undervisningen. Väl planerade laborationer kan emellertid ge dessa mervärden.





Vad är det som kan varieras?

- Arbetsform/arbetssätt:
naturligt och gynnsamt att variera arbetssätt i undervisningen och därmed ge eleven möjlighet att förstå och befästa kunskapen samt formulera, reflektera, argumentera och kommunicera
- Undervisningens innehåll:
att variera aspekter av innehållet i undervisningen,
att variera graden av konkretisering, så att den anpassas till olika individuella behov.
- Frågor till eleverna i avsikt:
att individualisera genom att med flexibilitet följa upp nya idéer från eleverna, utmana olika elever eller med hjälp av frågor synliggöra missuppfattningar och tillrättalägga dessa.

Det är alltså inte variationen i sig som är det primära det är syftet med variation.





Läraren har en viktig roll i undervisningen

Niss (1994) betonar lärarens viktiga roll i skolans matematikundervisning:

"As the learning of mathematics does not take place spontaneously and automatically, mathematics needs to be taught."

Kilpatrick m.fl (2001) framhåller på motsvarande sätt att

"What is learned depends on what is taught"





Att konkretisera

Szendrei (1996) menar att lärarens roll är avgörande för om ett konkretiserande materialet leder till en konkretisering eller ej:

Indeed, it is not easy to plan a process that can realise the journey from concrete material to abstract mathematical content. The rule of the teacher in this work is crucial. (s. 429)

Hon säger även att “*The same manipulative can be both a useful tool and a harmful enemy of mathematics learning*” (s. 424).





Lärare vill utveckla sin undervisning!

Vi har mött

- Projektledare som är eldsjälar
- Lärare som läst många didaktikböcker
- Lärare som besökt konferenser och gjort studiebesök
- Lärare som deltagit i studiecirkel
- Lärare som lagt ner mycket arbete på att bygga matematikverkstäder
- Lärare som vill förbättra och utveckla

Vi har sett aktiva elever som laborerar, diskuterar och presenterar lösningar





Processen

Initieringsfasen

sätta in alla i arbetet

dialog mellan projektledare/entusiaster och de som ska delta
externa föreläsare/inspirationsbesök/studiecirkclar

Implementeringsfasen

energislukande och kritisk fas,

problem och svårigheter upptäcks, behovet av stöd uppmärksammas

Institutionaliseringsfasen

det man har prövat ska nu fungera rutinmässigt som en naturlig del av
det dagliga arbetet.

Spridningsfasen

sprida goda idéer till andra skolor (kan pågå parallellt med övriga faser)





Lärare visa en hög social kompetens, alla elever uppmärksammas

- lärare fokuserar ofta på att alla elever ska bli sedda och få komma till tals och våga prata, istället för på vad eleverna faktiskt säger och vilken matematisk förståelse som kommer till uttryck i redovisningarna.
- En konsekvens av detta blir att felaktiga redovisningar och lösningar inte uppmärksammas och tas upp till diskussion och korrigeras, utan får stå kvar oemotsagda på tavlan, något som i sin tur skapar förvirring bland eleverna. De kan ju inte alltid avgöra om det kan vara så – kanske är det ett annat sätt att tänka?





Vad vi har kommit fram till:

- Framgångsfaktorer
 - Tydliga mål på kort och lång sikt
 - Fokus på innehåll i undervisningen
 - Variation gäller såväl aspekter av innehållet som arbetsätt
 - Kunskapskontroll
- Begränsande faktorer
 - Ledarskapet i klassrummet behöver utvecklas när det gäller en del avgörande dimensioner
 - Didaktiska ämneskunskaper behöver utvecklas och fördjupas
 - Materialet överordnat innehållet
- Från läromedelsstyrning till materialstyrning
 - Material blir oftast mer ett görande än skapar förståelse
 - Laborationer tar för lång tid anser lärarna





Framgångsfaktorer

- Läraren har tydliga mål för lektionen : *Månghörningar och dess egenskaper*
- Lektionen är ett led i en välplanerad sekvens av geometrilektioner
- Eleverna arbetar tillsammans, pratar om begrepp och illustrerar dem
- Läraren går runt och stödjer deras arbete genom att ställa utmanande frågor samt korrigerar om något blir fel
- Läraren samlar klassen för en gemensam sammanfattning
- Eleverna arbetar individuellt vilket befäster kunskaperna

