Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen

DAGMAR NEUMAN

Utgående från den holistiska kunskapssyn som representerar fenomenologin och den fenomenografiska forskningsansatsen diskuterar jag i den här artikeln observationer redovisade i min nu drygt tjugosex år gamla avhandling, i boken *Räknefärdighetens rötter* samt i en senare studie av hur barn dividerar. Observationerna gäller dels elever som deltar i specialundervisning i matematik i grundskolan, samt elever i gymnasieskolan som anser sig lida av matematiksvårigheter [1], och dels skolnybörjare som ännu inte har undervisats i matematik. De visar

– att det som främst tycks förorsaka grava eller specifika matematiksvårigheter är att eleverna saknar talföreställningar samt förståelse för sambandet mellan de fyra räknesätten
– att sådana begrepp och föreställningar knappast utvecklas genom skolans tabellträning
– att många barn intuitivt börjar utveckla talföreställningar före skolstarten, samtidigt med att de formar konkreta representationer som blir till abstrakta föreställningar om tal.

Avslutningsvis ställer jag frågan: skulle den stora andel elever som nu lämnar grundskolan utan godkänt betyg i matematik möjligen kunna reduceras genom ett paradigmskifte inom den kultur som styr hur den grundläggande aritmetiken behandlas under de första skolåren?

En gåta dold i två motsägelsefulla upplevelser

Under min 33-åriga lärartjänst, 18 år som lärare i de tidiga skolåren och 15 år som speciallärare på grundskolans alla stadier och på gymnasieskolan, inställde sig ständigt en återkommande fråga grundad på två motsägande iakttagelser:

1. Å ena sidan märkte jag att minst en elev i varje klass fortfarande vid slutet av sitt nionde skolår saknade dels föreställningar om de tio bastalen för vårt decimalsystem, och dels insikter om hur de fyra räknesätten är relaterade till varandra.

Dagmar Neuman

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18 (2), 3–46.

2. Å andra sidan observerade jag att ett, och ofta flera, barn i varje nybörjarklass redan vid skolstarten hade format såväl föreställningar om bastalen som insikt om relationen mellan addition och subtraktion.

Den gåta, som låg gömd i dessa oförenliga observationer gjorde jag till forskningsfråga i mitt avhandlingsarbete (Neuman, 1987), där jag intervjuade 105 sjuåriga nybörjare innan de ännu hade undervisats i matematik, och sedan genomförde ett tvåårigt undervisningsexperiment med alla barn i två av de intervjuade klasserna (39 stycken). I pilotstudier hade jag tidigare intervjuat äldre grundskoleelever som deltog i specialundervisning i matematik (Eriksson & Neuman, 1981) och gymnasieelever som själva ansåg sig lida av grava matematiksvårigheter. Trovärdigheten i de slutsatser dessa studier ledde till försökte jag utforska i en undersökning av hur 72 barn i åldern 8–12 år lärde sig multiplicera och dividera (Neuman, 1999). Hur barn i interaktion med sin sociala miljö skapar de uppfattningar av tal de 105 skolnybörjarna visade sig äga i intervjustudien förstod jag först när jag senare följde och kontinuerligt noterade hur mina tre barnbarn undan för undan – i princip från ettårsåldern och fram till skolåldern – tillägnade sig aritmetisk förståelse (opublicerat). I den här artikeln sammanfattar jag och diskuterar de svar dessa studier så småningom gav på min forskningsfråga.

Teorier om kunskap och lärande i slutet av 1900-talet

Jag inleder med att redogöra för de kunskapsteorier som var aktuella när jag genomförde mitt avhandlingsarbete. Den fenomenografiska tradition jag själv representerar var då en helt ny, nästan okänd, forskningsansats. Pedagogiska undersökningar var under senare hälften av 1900-talet oftast relaterade till *behavioristiska teorier* eller till kognitiv vetenskap. När det gällde behavioristiska teorier var *Skinners förstärkningsteorier* utan konkurrens (se t ex Stukat & Bladini, 1974). Den kognitiva vetenskapen representerades däremot av två inriktningar, en knuten till *Piagets teorier* om barns kognitiva utveckling (se t ex Carpenter & Moser 1984; Fuson, 1988; Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988) och den andra till *informationsprocessteorier* om arbetsminnet som en processor där tänkandet bearbetas och undan för undan komprimeras så att kunskap kan lagras på ett alltmer lättillgängligt sätt inom långtidsminnet (se t ex Resnick & Ford, 1981). Dessa båda kognitiva traditioner brukar ses som konstruktivistiska. Det man vanligtvis betraktar som gemensamt för all slags konstruktivism är att kunskapsutveckling ses som ”uppbyggnad av mentala strukturer” (Ernest, 1996, s. 335).

En tradition inom konstruktivismen som kallar sig *radikal* reserverar sig mot denna övergripande definition. Även den radikala konstruktivismen är knuten till Piaget. Men enligt dess främste företrädare i vår tid, den nu bortgångne filosofen Ernst von Glasersfelt (1990), är dess yttersta ursprung en kunskapsteori skapad av den italienske 1700-talsfilosofen Giambattista Vico. Enligt Vicos filosofi kan vi inte med våra sinnen uppleva en värld utanför oss själva, även om vi kan ana att en sådan värld existerar, när ”vi ibland misslyckas i vårt sätt att agera och tänka” (ibid., s. 37).

Ur den radikala konstruktivismen växte så småningom en gren fram som kallade sig *social konstruktivism*. Sociala konstruktivister intresserar sig främst för hur kunskap utvecklas i interaktion mellan människor. Ett problem med den sociala konstruktivismen var, ur von Glasersfelds (1996) perspektiv, att den tenderar att ta sociala sammanhang som ontologiskt givna. Kallar man sig radikal konstruktivist, menade han, ser man *den andre* och hela den sociala kontexten som det egna jagets konstruktion, existerande enbart inom detta jags upplevda värld (ibid.).

Även om radikalkonstruktivismen drar tydliga gränser runt sin skolbildning, delar den i ett avseende sin syn på kunskapens tillblivelse såväl med övriga kognitiva traditioner, som med behaviorismen. Lärande ses alltid som en *uppbyggande* process, där små kunskapsbitar förenas till större helheter. En vattendelare mellan behavioristisk och kognitiv forskning är däremot synen på vad som ska studeras. Inom behaviorismen studerar man människans *yttre beteende*, till exempel hur många frågor en elev kan besvara korrekt i ett test, medan man inom den kognitiva vetenskapen har ambitionen att studera människans *medvetande*: tankeprocesser och nivåer i tänkandets utveckling. Informationsprocessteoretikerna Resnick och Ford (1981) förklarar exempelvis att de vill veta ”vad som pågår i barns huvuden” (s. 34) och de radikala konstruktivisterna Steffe, Cobb och von Glasersfeld (1988) talar om barn som ”perceptuella” eller ”abstrakta räknare”, beroende på vilken kognitiv utvecklingsnivå de anses ha nått (s. 4).

Inom behaviorismens vokabulär existerar inte ordet medvetande. Det blev den fackpsykologiska eliten i Leningrad yrvaket medveten om 1924, när den 26-årige totalt okände, och ännu icke disputerade psykologen Lev Vygotskij i ett brilliant anförande kraftfullt betonade något för dessa vetenskapsmän så kontroversiellt som att vetenskaplig psykologi inte kan ignorera mänskligt medvetande (Bråten, 1988; Vygotsky, 1980; Wertsch, 1985). Vygotskij kom så småningom att företräda den kulturhistoriska eller sociokulturella tradition, som runt sekelskiftet snabbt började vinna insteg i västeuropeisk psykologi och pedagogik. Hans filosofi handlade om relationen mellan kultur och medvetande och den enhet han valde för sin analys av denna relation var *mening, meningen i de ord vi använder*. Ordens kontinuerligt förändrade mening speglade enligt Vygotskij vår egen och vår kulturs ständigt förändrade medvetande om världen. Sitt mest kända verk *Tänkande och språk* avslutar han med orden: ”Medvetandet avspeglar sig i ordet, så som solen i en liten vattendroppe” (Vygotskij, 1999, s. 474).

Som vi kommer att se i nästa kapitel skiljer sig de forskningstraditioner jag har beskrivit här avsevärt från den nya och litet trevande, men i mitt tycke spännande, fenomenografiska ansatsen som jag valde att utgå ifrån i mitt eget arbete. Den tradition som i vissa avseenden kan sägas stå närmare fenomenografin än de övriga är Vygotskijs kulturhistoriska tankar om hur de ständigt förändrade meningarna i våra ord avspeglar vår ideligen förändrade uppfattning av världen och dess ting. Vygotskij kände väl till den kunskapsfilosofi som företräddes av Edmund Husserl, grundaren till den filosofi fenomenografin utgår ifrån.[2]

Husserls fråga: hur är kunskap möjlig?

