Algebra, samband och förändringar

I grund- och gymnasieskolans kursplaner för matematik är *Samband och förändring* och *Algebra* viktiga innehåll. I åk 1–3 är dessa moment av förberedande och grundläggande natur. Det är viktigt att elever möter dessa matematikidéer tidigt i konkreta sammanhang och ser hur de kopplas ihop med avsnitt där begreppsbildning och problemlösning är mer intensiv, som t ex tal och räkning.

En central del av matematiken är att upptäcka och beskriva samband, t ex likheter och olikheter. Modeller används för att förutse skeenden eller upptäcka avvikelser. Vi vill förklara vad förändringar beror på. Ibland kommer slumpen in, men även dess inverkan kan förklaras, se kapitel 4. Olika grenar av matematiken ser vi i tillämpningar i samhälle, utbildning och vetenskap.

Med matematik kan vi beskriva förändring, när det finns ett samband mellan två storheter. Om hyran för en cykel är 100 kr per timme kostar varje timme lika mycket. Sambandet mellan tid och hyra är *proportionellt*. En annan förändring möter vi i samband med procentuell tillväxt. Den är *exponentiell*, och där ökar förändringen med tiden. Att skilja mellan olika typer av förändringar är viktigt för att uppfatta och använda matematik i andra ämnen och för att kunna hantera sin privatekonomi.

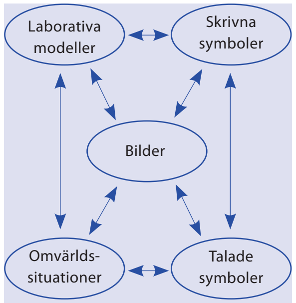
Likhetstecknet sägs ibland vara den mest missbrukade symbolen. Det finns två sätt att tolka likhetstecknet. En dynamisk tolkning är att det uppmanar till att utföra en beräkning, ”det blir”. Detta innebär att tecknet ska följas av svaret. I en statisk tolkning har likhetstecknet djupare innebörd. Det står inte där för att det säkert ska utföras en beräkning, utan för att ange likhet mellan vänster och höger led (Pettersson, 2010).

Vid en dynamisk tolkning ser kanske inte eleven vänster och höger led riktigt samtidigt. Först finns det som ska beräknas i ett vänsterled. När beräkningen är utförd finns bara svaret i högerledet. Detta visar en välkänd svårighet, som grundas tidigt och sedan ger problem t ex när det gäller algebra, ekvationer, formler och funktioner:

> *Detta innebär att eleven i uppgiften 7 = __ + 5 ger svaret 12, dvs. adderar 7 och 5. Denna ”addition över likhetstecknet” är tecken på att eleven inte förstår innebörden av likhetstecknet. Denna bristande förståelse var orsaken till att en elev i en uppgift av typen 8 = 4 + __ + 3 ger svaret 12, dvs. adderar 8 och 4. Dessutom bortser/missar eleven den sista termen i högerledet. Felsvaret 4, som också förekommit, fås genom att eleven bortser från termen 3 i högerledet, och konstaterar att 4 + 4 = 8. Genom att addera de två talen i höger led fås felsvaret 7. Alla dessa svar indikerar att eleven inte förstår innebörden av likhetstecknet.*
>
> (Pettersson, 2010, s 8)

För att utveckla tänkande i matematik använder vi ”flera språk”. En intellektuell utveckling förutsätter att vi tillägnar oss redskap. Lusten att forma tecken är djupt rotad. Det är viktigt med symboler, när vi utvecklar vetande. Många har utvecklats till verktyg i vår kulturhistoria, t ex vårt siffersystem. Symbolspråket i matematik är internationellt och oftast oberoende av hemspråk. En formel för cirkelns omkrets ser likadan ut på olika språk.

Vi kan kommunicera i matematik genom vardagsspråk och lägga till speciella matematikord för att beteckna objekt och operationer vi talar om. Unga elever lär sig en etablerad terminologi när de känner igen och arbetar med matematik. Ord som parallellogram och cylinder är inte svårare än ord som Mp3-spelare och mobiltelefon. En annan form av språk är användning av bilder eller diagram.