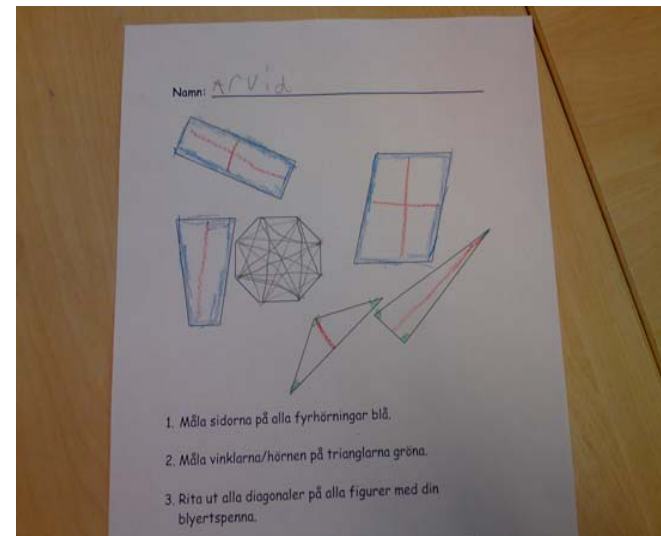
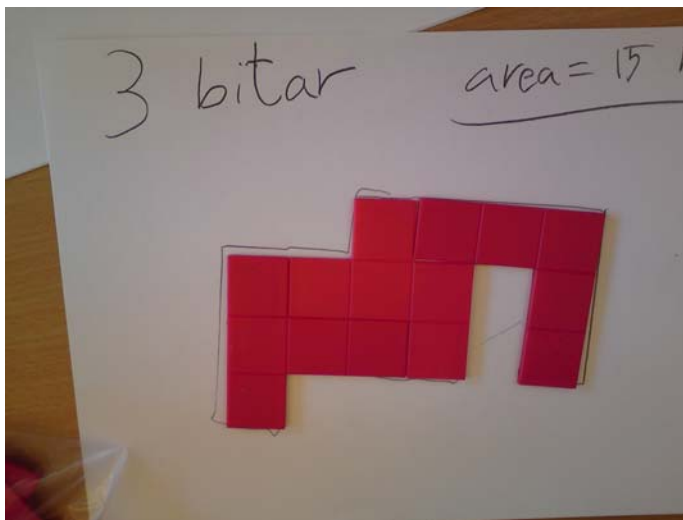