Hur är kunskap möjlig? var den fråga som vid början av det förra seklet ledde matematikern Edmund Husserl in på den filosofiska banan. ”Hur kan det som finns där ute komma in i vårt medvetande”, undrade han, när han lade grunden till den filosofi vi kallar fenomenologi (Husserl, 1989, s. 41). Ungefär tre kvarts sekel senare föreslog professor Ference Marton vid Göteborgs universitet att fenomenologin skulle tas till utgångspunkt för den pedagogiska forskning som där bedrevs av den så kallade INOM-gruppen[3], och att ordet *fenomenografi* skulle bli beteckning för den nya forskningsinriktningen (Marton, 1981). Fenomenologi betyder *läran om fenomenen* och fenomenografi *beskrivning av fenomenen*. Ett fenomen är helt enkelt ett objekt så som det framträder för oss. Det vill säga så som vi upplever det. Fenomenografiska undersökningar handlar oftast om hur vi upplever abstrakta ting, till exempel demokrati, religion eller lärande, eller om hur begrepp inom olika skolämnen uppfattas av elever på skilda skolstadier, eller av vuxna i olika åldrar och inom skilda yrkesgrupper (Marton & Booth, 2000).

Ference Marton erbjöd sig att bli handledare för min avhandling och introducerade mig i den fenomenologiska filosofi som fenomenografisk forskning utgår ifrån. ”Fenomenologins intresse är inte den färdiggjorda världen” (Husserl, 1970, s. 177). Den studerar inte hur ett ting rent objektivt *är* utan hur det ständigt *håller på att bli* och hur det framträder inom det mänskliga medvetandet på olika nivåer av sin tillblivelse. Ting, föremål, objekt eller saker är ord Husserl definierar som ett ”något överhuvudtaget”, som allmänna föremålsbegrepp, oumbärliga för vetenskapens språk (Husserl, 2004). Han använder dem således även för abstrakta begrepp, som aritmetik eller geometri, och jag kommer fortsättningsvis att bruka dem på samma sätt.

Även fenomenografin undersöker människors sätt att uppleva tingen som process, inte som produkt. För att utforska hur ett ting framträder i varierande form för olika människor under denna process intervjuar forskaren en viss grupp människor om hur de upplever objektet för undersökningen. Sedan skrivs de ljud- eller videoinspelade intervjuerna ut och intervjusvaren granskas för att slutligen placeras i cirka ett halvdussin olika svarskategorier. Innan ett svar tillförs en viss kategori analyseras det noggrant, så att varje kategori tydligt kan särskiljas från varje annan. En ny svarskategori formas, när någon väsentlig del eller detalj av objektet framträder, som inte har gett sig till känna i de tidigare kategorierna. Är undersökningen tillräckligt omfattande formar kategoribeskrivningarna en utvecklingsmodell, där objektet alltid finns med som det *vad* modellen skildrar, men där de senare kategorierna av svar avslöjar detta vad på ett tydligare sätt än de tidigare. Hela objektet framstår nämligen i ny dager varje gång en ny aspekt har tillkommit.

De senare kategorierna i modellen avslöjar således tinget i mer ”färdigt” – eller, som Husserl brukade säga mer ”giltighetsmättat” – skick (Husserl, 1989, s. 54). En uppfattning kan aldrig vara ”rätt” eller ”fel”. Men den kan vara mer eller mindre giltighetsmättad i meningen befinna sig mer eller mindre långt ifrån de definitioner av objektet som senast har uttalats inom vetenskapen. Eller kanske – åtminstone som tänkbar möjlighet – passera dessa. Ibland kan också några svar forma parallella kategorier, som visar på en alternativ utveckling eller i olyckliga fall på en återvändsgränd (Neuman, 1987).

Till skillnad från studier genomförda inom kognitiva vetenskaper av olika slag handlar fenomenologiska studier således inte om *mental utveckling* och har inte människan eller hennes medvetande som forskningsobjekt. De handlar om hur ett specifikt objekt, till exempel *aritmetiken*, framträder för oss på varierande sätt, i Husserls undersökningar från urtid till nutid. Forskningsobjektet i exemplet är alltså aritmetiken, inte det mänskliga medvetandet. Eller kanske mer korrekt: det är *den ständigt förändrade relationen mellan aritmetiken och vårt medvetande om aritmetiken*. Fenomenografiska undersökningar har samma inriktning men begränsar sig vanligen till mindre omfattande studier.

Den fenomenologiska kunskapsfilosofin är *holistisk*. Den ser kunskapande som en process inom vilken ett från början vagt, men ändå i sin helhet uppfattat objekt, undan för undan differentieras, så att dess delar allt tydligare framträder och blir lättare att särskilja. Den skiljer sig alltså från en atomistisk kunskapsfilosofi inom vilken kunskapande ses som en *uppbyggande* process, där en från början okänd helhet efter hand sammanfogas av många mindre delar. Även i detta avseende är således den fenomenologiska kunskapsfilosofin totalt åtskild från de behavioristiska och kognitiva vetenskapernas epistemologi. Kunskapande är naturligtvis aldrig enbart en differentierande process. Men den som utgår från en holistisk kunskapssyn, ser de uppbyggande, syntetiska dragen i kunskapandet inbegripna inom ett överordnat analytiskt, ständigt pågående blottläggande av det objekt som undersökningen handlar om.

I vårt mest ursprungliga möte med ett objekt är ju detta något för oss ännu okänt. Vi förmår då inte lägga märke till det på ett fullt medvetet sätt, utan ser det snarare som underlag för något vi förväntar oss att så småningom stifta närmare bekantskap med. Men likafullt blir allt till från detta tidigt uppfattade underlag, som sedan avslöjar nya sidor varje gång det visar sig på nytt, säger Husserl (1973). Så länge vi fortsätter att intressera oss för ett objekt upplever vi det kontinuerligt i alltmer fullkomnat, men aldrig i fullbordat skick. "Principiellt kvarstår alltid en horisont av bestämbar obestämdhet" (Husserl, 2004, s. 140–141).

För små barn börjar det objekt vi kallar aritmetik framträda i form av ord de hör oss vuxna uttala. Ord som gång efter annan uppträder tillsammans med andra speciella ord och som ibland tillsammans med dessa ingår i en ramsa, till vilken rörelser av ett eller annat slag utförs. Barns strävan är att förstå och lära sig använda vuxnas ord på ett korrekt sätt. Men räkneorden är, som den engelske 1700-talsekonomen Adam Smith uttrycker det, några av de mest abstrakta termer människan kan finna uttryck för (Smith, refererad i Struik, 1966). Visserligen känner ofta tvååringar, då och då redan ettåringar, till några räkneord, och ibland också en liten del av räkneramsan.[4] Men inte förrän i slutet av treårsåldern börjar de någorlunda förstå räkneordens innebörd och hur de ska använda dem för att räkna efter hur många det finns av någonting (Wynn, 1992; Brissiaud, 1992).[5] Enligt internationell forskning, och även i överensstämmelse med vad jag själv har märkt som lärare och forskare, kan det emellertid för en del barn ta fem–sex år eller mer innan de förstår detta på ett sådant sätt att de kan följa undervisningen i addition och subtraktion när de börjar skolan (Hughes, 1986; Munn, 1997).

Inom fenomenologi och fenomenografi *utgår* man inte från tidigare existerande teorier eller från resultat erhållna inom andra forskningstraditioner. Däremot kan frågor som kvarstår från tidigare forskning undersökas med utgångspunkt från ett fenomenologiskt perspektiv. Det kan således ändå finnas skäl att inledningsvis diskutera resultat från annan forskning inom området. Att beskriva resultat olika forskningstraditioner har framlagt, och frågor de inte har kunnat besvara, är emellertid omöjligt utan att gå in på respektive traditions epistemologi och metodologi. Då utrymmet i denna artikel inte medger en sådan utförlig och rättvisande redogörelse, har jag här istället valt att senare i artikeln göra en jämförelse på mer övergripande nivå.

Subtraktion – det viktigaste av de fyra räknesätten

Utgår man från en holistisk syn på kunskap och en analytisk syn på kunskapande, kan subtraktion betraktas som det mest ursprungliga av aritmetikens fyra räknesätt. I subtraktion granskar man en från början otydligt framträdande helhet, i avsikt att urskilja dess lika eller olika delar och studera hur delarna är relaterade till varandra och till helheten. Även i division utgår man från en helhet, men då från en som enbart delas upp i lika delar. För elever handlar subtraktion och division alltså om att starta med helheten och att söka delarna. Addition och multiplikation däremot, handlar om att starta med delarna och att söka helheten. Där fogas två eller flera tal samman och blir till delar i en från början okänd helhet.