Representationer
Uttrycksformer

Symboler som 7, 27, +, =, > och kanske särskilt x upplevs som abstrakta. Det symboliska språket kommer senare än andra former. Det fångar det generella i begrepp och operationer och ger oss tillgång till koncisa uttrycksformer. Vi lär oss i en process där målet är att upptäcka, förstå och använda strukturer och relationer, men för att nå dit kan vi inte enbart arbeta med symboler.

I kapitel 3 finns aptitretare med information om *Algebra för alla* på s 126, *NOMAD på s 148, Matematikverkstad* och *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* på s 149, *Geometri och rumsuppfattning – med Känguruproblem* på s 150.

Schemat härintill kan ses som ett tankeinstrument. Det visar olika sätt att uttrycka idéer och begrepp i matematik, i sammanhang där vi resonerar och löser problem. Pilarna visar hur vi går över från en representation till en annan. Talet sju kan visas med sju klossar, sju stenar eller med sju ritade bilar. Det kan sägas som ett tal i räkneramsan och det kan skrivas med symbolen 7.

Vi uppfattar matematikhändelser i vardagssituationer, i laborationer med objekt, i ritade bilder, i språkliga resonemang, med symboler i t ex uttryck och ekvationer. Fördjupad förståelse innebär att vi erövrar alltfler uttrycksformer och översättningar mellan dessa. Elevers bilder, resonemang och dokumentation kan riktas mot och utvecklas till matematikspråk. Ordning eller progression mellan representationer varierar med elevers ålder, begrepp och sammanhang. Forskning i matematikdidaktik visar betydelsen av att innebörd i en representation av ett begrepp, en idé eller ett problem är tydlig för eleven. Övergångar mellan representationer bör lyftas fram för reflektion och diskussion (Emanuelsson, 1995).

Lärare kan inspirera till reflektion, inleda samtal, ställa frågor som direkt riktar elevers uppmärksamhet på tänkande och utveckling av uttrycksformer. Vi kan be om förklaringar, uppmuntra till gissningar och hypoteser, utmana elever med varierade förutsättningar och villkor. Det kan vara att leta efter mönster och likheter eller fundera över om en idé alltid stämmer, i alla sammanhang eller vad som skiljer ut en händelse från en annan.

Den inledande artikeln i detta kapitel tar upp förståelse för *Likhetstecknets innebörd*, som både i forskning och beprövad erfarenhet anses mycket viktig för att utveckla aritmetisk och algebraisk förståelse. Liv Sissel Grønmo tar upp norska erfarenheter av diagnoser och utvecklingsprojekt kring operationer och prealgebra. Liv föreslår också aktiviteter för att utveckla insikter kring konventioner och prioriteringsregler.

Att studera hur växter blir allt större intresserar de flesta barn. I artikeln *Tillväxt* beskriver och reflekterar Ola Helenius över de samband och förändringar med anknytning till matematik som Hedda tar del av och avbildar i diagram, när hon odlar olika växter.

En spännande aktivitet med utvecklingsmöjligheter presenterar Barbara Clarke i *Rika tärningar.* Här ges möjligheter till generalisering av tänkande och upptäckter med 2, 3, 4, ... *n* stycken tärningar. Elever kan pröva olika sätt att uttrycka hur många prickar som är gömda i ett tärningstorn.

De senaste decennierna har vi sett hur matematiskt tänkande och räknande utvecklas tidigt. Barn upptäcker mönster och samband, när vi ger dem möjligheter att göra jämförelser och pröva relationer. Konkret arbete med material får vi följa i *Barns algebraiska tänkande.* Frances Curcio & Sydney Schwartz berättar om proportionella samband och byte av talenhet samt andra viktiga aspekter av algebraiskt tänkande från arbete med barn.

Johan Häggström beskriver i *Algebra utan symboler* vikten av att tidigt arbeta med statisk tolkning av likhetstecknet, att inte fastna i procedurerinriktade övningar utan att eleverna får upptäcka strukturer, mönster i tal och geometri. Johan betonar vikten av att utveckla algebraiskt tänkande innan det algebraiska symbolspråket införs.

Litteratur

Pettersson, A. (2010). *Bedömning av kunskap för lärande i matematik.* www.skolverket.se/sb/d/3276/a/18547

Emanuelsson, G. (1995). Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnaren 22*(2), 2-3.