Bild L5.4



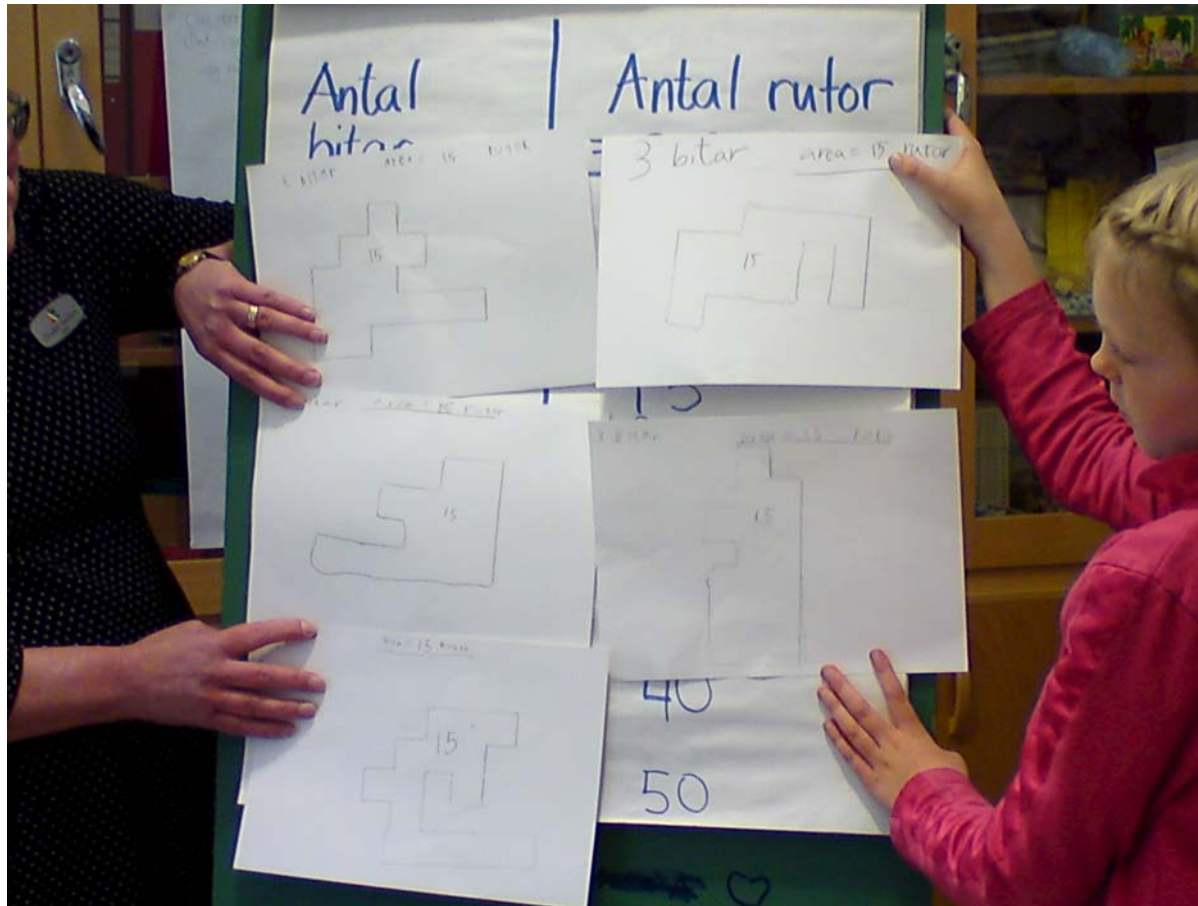


Exempel från årskurs 1. Area med hjälp av pentamino



Antal bitar	Antal rutor = arean
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
8	40
10	







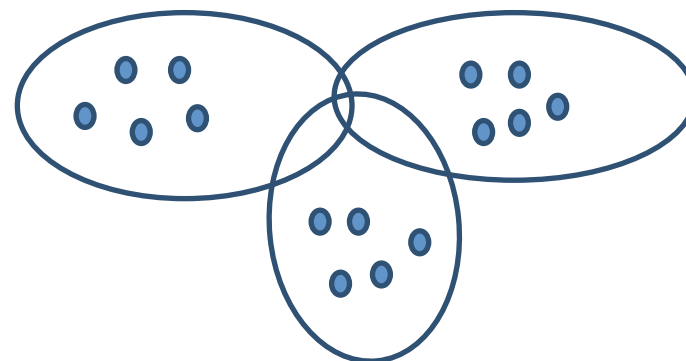
Strukturlikhet mellan material och matematik

”Kalle har två syskon de ska dela på 15 kronor. Hur många kronor får var och en?”

eleverna lägger 5 kr i varje mängd.

Läraren: Vad räknade vi ut?

- Elev 1: att femton delat på fem är tre
- Elev 2: att femton delat på tre är fem.
- Elev 3: att fem gånger tre är femton
($15/5 = 3$ $15/3 = 5$ $5 \cdot 3 = 15$)



Elevernas egna divisioner:

$$4/20 = 5 \quad (20 \text{ delat på } 4)$$

$$24/8 = 3 \quad (24 \text{ delas på } 3 \text{ blir } 8)$$

$$16/3 = 5$$

$$27 \text{ kr} / 9 \text{ kr} \quad (27 \text{ kr delas på } 3 \text{ barn} = 9 \text{ kr})$$





Mål och fokus.

Ex från innehåll- och delningsdivision.

Redovisa färdiga uttryck i fyrfältsblad.

Alla grupper utom en gör delningsdivision. Innehållsexemplet ändras till delning.

Elevfråga: "Varför får vi så lätta tal, kan vi inte få lite större?"





GÖTEBORGS UNIVERSITET

Variation - av vad? Utvecklingsbart och generaliserbart.



”Är det bara pizzor man kan dela?”

Materialet begränsar möjligheten till variation av ett antal aspekter av bråkbegreppet.



Institutionen för didaktik och pedagogisk profession



Generaliserad förståelse

L: Hur många tredjedelar är en hel?