Att låta barn upptäcka hur de tio bastalen i vårt decimalsystem kan delas upp i lika eller olika delar, när man subtraherar, borde näst efter den allra viktigaste av de tidiga målsättningarna – att hjälpa dem förstå räkningens och räkneordens innebörd – vara det primära målet för de första skolårens aritmetikundervisning. Många elever tycker emellertid att subtraktion är ett svårare räknesätt än addition, vilket gör att man ibland väntar med att presentera det tills additionen är införd (Starkey & Gelman, 1982). Leif Hellström (1985) berättar exempelvis hur ett barn i årskurs 2, som får i uppgift att skriftligt besvara frågan ”vad är roligast och vad är tråkigast med matten”, skrev: ”Roligast att det finns plus, tråkigast att det finns minus” (Hellström, 1985, förord). I det här kapitlet försöker jag reda ut vad det kan vara som gör ”minus” så tråkigt för en del elever.

För det första kan barn uppleva problem med subtraktion, därför att de ibland uppfattar räknesättet som addition. Det gör de till exempel ofta i subtraktion av typen ”Du har 2 saker och behöver 9; hur många fattas?” (2 + _ = 9), medan de alltid upplever subtraktion av typen ”Du har 9 saker och förlorar 7, hur många är kvar?” (9 – 7 = _) som subtraktion. I de intervjuutdrag jag tar som exempel i artikeln har de refererade uppgifterna alltid varit verbalt formulerade. Men av utrymmesskäl kommer jag här fortsättningsvis oftast att presentera dem enbart med deras numeriska innehåll, t ex som 2 + _ = 9 eller 9 – 7 = _. Många barn förknippar vidare addition med framåträkning och subtraktion med bakåträkning (Carpenter & Moser, 1982; Eriksson & Neuman, 1981; Gray & Tall, 1994; Svensson & Sjöberg, 1982). Förstår de inte heller att om 9 – 7 är 2, så måste 2 + 7 vara 9, inser de knappast att de kan välja mellan att gå framåt eller bakåt när de subtraherar, och då blir det svårt att lösa de två problemen ovan. Förstår man subtraktionsuppgiften 2 + _ = 9 som addition, tvingas man nämligen att räkna upp alla ord för den okända addenden – ”tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio” – och samtidigt hålla reda på hur många de är, istället för att bara tänka 9 – 7 = 2.

När jag i min avhandlingsstudie intervjuade de 105 sjuåriga nybörjarna, löste ett par–tre barn i varje klass detta problem genom att räkna upp eller tänka på alla orden i talets okända del, men utan förståelse för att de samtidigt måste hålla reda på hur många de uppräknade orden var. Sedan svarade de helt enkelt: ”Nio fattas” (Neuman, 1987, s. 119–125; Neuman, 1989, s. 79–81). Dessa svar var i linje med den insikt barnen hade tillägnat sig, när de nyligen upptäckte räkningens mening: det sist uppräknade ordet berättar om hela det räknade antalet. Men det sista ordet – nio – är inte det rätta svaret till problemet 2 + _ = 9, där man ju inte frågar efter *hela* antalet utan efter den del av helheten som *fattas*.

Flertalet barn hade emellertid börjat inse att det sista ordet inte kan vara rätt svar på uppgiften 2 + _ = 9, men förstod ändå inte hur de skulle gå tillväga för att ta reda på exakt hur många som fattades. De uppskattade då ofta svaret till ”sex ... eller åtta ... eller kanske sju ...” (Neuman, 1987, s. 137–139; Neuman, 1989, s. 102–107). Att uppskattningarna i regel var rimliga, berodde förmodligen på att barn tidigt tycks uppleva ord längre bort i räkneordssekvensen som beteckningar för större tal, än ord som kommer tidigare. Orden ett, två, tre ser de som uttryck för *små* tal, orden fyra, fem, sex som uttryck för *mellanstora* och orden sju, åtta och nio som uttryck för *stora* tal (Siegler & Robinson, 1982). Och i uppgiften 2 + _ = 9 var det ett stort tal som fattades.

När barn har avverkat sina första två–tre skolår, har de emellertid för längesedan börjat förstå att skolan inte tolererar lättvindiga och oprecisa svar på räkneböckernas uppgifter och att uppskattningar ses som slarv. Då händer det att ett och annat barn kommer på idén att försöka *räkna de uppräknade orden*. För att lösa subtraktionsuppgiften 2 + _ = 9 måste de då räkna: ”Tre [ett], fyra [två], fem [tre], sex [fyra], sju [fem], åtta [sex], nio [sju] ” och svara sju, vilket – som de amerikanska forskarna Leslie Steffe och Paul Cobb säger – förutsätter insikt om att ”varje sekvens av räkneakter själv kan bli räknad” (Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988, s. 6). Att räkna de uppräknade orden med andra räkneord innebär emellertid att utföra en kognitivt mycket krävande *dubbelräkning*, som barns arbetsminne oftast saknar kapacitet för. Och så småningom brukar de komma underfund med att räkneorden är lättare att räkna med hjälp av fingrarna (Steffe et al., 1988). De sätter då upp ett finger för varje uppräknat ord och avläser när de kommer till det sista ordet, i detta fall ordet nio, att sju fingrar är uppsatta och att uppgiftens svar alltså måste vara ”sju”. Detta är det vanligaste sättet att dubbelräkna i subtraktionsuppgifter uppfattade som addition, ett sätt också vi vuxna slentrianmässigt använder då och då.

En förutsättning för möjligheten att dubbelräkna med hjälp av fingrarna är att man direkt, utan räkning, kan avläsa hur många fingrar som man har satt upp för att räkna orden. Det vill säga att man efter avslutad uppräkning, direkt kan se handen plus två fingrar som sju, handen plus tre som åtta och så vidare. Cirka två tredjedelar av det antal skolnybörjare jag intervjuade hade ännu inte lärt sig uppfatta så många fingrar som sju, åtta eller nio utan att först räkna dem (Neuman, 1987). De hade alltså inte förutsättningarna som krävs för dubbelräkning. Men inte heller för de övriga nybörjarna såg dubbelräkning ut att vara en metod av intresse. Ett fåtal barn försökte sig ibland på något slags dubbelräkning när de adderade, men ingen dubbelräknade i subtraktion (Neuman, 1987).

För de äldre barn däremot, som konsekvent knyter addition till framåt- och subtraktion till bakåträkning, blir dubbelräkning oftast den enda subtraktionsmetoden. De dubbelräknar framåt i additivt upplevda och bakåt i subtraktivt upplevda uppgifter, så snart den okända termen är större än tre. Bakåträkning inbegriper emellertid fler problem än kravet på dubbelräkning. Dels går sekvensen av bakåt uppräknade ord i en annan riktning, än den ord- eller fingersekvens som räknar orden och dels kan bakåträkningen ske på två olika sätt.

Ofta tänker barn fortfarande konkret när de börjar räkna bakåt. I uppgiften 9 – 7, till exempel, föreställer de sig att de har lagt upp nio saker och finner det sedan naturligt att först ta bort den sist upplagda saken, den som de då hade knutit till ordet ”nio”. Hur metoden ser ut visar ett barn som i mina intervjuer ska ta reda på hur många av nio knappar jag har gömt, när han bara kan se tre av dem. Han pekar då på en av de tre knapparna i taget och säger: ”Nian går bort ... åttan går bort ... sjuan går bort ... sex kvar”. Denna metod använde alla nybörjare som försökte räkna bakåt i min undersökning, och också alla barn i ett undervisningsexperiment med sex–sjuåringar redovisat av Steffe et al. (1988). Detta trots att inga saker var synliga i de problem dessa barn hade fått att lösa.

När de saker som ska tas bort inte går att se, måste man emellertid hålla reda på hur många orden som representerar dem är – åtminstone om de är fler än två–tre stycken. Man måste alltså dubbelräkna. I uppgiften 9 – 7 = _ ser då dubbelräkningen ut så här: nio$^{1\text{ finger}}$, åtta$^{2\text{ fingrar}}$, sju$^{3\text{ fingrar}}$, sex$^{4\text{ fingrar}}$, fem$^{5\text{ fingrar}}$, fyra$^{6\text{ fingrar}}$, tre$^{7\text{ fingrar}}$. Under denna långa bakåträkning, där ordsekvens och fingersekvens går åt olika håll, blir det emellertid i längden svårt att hålla reda på vilka ord som representerar den del av talet som tas bort och vilka som representerar den del som sedan återstår. De barn som överhuvudtaget orkar slutföra proceduren, svarar därför ofta även i detta fall med det sist uppräknade ordet: ”tre”. Men ordet *tre* anger varken hur många som har tagits bort eller hur många som är kvar. De borttagna sakerna representeras här av de sju uppsatta fingrarna, inte av det sist uttalade ordet. De saker som återstår representeras däremot av orden *två* och *ett*, vilket betyder att det bara är två saker kvar, inte tre. Jag har kallat denna metod *räkna bort* (Neuman, 1987, 1989).[6]