E: 3 tredjedelar

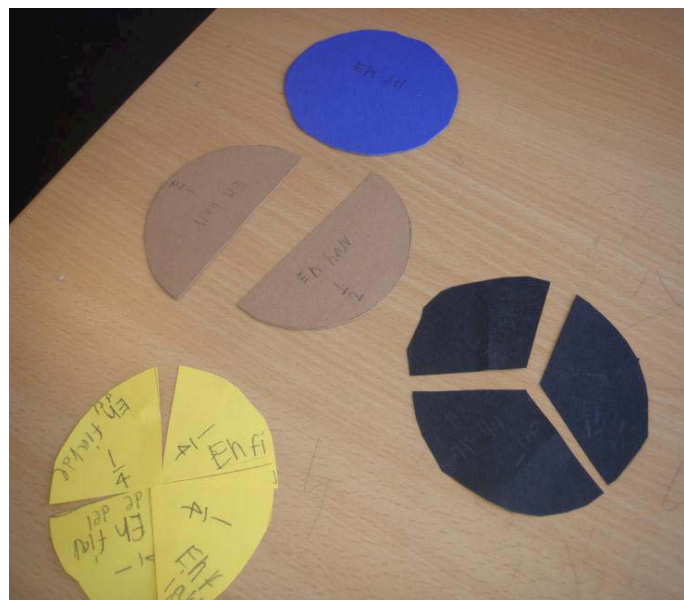
L: hur många fjärdedelar?

E: fyra fjärdedelar.

E:och tolv tolvdelar

E: ...och miljoner miljondelar.....

L: ja men sådana delar har vi inte så det kan vi inte göra...





Specifika exempel - generell slutsats

$3/3 = 1$ $4/4 = 1$ $8/8 = 1$

Formulera och skriv den generella slutsatsen gemensamt:

"När täljare och nämnare är lika så är bråket lika med en hel".

Att arbeta formativt

- Uppgiftsrelaterad men generell feed-back.
- Fånga upp- utveckla - dra slutsatser - formulera gemensamt!

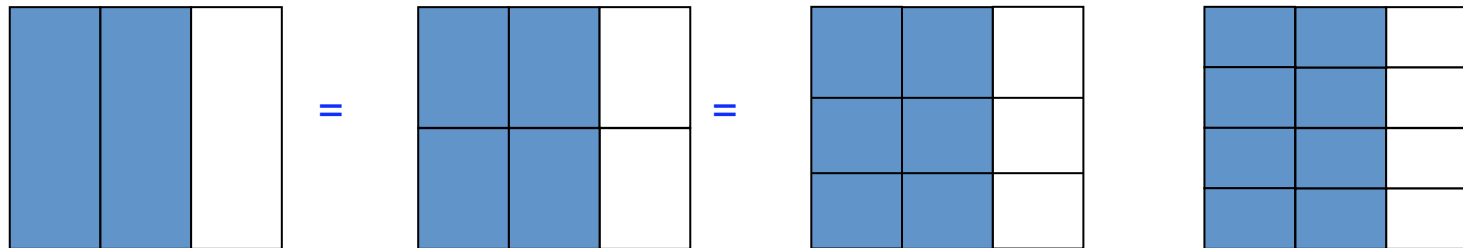




Varje tal i bråkform kan skrivas på oändligt många sätt

Ett bråk som $2/3$ kan skrivas

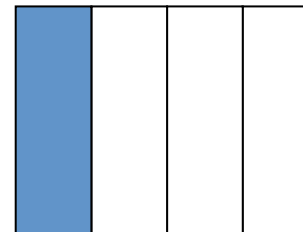
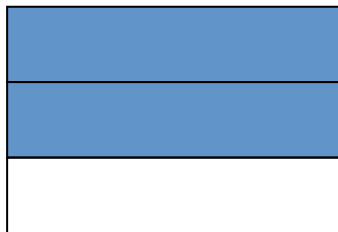
$$\text{som } 2/3 = 4/6 = 6/9 = 8/12 \dots$$





Konkretisering av $2/3 + 1/4$

$2/3$ kan konkretiseras så här och $1/4$ kan konkretiseras så här

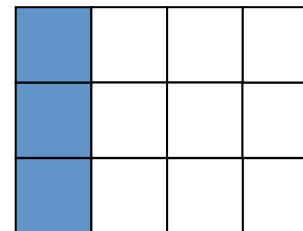
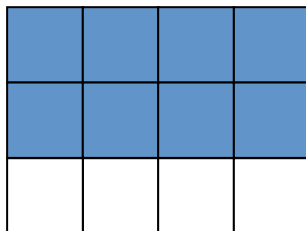