Metoden ”räkna bort” ser emellertid ganska snart ut att försvinna och ersättas med en metod jag kallar *räkna bakåt* (Neuman, 1987, 1989).[7] Barn som ”räknar bakåt” börjar sin dubbelräkning bakåt med ”åtta” i stället för med ”nio” i uppgiften 9 – 7 = _. I mitt arbete som speciallärare antog jag länge att logiken i deras metod var att låta varje uppräknat ord representera det antal saker som återstod, allt eftersom en i taget hade tagits bort. Men den förklaringen fick jag aldrig, när jag frågade dem. Deras förklaringar brukade vara att mamma, pappa, något syskon eller någon kamrat hade sagt att det var lättare att räkna så. Eller oftare: ”För så har Hasse [läraren] sagt att man ska göra”. Metoden kunde också, antog jag, vara en följd av att tallinjen, ibland ersatt med en linjal, ofta användes i undervisningen utan att man klargjort vad som skulle räknas: mellanrummen mellan siffrorna eller siffrorna själva. Den amerikanska forskaren Karen Fuson menar att tallinjen visserligen kan tjäna som en ”komma-till-rätt-svar teknik”, men att det är tveksamt om den hjälper barn förstå ”ta-bort” subtraktion (Fuson, 1984). Själv antar jag att metoden ”räkna bort”, till skillnad från metoden ”räkna bakåt”, åtminstone inledningsvis kan ha en viss mening för barnen, även om den inte är möjlig att utveckla till abstrakt aritmetiskt tänkande. Fuson däremot ser båda metoderna som utantillinlärda och lätt förväxlade tekniker, vilka leder till många ± ett fel (Fuson, 1984).

Efter denna genomgång är det lätt att inse varför ”minus” för många barn kan bli det ”tråkigaste” med matten. Sammanfattningsvis uppstår följande fyra svårigheter med räknesättet för barn som inte förstår att man kan välja mellan att gå framåt eller bakåt när man subtraherar:

1. Den okända termen blir ofta så stor att de inte kan uppfatta den utan dubbelräkning.

2. I dubbelräkning bakåt går den sekvens som utgörs av de uppräknade orden åt ett håll och den fingersekvens som räknar orden åt ett annat.

3. Bakåträkningen kan genomföras med två olika metoder. Barn som ”räknar bort” börjar i det valda exemplet, 9 – 7, med ordet nio och slutar med ordet tre, varvid det sist uppräknade ordet inte blir rätt svar. Barn som ”räknar bakåt” börjar däremot med ordet åtta och slutar med ordet två, varvid det sista ordet blir det rätta svaret, men utan att de förstår varför.

4. De två metoderna blandas ofta samman vilket resulterar i många ± ett fel.

Såväl svenska som internationella forskare har visat på de svårigheter med bakåträkning, som jag har tagit upp här. Att räkna bakåt kan vara en fasansfullt arbetsam process, säger till exempel den engelske forskaren Eddie Gray. ”Att iaktta ett barn som räknar bakåt på detta sätt” (när orden som ska räknas är fler än tre-fyra stycken), tillägger han, ”är en våldsam anklagelse mot de undervisningsmetoder som överser med det” (Gray, 1991, s. 572). En del forskare förmodar, liksom jag själv gör, att barn aldrig lär sig dubbelräkna bakåt innan träningen av subtraktionstabellen har påbörjats (Carpenter & Moser, 1982, Svensson & Sjöberg, 1982).

Det är förvånande och beundransvärt att redan åtta–nioåringar börjar använda en metod, som kräver så avancerad kognitiv utveckling, så mycket energi och så stor koncentration som dubbelräkning. Men lika beundransvärt som det är att de kan använda metoden, lika beklagansvärt är det att den för många har blivit en vanemässigt använd metod. Dubbelräkning använd som huvudmetod i addition och subtraktion blockerar nämligen möjligheterna att utveckla huvud- och överslagsräkning och således alla förutsättningar för vidare utveckling av aritmetiskt tänkande. Men tyvärr blir dubbelräkning den enda metod som står till buds för de elever, som inte tidigt upptäcker sambandet mellan addition och subtraktion. De hamnar därmed i en återvändsgränd, som de sällan kan ta sig ur utan professionell hjälp (Gray & Tall, 1994; Neuman, 1987).

”Grava” eller ”specifika” matematiksvårigheter

Före mitt avhandlingsarbete genomförde jag några pilotstudier, en där jag tillsammans med en kollega, Rigmor Eriksson, intervjuade 31 elever i åldern sju–tolv år som deltog i specialundervisning i matematik (Eriksson & Neuman, 1981) och dessutom några med högstadie- och gymnasieelever som själva ansåg sig lida av grava matematiksvårigheter. De hade samtliga hamnat i denna återvändsgränd. Ingen av dem hade upptäckt att man kan välja mellan framåt- och bakåträkning i subtraktion, och alla saknade förmåga att räkna i huvudet. Detta trots att flertalet av dem enligt sina lärare presterade normalt eller över normalt i andra ämnen, bland annat i språk. Jag presenterar här några utdrag ur de ljudinspelade intervjusamtal jag förde med dessa elever.

En elev i årskurs 7 funderar exempelvis länge över subtraktionsproblemet 2 + _ = 9 innan hon svarar ”sju”. Därefter fortsätter vårt samtal så här:

– Hur kom du på att det var sju? Jag såg att du tänkte en bra stund innan du visste det ...

– Jag räknade på mina fingrar

– Hur då?

– Två ... tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio ... det var sju fingrar

(Neuman, 1987, s. 30; Neuman, 1989/ 1993, s. 43)

Uppgiften 10 – 7 löser hon sedan genom att dubbelräkna bakåt från nio och svara tre (Neuman, 1987, 1989).

De gymnasieelever jag intervjuade uppvisade liknande problem. Inte heller de kunde räkna i huvudet, men tyckte vid sjutton års ålder att det var genant att räkna på fingrarna och försökte hitta alternativa sätt för att lösa de enkla intervjufrågorna. En flicka funderar exempelvis under sex sekunder över uppgiften 2 + _ = 9, innan hon svarar: ”Det måste bli sex ... .” Vi fortsätter sedan samtalet så här:

– Mmm ... kan du tala om för mig hur du kom på det?
– Två plus sex är nio
– Hur tänker du när du vet det?
– [Fem sekunders paus] Jag tänkte sex ... nej, det är de’ inte ... fem ... nej de’ e’ fel ... sju plus två ska de va’ i nian

(Neuman, 1987, s. 30–31; Neuman, 1989, s. 43)

Först ser denna elev ut att pröva sina tabellkunskaper och tror sig då minnas att två plus sex är lika med nio. Men när jag frågar hur hon kom på att det var sex som fattades, kontrollerar hon sitt svar, förmodligen genom att räkna två steg framåt från det större talet sex, varvid hon kommer till åtta. Inte förrän i sin tredje uppskattning är hon säker på att ha svarat rätt, antagligen efter att återigen tyst ha räknat två steg framåt och då kommit till nio. Hon inser inte att hon helt enkelt kan tänka 9 – 2 = 7.

En annan gymnasieelev utgår, när hon löser problemet 13 – 6 = _, från tanken att sex plus sju måste vara tretton, eftersom sex plus sex är tolv, men hejdar sig omedelbart och säger ”Nej ... de’ här e’ minus ...” (Neuman, 1987, s. 31; Neuman, 1989, s. 43).

Hon förstår inte att om 6 + 7 = 13 måste 13 – 6 vara 7 och löser till sist problemet genom att dubbelräkna sex steg bakåt med början från tolv och svara sju.

För att lära sig multiplicera krävs färdigheter i huvudräkning

Inledningsvis frågade jag i mina intervjuer med gymnasieeleverna om de kom ihåg när deras svårigheter hade uppstått. Ofta förklarade de då att matte var något de hade avskytt så långt de kunde minnas tillbaka. Men att problemen hade börjat märkas på allvar, när de trots ihärdig träning och nästan övermänskliga insatser från lärare och föräldrar, aldrig lyckades lära sig multiplikationstabellen. Deras svar på intervjufrågorna avslöjade att dessa problem inte hade orsakats av brist på vilja och ansträngning vare sig från dem själva eller från deras lärare eller föräldrar utan berodde på avsaknad av de förutsättningar som krävs för att lära sig multiplicera: förmågan att utföra upprepad addition (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985). Det vill säga, att addera samma tal upprepade gånger, till exempel *sju*, *fjorton*, *tjugoett*, *tjugoåtta*, för att ta reda på vad fyra gånger sju är. Upprepad addition är omöjlig att genomföra utan färdigheter i huvudräkning, vilket var just vad dessa elever saknade.