Genom att kombinera mönstren ser man att

$$2/3 = 8/12$$

och

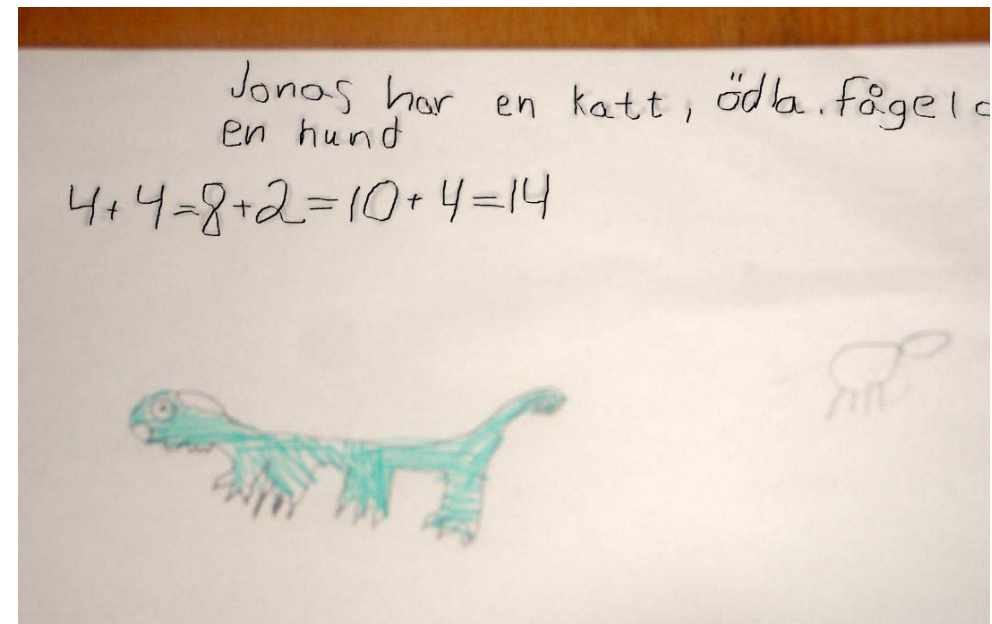
$$1/4 = 3/12$$





Problemlösning – öppen uppgift. "Eric har 4 djur.
Tillsammans har de 14 ben. Vilka djur har Eric?"

- $4+4+4+2$
- $6+4+2+2$
- $8+2+2+2$
- Kommutativitet,
- Likhetstecknet, multiplikation
 $8+(3*2)$



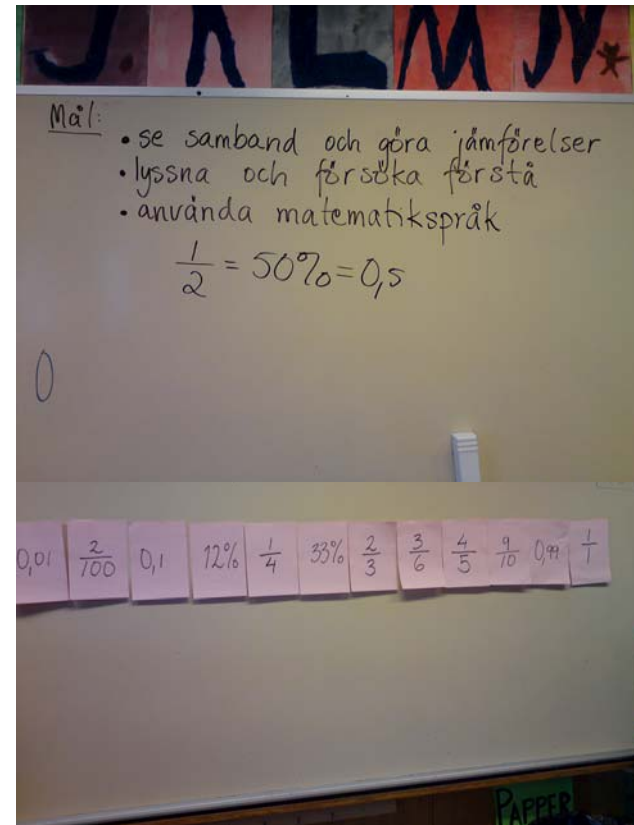


$$\frac{1}{2} = 50\% = 0,5$$

- Att jämföra $\frac{1}{2}$, 50% och 0,5 är olyckligt,
- Talen 0,5 och $\frac{1}{2}$ uppfattas som tal.
- Talet $\frac{1}{2}$ kan också tolkas som en andel, nämligen 1 av 2 eller 50 av 100 dvs. $50/100$.
- 50% är däremot inte ett tal utan enbart en andel och ger ett tal först när man tar 50% av något.