Upprepad addition är visserligen varken det bekvämaste eller det vanligaste sättet att multiplicera på. Men det är en ovillkorlig betingelse för möjligheten att ta sig fram till de produkter man söker, om man inte kan multiplikationstabellen. Dubbelräknar man för att addera och subtrahera, måste man nämligen trippelräkna för att multiplicera: man måste dels räkna det antal ord man gång på gång adderar och dels räkna hur många gånger man adderar dem. Det visar den sjundeklassare jag tidigare refererade till, när hon på min uppmaning försöker räkna ut vad 7 x 8 är. Efter att ha sagt ”åtta, sexton”, ser jag hur hon gång på gång så omärkligt som möjligt rör åtta fingrar medan hon viskar: ”... sjutton, arton, nitton, tjugo, tjugoen, tjugotvå, tjugotre, tjugofyra ... tjugofem, tjugosex ...” och så vidare, tills hon har kommit en bit förbi ”trettiotvå”. Då upptäcker hon att hon inte vet hur många gånger hon har räknat de åtta fingrarna, varvid hon ger upp försöket (Neuman, 1989, s. 44). Flera av de gymnasieelever jag intervjuade, och även ett par vuxna som deltog i pilotstudierna, konstaterade att det är omöjligt att ta reda på hur mycket exempelvis sju gånger åtta är, om man inte kan tabellen. Och alla uttryckte övertygelsen att ”människor med matematiksvårigheter” inte har en chans att lära sig den.

Bastalens del-helhetsmönster – aritmetikens embryo

Möjligheten att utföra upprepad addition kräver färdighet i huvudräkning och färdighet i huvudräkning förutsätter i sin tur goda föreställningar om de tio bastal som är grunden för vårt decimalsystem, uppdelade i två delar på de 25 sätt det är möjligt att dela upp dem (figur 1). Jag införde i min avhandling uttrycket ”de tio basbegreppen” eller ibland ”de 25 kombinationerna” för att tala om dessa aritmetikens grundstenar, lika nödvändiga för aritmetisk utveckling, som kunskap om bokstäver och ljud är för utveckling av läs- och skrivfärdigheter (Neuman, 1987).

En definition av att ha insikt om basbegreppen är att ha utvecklat sådana föreställningar om de tio bastalen, att man direkt kan se kombinationen 6|2|8 som 6 + 2 = 8, 2 + 6 = 8, 8 – 6 = 2 eller 8 – 2 = 6. Det vill säga föreställningar där additionens kommutativa egenskap, liksom upplevelsen av sambandet mellan addition och subtraktion, omedelbart och osökt framträder på ett självklart sätt. Längre fram i artikeln visar jag många exempel på hur sådana föreställningar blir till.

Två	Tre	Fyra	Fem	Sex	Sju	Åtta	Nio	Tio
1|1|**2**	2|1|**3**	3|1|**4**	4|1|**5**	5|1|**6**	6|1|**7**	7|1|**8**	8|1|**9**	9|1|**10**
		2|2|**4**	3|2|**5**	4|2|**6**	5|2|**7**	6|2|**8**	7|2|**9**	8|2|**10**
				3|3|**6**	4|3|**7**	5|3|**8**	6|3|**9**	7|3|**10**
						4|4|**8**	5|4|**9**	6|4|**10**
								5|5|**10**

Figur 1. *De tio bastalens 25 kombinationer*

När barn har utvecklat föreställningar om basbegreppen, äger de redskap som gör det möjligt för dem att lära sig utföra upprepad addition och därmed att lära sig multiplicera. I ett undervisningsförsök som ingick i avhandlingsprojektet, och som jag senare återkommer till, fann vi flera sätt att i konkret experimenterande låta eleverna upptäcka hur lätt det är att addera och subtrahera inom högre talområden, om man känner till de 25 kombinationerna och kan använda denna kunskap för att dela upp det adderade eller subtraherade talet vid tiotalsgränserna (Neuman, 1987, 1989). Och kan man utan behov av räkning addera och subtrahera över tiotalsgränserna, blir upprepad addition en enkel operation. Tar vi sexans tabell som exempel vet flertalet barn att 6 + 6 = 12 långt innan de börjar multiplicera. Att man kommer till arton, om man sedan adderar entalet i tolv med sex – det vill säga att 1**2** + **6** = 18 – är självklart för de barn som känner till basbegreppen och således vet att 2 + 6 = 6 + 2. Lika enkelt blir det för dessa barn att fortsätta den upprepade additionen genom att dela upp talet sex i 2 + 4 vid nästa 10-talsgränsen och tänka 18 ... 20, 24. Sedan är det bara att addera vidare på samma sätt.

Men den mest fundamentala frågan kvarstår: hur tillägnar sig barn de tio basbegreppen, det vill säga föreställningar om de tio bastalens tjugofem kombinationer? Utan att få svar på den frågan kan vi varken lära dem upprepad addition eller multiplikation. Frågan ”Hur tillägnar sig barn de tio basbegreppen?” blev därför den mest angelägna för min planerade avhandlingsstudie: *dess specifika forskningsfråga*.

Tabellträning kan hindra utveckling av talföreställningar

Ofta tycks man tro att barn utvecklar föreställningar om tal och relationer mellan tal genom tabellträning. Men skulle det vara möjligt att lära de fyra tabellernas hundratals fakta, utan förståelse för

- den kommutativa egenskapen hos addition och multiplikation
- och utan insikt om sambandet mellan addition och subtraktion respektive multiplikation och division?

En allmän uppfattning är att förståelse för dessa aritmetiska lagar så småningom på något vis utvecklas under de år tabellträningen pågår. Så är det också för många barn. Men för barn som ännu inte har märkt att sådana lagar existerar, torde tabellträningen snarare hämma än främja deras möjlighet att upptäcka dem. I tabellerna introduceras exempelvis kombinationen 7|2|**9** som fyra olika fakta; i additionstabellen presenteras $2+7$ som ett faktum, och $7+2$ som ett annat, liksom $9-7$ presenteras som ett faktum och $9-2$ som ett annat i subtraktionstabellen. Talet nio sett som kombinationen 7|2|**9**, liksom var och en av de övriga kombinationerna, lärs alltså in som fyra olika fakta, i stället för som ett enda tal uppdelat i två delar, men möjligt att presentera på många olika sätt. För det är ju inte bara på de fyra sätt som tabellerna tar upp, som var och en av de 25 kombinationerna kan visa sig. Kombinationen 7|2|**9** till exempel kan framträda på minst fyra sätt i addition och minst åtta i subtraktion (figur 2).

I addition som

2+7=_ 7+2=_ _−2=7 _−7=2

Och i subtraktion som

9−2=_ 9−7=_ 9−_=2 9−_=7 2+_=9 7+_=9 _+2=9 _+7=9

(Summan/differensen skulle naturligtvis också kunna presenteras till vänster om likhetstecknet)

*Figur 2. Olika varianter av kombinationen 7|2|**9***

De 25 del-helhetskombinationerna förekommer således i betydligt fler sammanhang än i de fyra som är möjliga att presentera i tabellform. Tyvärr får de övriga, för det aritmetiska tänkandet avsevärt mer utvecklande sammanhangen ofta nöja sig med en undanskymd bakgrundstillvaro i undervisning och läromedel, för att tabellträningen ska hinnas med.

Om tabellträning nu hindrar barn från att utveckla aritmetiska begrepp, föreställningar av tal och färdigheter i huvudräkning, hur kommer det sig då att flertalet av våra elever ändå kan räkna i huvudet? Ett svar på den frågan fann jag i intervjuerna med de sjuåriga nybörjarna.

Fingertal använda för att *se* tal eller för att *räkna* räkneord

I den litteratursökning jag genomförde i avhandlingsarbetet fann jag att man hade intresserat sig för problem rörande den inledande aritmetikundervisningen även inom andra forskningstraditioner. Målsättningen för dessa studier var emellertid oftast att komma underfund med hur elever tillägnar sig additions- och subtraktionstabellerna, och intervjufrågorna rörde därför mestadels beräkningar inom talområdet 1–20 eller 1–100. Efter 18 år som lärare för de tidiga skolåren och 15 år som speciallärare, visste jag emellertid att det alltid är möjligt att hjälpa barn tillägna sig dessa tabeller och hela den fortsatta aritmetikkursen, förutsatt att de känner till de tio basbegreppen. Jag visste också att den svåraste uppgift man ställs inför som lärare för de yngsta barnen, och som speciallärare, är att hjälpa alla barn tillägna sig dessa begrepp. Det var om detta problem min specifika forskningsfråga handlade, och i mina egna intervjufrågor begränsade jag därför talområdet till de tio bastalen.

Till min förvåning visade emellertid många nybörjare att de redan intuitivt tycktes ha tillägnat sig en del, ibland alla, basbegreppen – och därmed också insikt om additionens kommutativa egenskap. Många visade till och med att de uppfattade sambandet mellan addition och subtraktion. De hade således inget behov av dubbelräkning. Men ändå använde de sina fingrar på något sätt jag först hade svårt att förstå, men som jag efter hand fann vara genialt.