50% av en hel är lika med $\frac{1}{2}$

50% av 4 är lika med 2.





Formativ bedömning och generaliserad förståelse

Uppgift (Åk 7):

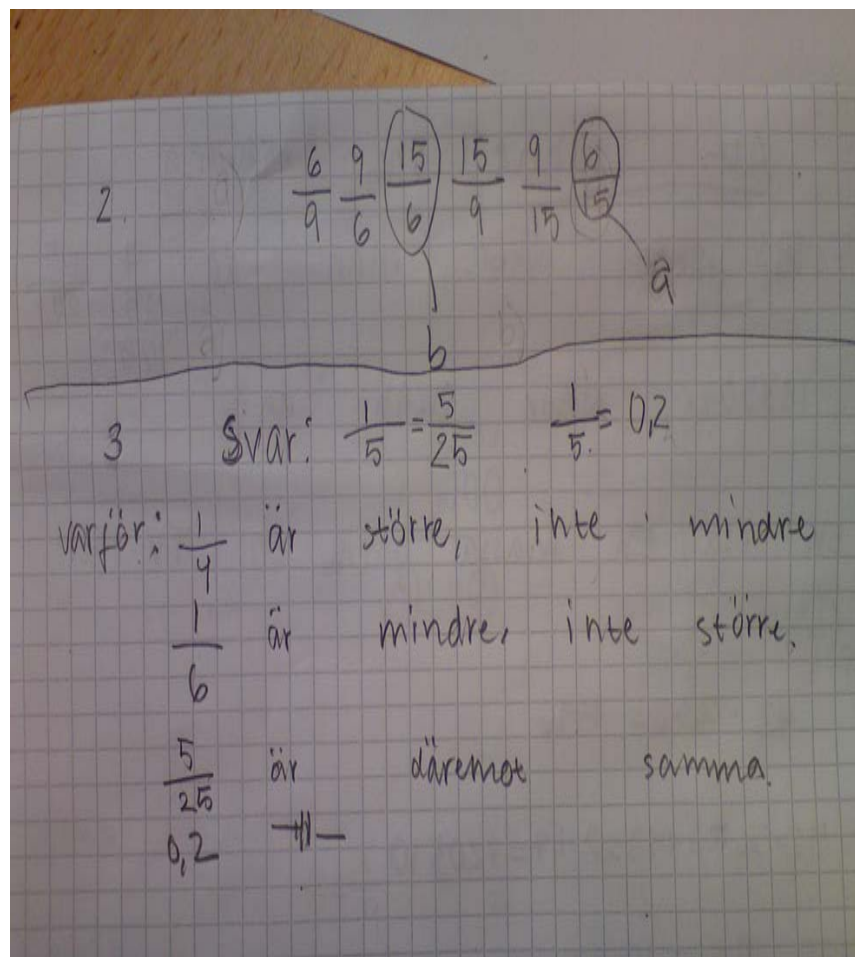
Av talen 6, 9 och 15 kan man bilda sex olika bråk, vilket är

a) minst b) störst

Elev-grupp redovisar vid tavlan, beskriver att de hade tänkt via decimalform.

Annan elev: 15 är minsta delen och ju mindre delar där nere (nämnaren), desto mindre är bråket. Har man då få sådana bitar (litet tal i täljaren) så måste det vara minst. Alltså är sex femtondelar minst eftersom det är färre än nio femtondelar. Ju större delar (litet tal i nämnaren) och ju fler av dessa man tar desto större blir talet. Alltså femton sjättedelar är störst.

Läraren säger så kan man också tänka och går vidare.





Om materialet:

- Matematikverkstäder på de skolor vi besökt påminner mycket om varandra och om förebilden från NCM
- Hur verkstaden/materialet är organiserat och tillgängligheten/ användningen varierar mellan skolor.
- Många lärare uttrycker osäkerhet om vad aktiviteten syftar till och hur den bör genomföras och följas upp.