Innan jag genomförde mitt avhandlingsarbete hade jag inte märkt någon skillnad mellan hur yngre och äldre elever använde sina fingrar för att addera och subtrahera. Jag hade överhuvudtaget aldrig reflekterat över varför de använde dem, bara märkt att elever med matematiksvårigheter nästan alltid räknade på fingrarna. Som lärare för de tidiga skolåren var jag därför noga med att tillhandahålla materiel av olika slag till barn som behövde arbeta konkret, och blev förvånad när jag märkte att de ändå använde sina fingrar, så snart jag vände ryggen till.

Först i arbetet med avhandlingen upptäckte jag den avsevärda skillnaden mellan äldre elevers sätt att använda fingrarna för att utföra beräkningar och de sätt nybörjarna använde dem på. I det sammanhanget såg jag också hur svårt det var för många nybörjare att utan räkning uppfatta antalet fingrar, när jag uppmanade dem att lägga upp så många som sju, åtta eller nio stycken. Detta ledde till att jag började undra över hur elever som dubbelräknar direkt kan avgöra hur många fingrar de har satt upp, utan att avslutningsvis behöva räkna efter hur många de är. Hur vet de exempelvis att *handen plus två fingrar är sju*, *handen plus tre åtta* och så vidare? På den frågan gav mig avhandlingen inget entydigt svar. Men människor inom alla kulturer brukar ju använda fingersymboler som substitut för räkneorden, när dessa inte kan användas. Till exempel, när man talar olika språk.

Nybörjarna såg ut att vara i full gång med att forma fingersymboler av detta slag. Och jag beslöt mig för att pröva hur många och vilka sådana symboler var och en av samtliga 43 elever i två av de intervjuade nybörjarklasserna kände till (Neuman, 1987). Det visade sig då att alla direkt kunde lägga upp två, tre och fem fingrar utan att räkna. Fem var alltid handen, medan två eller tre upplagda fingrar kunde vara i princip vilka fingrar som helst. Alla elever utom en kunde också direkt lägga upp sex fingrar, oftast med förklaringen "för de' e' ett mer än fem" eller "för ja' har ju precis nyss *fyllt* sex" (Neuman, 1987, s. 185–186). Alla utom två visste att de hade tio fingrar på sina två händer. Fyra fingrar kunde däremot bara 37 av de 43 barnen direkt lägga upp, nio bara 35 barn, sju bara 33 stycken och åtta bara 11 av de 43 barnen. De som inte kunde lägga upp fler fingrar än sex utan räkning började ofta med att direkt lägga upp hela den första handen oräknad och räknade sig sedan fram till sju, åtta eller nio fingrar på den andra handen (Neuman, 1987).[8] Från och med fyra formade således nybörjarnas fingersymboler en sekvens av "fingertal": "fyra" = handen minus ett finger, "fem" = handen, "sex" = handen plus ett finger, "sju" = handen plus två fingrar och så vidare.

Som jag antydde ovan använde nybörjarna *inte* sina fingertal för dubbelräkning. De såg helt enkelt ut att forma dem för att se hur många de ting kunde vara, som representerades av ett enda räkneord. Ändå var deras fingertal exakt desamma som de dubbelräknande elevernas. I min avhandling var jag emellertid angelägen att skilja mellan nybörjarnas och de äldre elevernas sätt att använda fingrarna. Jag gick till och med så långt att jag ansåg att ordet "fingertal" inte skulle användas för de fingersymboler som brukas i dubbelräkning. Senare har jag insett att denna uppfattning var felaktig. Naturligtvis använder även de dubbelräknande eleverna fingertal. Men de använder dem på ett helt annat sätt än nybörjarna. Att använda fingertalen för dubbelräkning är, som vi nu många gånger har märkt, ett "dåligt sätt" att bruka dem på, ett sätt som inte leder vidare till utveckling av abstrakt aritmetiskt tänkande. När nybörjarna använde sina fingertal, använde de dem däremot på ett sätt som gjorde att de snart började "tänka med sina händer" och slutligen tänka abstrakt.

I addition, där helheten inte är känd, var det svårt för många nybörjare att använda fingertalen. Däremot kommer vi fortsättningsvis att märka fyra markanta skillnader mellan de sätt på vilka nybörjarna och de dubbelräknande eleverna använde sina fingertal i subtraktion.

1. Flertalet nybörjare håller ännu på att forma fingertalen.

   Dubbelräknande elever känner igen alla fingertal.

2. Nybörjare som prövar att använda fingertalen för att subtrahera försöker direkt att lägga upp ett *helt* fingertal. Även om detta till att börja med inte består av exakt det antal enheter som räkneorden hänvisar till, formar fingertalet ändå en del-helhetskombination

där antalet fingrar inom varje del utgörs av ungefär det antal som räkneorden står för. Nybörjarna förväntar sig att omedelbart se omfattningen av respektive del inom hela fingertalet. Deras angreppssätt är *holistiskt*.

Dubbelräknande elever formar alltid sina fingertal genom att sätta upp ett finger för varje uppräknat räkneord, så att fingertalet till sist anger det antal ord de har räknat upp för den okända addenden, respektive differensen. De tar förgivet att de måste *räkna* sig fram till det tal de söker. Deras angreppssätt är *atomistiskt*.

3. När nybörjarna ibland räknar, gör de det för att veta vid vilket finger det fingertal slutar, som de försöker forma.

   De dubbelräknande eleverna använder sina fingrar i syfte att räkna de räkneord som är substitut för objekten i talets okända del.

4. Nybörjarnas fingertal representerar alltid hela antalet objekt, uppdelat i två delar.

   De dubbelräknande elevernas fingertal representerar enbart antalet i den del av talet som är okänd.

Så formar barn spontant bastalens del-helhetskombinationer

För de nybörjare som inte direkt kände igen fingertalen 7, 8, 9 och 10 var det svårt att besvara intervjufrågorna där det hela talet alltid var sju, åtta, nio eller tio. Vi såg tidigare hur några av dem svarade med det sist uppräknade ordet, nio, när de försökte lösa den additivt upplevda subtraktionen 2 + _ = 9. De förstod ännu inte att problemet kunde lösas genom att subtrahera två från nio. Och de hade ingen aning om dubbelräkning. De räknade helt enkelt vidare i räkneordssekvensen från två till ”måltalet” nio.

På samma sätt svarade en del barn med det sista ordet även när de löste subtraktionen 10 – 7 = _. De försökte räkna eller tänka bakåt, men eftersom de inte dubbelräknade märkte de naturligtvis aldrig, när exakt sju ord var uppräknade och fortsatte därför till ett och ibland ända till noll innan de, precis som i framåträkningen, svarade med det sist uppräknade ordet. Som i detta fall just var ”ett” eller ”noll” eller ibland ”ingen” (Neuman, 1987, 1989). Andra barn svarade ”sex” på samma uppgift. De tycktes dela upp sekvensens tio ord i stället för att dela upp talets tio enheter: ~~10 9 8 7~~ | 6 5 4 3 2 1, så att orden tio–sju stod för den borttagna delen och orden ett–sex för den kvarvarande.

Betydligt fler barn föredrog emellertid, även i ”ta bort” subtraktion, att uppskatta svaren. Louise löser exempelvis uppgiften 10 – 7 så här:

- Då har jag fyra kvar ... eller två ... kan man inte veta ...
- Nej ... kan man inte lista ut på något sätt om det är fyra eller två du har kvar ... ?
- Kanske tre ...
- Kanske tre ... ?
- Jag tror det är två ...
- Men du kan inte alls lista ut hur ... ?
- Nä ...
- ... Skulle det inte kunna va' till exempel åtta kvar?
- Åtta kvar!?
- Varför kan det inte va' det då?
- Jo, för jag har tappat ... om man tappar så himla mycket, då tror inte jag det kunde vara så mycket [kvar] !

(Neuman, 1987, s. 137; Neuman, 1989, s. 128–129)

Louise visar inte bara att hon ser ord tidigare i sekvensen som uttryck för små tal, och ord som kommer senare för större tal. Hon illustrerar också att hon uppfattar relationen mellan talets delar och mellan delar och helhet. Om den ena delen av talet nio är så stor som sju, måste den andra delen vara liten: två, tre eller fyra. Den kan inte vara så stor som åtta. Hon visar med andra ord att hon har börjat forma en tidig och ännu vag föreställning om talet tio som en del-helhetskombination, där en av de två delarna är sju.