Sammanfattning av lärarerfarenheter

Positiva erfarenheter:

- Möjlighet att köpa in material.
- Ett gemensamt fokus på matematiken *"nu pratar alla matte"*
- Tid för ämneskonferenser *"äntligen får vi tid att diskutera matte-undervisningen"*
- Viss fortbildning

Svårigheter

- Tidsbrist - planering Mycket nytt samtidigt. (Lgr-11, Betyg, Läsa-skriva-satsningen, IUP, IKT....)
- Tidsbrist - klassrummet *"svårt att hinna med allt om man ska laborera också"*
- Behov av fördjupade matematikkunskaper
- Behov av matematikdidaktiska kunskaper
- Behov av hjälp och stöd med materialet *"ända in i klassrummet"*.
- Befarar att det inte blir något bestående då projektet är slut.





Hur kan begränsande faktorer utvecklas?

Lärarens didaktiska ämneskunskaper behöver utvecklas och fördjupas

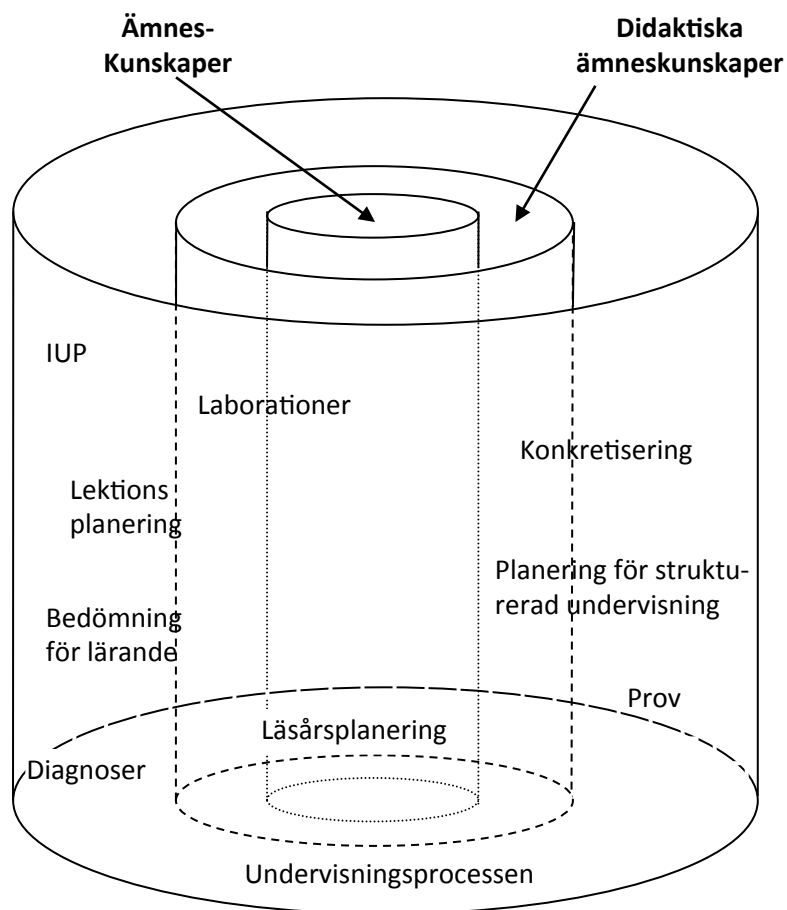
Undervisningsprocessens delar bör förtydligas

- Innehållslig progression årskurs F-9
- Tydliga mål för undervisningen
- Materialets syfte: Konkretisering, Laboration eller Färdighetsträning
- Individualisering
- Formativ bedömning - kräver goda didaktiska ämneskunskaper
- Innehållsliga nivån på lektionerna bör höjas





Matematikdidaktik - en modell





Rekommendationer

- Utvecklingsarbete på skolor behöver en extern handledare
- Kompetensutveckling för lärare behöver fokusera på didaktiska ämneskunskaper
- Lärare behöver hjälp med strukturering av innehållet så att undervisningen får en gynnsam progression
- Uthållighet och tid





GÖTEBORGS UNIVERSITET

Madeleine.Lowing@ped.gu.se

AKUT -gruppen

Forskningsgruppen för

Analys, **K**unskapsuppföljning och **U**Tvärdering av matematikkunskaper

- <http://www.ipd.gu.se/enheter/amnesdidaktik/avdelningar/Matematikdidaktik/Forskning/akut/>



Institutionen för didaktik och pedagogisk profession