Som jag tidigare har antytt försöker emellertid de nybörjare som uppskattar svaren ofta ta hjälp av sina fingrar för att konkret kunna *se* det exakta antalet i sina vaga föreställningar. Hur Louises föreställning kan se ut visar Andreas konkret, när han löser samma uppgift [10 – 7 = _]. Andreas vet att han har tio fingrar och börjar med att lägga upp båda händerna knutna framför sig på bordet. Sedan säger han "tar bort sju" medan han viker ut åtta fingrar utan att räkna dem och slutligen kastar en snabb blick på de invikta fingrarna innan han svarar:

- Två ... [viker sedan in de åtta fingrarna igen]
- Få se en gång till ...
- ... Jo ... här har man tio, å så ramlar sju ut ... oj då ... det blir fyra ... [Den här gången har han vikt ut sex fingrar utan att räkna]
- Tog du bort sju? ... [Jag viker ut ett finger till åt honom]
- Ja ... så där ... det blir tre

(Neuman, 1987, s. 150; Neuman, 1989, s. 128–129)

Andreas ser direkt att han i det första fallet har två, i det andra fallet fyra och i det tredje fallet tre fingrar invikta. Att det är två och tre fingrar uppfattar han med hjälp av den förmåga vi brukar kalla subitizing[9] för att referera till snabb och exakt bedömning av små tal. Hos yngre barn har man iakttagit att gränsen för det antal som kan uppfattas via subitizing går vid tre. Men Andreas uppfattar lika säkert att han har fyra fingrar invikta, när han har vikt ut sex. Han vet nämligen att han har fem fingrar på varje hand och att fyra är ett mindre än fem. Det stora talet sju däremot ser han bara som ett "ganska stort" tal, vilket tydligen kan representeras av sex eller åtta och, med min hjälp, också av sju fingrar.

De barn som kände till något av de större fingertalen var ivriga att också lära sig känna igen de övriga och räknade sig ofta fram till dem. Det gör Sussi. Hon börjar lösa uppgiften 2 + _ = 9 genom att röra sina fingrar och räkna på ett sätt jag inte riktigt hinner uppfatta. När jag frågar vad hon har gjort, visar hon och förklarar så här:

> – Först tog jag upp fem liksom ... [Hon börjar med fem, hela handen, trots att ingenting har sagts om "fem" i uppgiften] ... sen tog jag upp två [det sjätte och sjunde fingret] ... sen tog jag upp två ... [det åttonde och nionde fingret] sen vek jag ner dom [det nionde och åttonde fingret] och räkna om så här ... [Räknar de sju fingrarna genom att låta dem beröra läpparna]
>
> (Neuman, 1987, s. 188; Neuman, 1989, s. 126–127)

Sussi känner till fingertalet nio, men formar det som 5 + 2 + 2. Förmodligen därför att hon redan anar att 5 + 2 är sju. Men sju är ett fingertal, som är svårare än nio. Och även om hon tror att det utgörs av 5 + 2 fingrar, har hon förmodligen aldrig räknat sig fram till att 5 + 2 faktiskt *är* 7. Nu gör hon det, men eftersom hon inte har någon hand ledig att räkna de sju fingrarna med, måste hon låta läpparna räkna dem. Sussi visar alltså hur hon konkret och korrekt formar del-helhetsmönstret 7|2|**9**, med den större delen, *fem plus två fingrar*, som den första delen i helheten, *fem plus fyra fingrar.*

När kombinationen 7|2|**9** presenterades som addition, 2 + 7 = _, blev uppgiften svårare. Då fanns det inte någon helhet att dela upp. Men de barn som hade börjat bekanta sig med fingertalen kunde ändå hitta metoder som gjorde det möjligt att lösa även additionsuppgifter genom att forma fingertal. Det gör Colin. Han löser uppgiften 2 + 7 = _ nästan på samma sätt som Sussi löser uppgiften 2 + _ = 9. Men till skillnad från Sussi vet han inte vilken helhet delarna 2 och 7 ska bilda, och han verkar dessutom vara ungefär lika osäker som Sussi på hur fingertalet sju ser ut. Båda barnen vet emellertid att sju är ett tal som är större än fem, handen, och att man således kan börja med att lägga upp handen och säga *fem*. Och det gör de, trots att ordet fem inte nämns i någon av uppgifterna, och trots att jag i båda uppgifterna börjar med att säga ”Du har två stycken ...”. Så här löser Colin uppgiften:

– Här har jag fem [lägger upp handen på bordet] ... och de här två ... [lägger upp tummen och pekfingret på den andra handen] ...
– Jaa ...
– Sen tar du dom ... så här [tar tag i långfingret och ringfingret]
– Jaa ...
– [Ser ut att repetera det han redan har gjort medan han mumlar något om fem och sju och rör på fingrarna] ... Jag har sju ... å’ jag tar den där [?] ...
– Jaa ...
– De’ e’ sju ... nu har jag två kvar ... om jag tar ihop dem blir de’ nio

(Neuman, 1987, s. 187)

För de nybörjare som hade räknat de större fingertalen så många gånger att de kunde lägga upp dem utan räkning, tycktes det ofta ha blivit en vana att se fingertalens största del som den *första*, knuten till den odelade handen. Så såg de fingertalen även när de besvarade intervjufrågorna. Detta trots att jag där alltid hade placerat den största termen sist, för att se hur nybörjarna skulle lösa detta problem som de äldre eleverna alltid hade löst genom att dubbelräkna. Att de skulle lösa det genom att placera om termerna, så att den största kom först, knuten till tanken på handen, och den sista blev så liten att den kunde uppfattas genom subitizing var inget jag hade kunnat föreställa mig.

När fingertalen uppfattades så behövde barnen bara lägga upp de två händerna och titta på dem. Det gör Emma. Hon löser uppgiften $2 + \_ = 9$ genom att lägga upp alla fingrarna på bordet och svara ”sju”, samtidigt som hon rör litet på ett av sina pekfingrar. När jag undrar hur hon vet att det är sju som fattas, rör hon i stället ringfingret på samma hand och säger ”Jo, för jag vet att det här är nio” (Neuman, 1987, s. 191–192; Neuman, 1989, s. 128).

David löser uppgiften $10 - 7$ på liknande sätt. Även han lägger upp sina fingrar, i detta fall tio stycken, och tittar på dem innan han direkt svarar ”tre”. När jag frågar hur han vet att det är tre kvar bara genom att titta på sina händer, säger han:

– Jaa, om jag hade tio ... det är alla fingrar ... och så tar man bort sju ... [Nu viker han samtidigt in handen plus två fingrar, när han säger ”sju”, för att visa hur han tänker]
– Du vek in dom ... ?
– Ja, så här
– Och då ...
– Blev det tre ... (Neuman, 1987, s. 190; Neuman, 1989, s. 128–129)

Niklas bryr sig inte ens om att lägga upp några fingrar. Han svarar direkt ”sex” på uppgiften 4 + _ = 10 och förklarar sedan att han *har tänkt med sina händer*. På min fråga hur han då har tänkt lägger han upp alla fingrar och visar hur han i tankarna har flyttat den ena tummen mellan händerna för att göra om 5 + 5 till 4 + 6 (Neuman, 1987, 1989).

De mest avancerade eleverna lägger varken upp sina händer eller förklarar att de har tänkt med dem. Joakim försäkrar exempelvis omedelbart att svaret till uppgiften 2 + _ = 8 är sex och säger, när jag frågar hur han kunde veta det, ”Ja, om du tar bort två, då blir de sex ... de’ e’ ja’ säker på!” (Neuman, 1987, s. 173; Neuman, 1989, s. 142).[10]

Och på frågan 10 – 7 svarade flera barn omedelbart ”tre, för jag vet att tre och sju är tio”. Om jag undrade över hur de visste det kunde de emellertid alltid ge en förklaring, till exempel av typen: ”Om dom har tagit bort sju ... sen räknar jag åtta, nio, tio” (Neuman, 1987, s. 166–167; Neuman 1989, s. 142). Den additivt upplevda subtraktionen 2 + _ = 8 löser alltså en elev genom att ta bort två från åtta och den subtraktivt upplevda, 10 – 7 = _ löser tolv genom att tänka på att tre plus sju är tio.

Kraften i det odelade femtalet

Barn som kan alla fingertal delar ogärna på den första handen när de subtraherar. Ska de subtrahera ett tal som är fem eller större knyter de oftast detta tal till den första handen så att de direkt känner igen det som ”fem-plus-någonting”. De fingrar, som utgör resten av talet blir då så få att antalet kan uppfattas genom subitizing eller som ”handen minus ett finger” – fyra. Det odelade femtalet formar därmed ett slags ”störst-förstrestriktion” för operationer inom bastalsområdet.

I figur 3, där jag har avbildat alla fingertal större än fem som romerska sifferuttryck återgivna på det sätt man tidigast skrev dem: fyra som IIII och nio som VIIII, ser man tydligt det störst-först-mönster som den odelade första handen (V) formar.

Barn som har strukturerat sina fingertal på det sättet kan inte alltid tänka framåt i additivt och bakåt i subtraktivt upplevd subtraktion. De kan exempelvis inte lösa den additivt upplevda subtraktionen 2 + _ = 9 genom att tänka framåt. När de ser den som VII II måste de tänka två steg bakåt från nio för att veta vilket tal som fattas. Likaså måste de tänka framåt från sju till nio för att lösa subtraktionsuppgiften 9 – 7 = _. Men egentligen tänker nybörjarna *varken framåt eller bakåt*. De delar helt enkelt upp talet – talet 9 i detta exempel – i del-helhetskombinationen 7|2|**9** [VII II] och löser sedan problemen genom att vika undan eller tänka bort talets kända del; uppgiften 2 + _ = 9 ser de alltså som VII ~~II~~ och uppgiften 9 – 7 = _ som ~~VII~~ II.

Figur 3. *De fem sista fingertalens del-helhetskombinationer skrivna med romerska siffror (Neuman, 1989, s. 134)*

Vi vuxna undrar kanske över hur det kommer sig att sjuåringar kan förstå addition och subtraktion som motsatta operationer eller motsatta sätt att kombinera tal. Men nybörjarnas sätt att subtrahera har inget att göra med en så avancerad förståelse. De *opererar för det första inte med talen*; de ser helt enkelt på dem. Och de *kombinerar inte tal på olika sätt*. De *ser* dem alltid, konkret eller i sina tankar, kombinerade på *samma* sätt, med talets största del knuten till den första odelade handen: femtalet [V]. Kombinationen 7|2|**9**, till exempel, ser de som VII II, oavsett vilken av de tolv varianterna i figur 2 man har valt att presentera den på.

Nybörjarnas uppfattning av sambandet mellan addition och subtraktion grundas således inte på reflekterad förståelse för aritmetikens lagar. Den är helt enkelt en följd av kraften i det odelade femtalet som gör dessa lagar *synliga*, och möjliga att gripa intuitivt, långt innan de har berörts i formell undervisning.

En framkomlig väg – att *se* i stället för att *räkna*

Det sensationella i nybörjarstudien var att det i de olika barnens svar gick att ana en utvecklingsprocess från konkret seende till abstrakt tänkande. För de flesta nybörjare såg processen ut att ha kommit igång långt före skolstarten, men hos några tycktes den knappast ens ha börjat då. Alla barn visste visserligen hur man *gör* när man räknar, men alla förstod inte *varför* man räknar; det vill säga att man räknar för att ta reda på ”hur många”. De visade på olika sätt att de varken tycktes ha uppfattat räkneordens innebörd eller räkningens mening; till exempel att ett–till–ett korrespondens måste råda mellan räkneord och räknade objekt och att det sist uppräknade ordet berättar om hela det räknade antalet.

En flicka, Titti, kunde till exempel räkna upp nio knappar. Jag hade bett henne ge mig dem, därför att vi skulle leka en lek. I leken skulle hon – efter det att jag hade gömt de nio knapparna i två askar – gissa fem gånger hur många jag hade gömt i varje ask. Titti visste alltså hur man *gör* när man räknar. Men i sina gissningar visade hon tydligt att hon varken förstod *varför* man räknar eller vad räkneorden betydde. Hon gissade först att det var fem i den ena asken och sex i den andra, och sedan att det var sju i den ena och åtta i den andra. Jag frågade då om hon kom ihåg hur många de knappar var som hon hade lagt upp, och som jag sedan hade gömt i askarna. Det hade hon glömt. Men jag påminde henne, och talade om att hon kunde titta på siffran på kortet om hon glömde bort det igen. De två askarna stod på ett kort där jag hade skrivit en nia, och jag hade tidigare konstaterat att Titti kände igen siffran 9. Sedan fortsatte vår dialog så här:

– Elva ... [pekar på den ena asken]
– Kan det vara elva där? [Inget svar] ... Och där då? ... Hur många kan du ha där?
– ... Nio
– Ja, nio knappar var det vi plockade fram va’?
– Ja, nio
– Och så gissade du att det var nio där?
– Ja
– Och elva där?
– Ja
– Så får du gissa två gånger till, så får jag höra ... Vad gissar du nu?
– Elva [pekar på ena asken]
– Elva där?
– Och tolv ... tolv där
– Tolv där???
– Tretton där [pekar på första asken igen] ... arton [pekar på den andra asken]
– Och arton där. Och hur många knappar var det nu som ligger i askarna ... minns du det?
– ... Nio
– Nio ... ja ... var det ... [Ingen kommentar från Titti] ... och du tror att tretton ligger där? ... [fortfarande ingen kommentar] ... ska vi titta?

Titti kunde räkna till nio, sedan kom elva, tolv, tretton, arton och därefter ingenting. Det är dessa ord hon använder i sina sista gissningar. Hon kunde inget fingertal och ingen ”dubbla”[11], och hon kunde inte säga vad som var ett mer än sju eller ett mindre än nio och inte lägga upp lika många klossar som de elva jag hade lagt upp i en rad. Hon kunde faktiskt inte besvara någon av frågorna i den cirka en timme långa intervjun.

Det är svårt att genom nybörjarintervjun exakt säga hur många procent av antalet barn i en nybörjargrupp som inte har nått längre än Titti i sin bekantskap med ämnet matematik när de börjar skolan. Projektet avsåg ju inte kvantitativa utvärderingar och bara i fyra av de sju intervjuade klasserna hade *samtliga* barn deltagit. Men grovt räknat borde vi förvänta oss att finna ungefär ett barn i varannan klass som inte har större förutsättningar än Titti att förstå den traditionella nybörjarundervisningen i matematik. Titti tillhörde en av de fyra klasser där alla barn intervjuades, och i en annan av dessa klasser fanns ett barn som såg ut att vara nästan lika obekant med aritmetiken som Titti var.

Bristerna kunde också vara av mindre allvarligt slag, men ändå nog så besvärande för en nybörjare som vill försöka förstå undervisningen i skolan. Ungefär tre barn i varje klass tycktes ännu inte uppfatta uppgifternas tal som del-helhetskombinationer, utan såg helt enkelt ut att räkna eller tänka framåt respektive bakåt på något slags diffus föreställning av räkneordssekvensen. Det var de barn som besvarade den additivt upplevda subtraktionsuppgiften $2+\_=9$ med ”nio” och den subtraktivt upplevda $10-7=\_$ med ”ett”, ”noll”, ”ingen” eller ”sex”. I sina kliniska barnintervjuer tolkar Piaget (1965) detta beteende som att barnen ännu inte kan skilja del från helhet (s 152). Så länge barn inte har lämnat föreställningen av tal som en räkneordssekvens man räknar eller tänker på framåt eller bakåt, håller de fast vid sin förmodligen rätt nyvunna insikt om att det sist uppräknade ordet är det rätta svaret.

Det stora flertalet nybörjare visade emellertid att de inte hade nöjt sig med vaga föreställningar om räkneordssekvensen; de hade låtit sina fingrar synliggöra den. Då hade den emellertid ändrat karaktär och inte bara blivit en konkret representation av en ordramsa utan en rad av varandra inkluderande fingertal. Inom fingertalraden kunde barnen se hur varje fingertal inbegrep alla de som var mindre och självt inbegreps inom de som var större; talet VI utgjorde första delen av talet VII, talet VII första delen av talet VIII och så vidare. Därmed fick fingertalen de kvaliteter en del-helhetskombination måste ha och barnen började försöka se omfattningen av delarna inom de fingertal, som intervjufrågorna handlade om. Till att börja med uppfattade de visserligen inte det exakta antalet fingrar inom varje del, men de benämnde inte längre den ena delen med det räkneord som betecknade helheten.

Andreas vet till exempel att han har tio fingrar och kan utnyttja sig av den vetskapen i uppgiften 10 – 7 = _. Däremot vet han inte exakt hur fingertalet sju ser ut. Men han vet att sju är ett ganska stort tal och delar upp fingertalet tio i en stor och en liten del, först i 8 + 2, sedan i 6 + 4 och slutligen, när jag fäller ut ett finger till åt honom, i 7 + 3. Han bekymrar sig inte särskilt mycket om att han formar fingertalet sju på tre olika sätt.

Undan för undan börjar barnen emellertid vilja veta det exakta antalet i fingertalens delar. Vi ser exempelvis hur Sussi *tror* att fingertalet sju består av handen plus två fingrar och att det förmodligen slutar ett par fingrar före det sista fingret i fingertalet nio. Men för att vara säker låter hon till sist läpparna räkna hur många de fem plus två fingrarna är. Hon räknar inte för att ta reda på hur många saker som fattas när hon har två och ska ha nio; hennes räkning har inget med addition eller subtraktion att göra. Uppgiften har hon redan löst genom att uppskatta. Anledningen till att hon slutligen *räknar* är att hon vill veta det exakta antalet fingrar i det fingertal hon tror är sju, och var detta fingertal slutar inom den rad av nio fingrar hon har satt upp. Hon tar med andra ord reda på antal och position för fingertalet sju – dess samtidiga ordningstals- och antalsinnebörd – även om hon ännu inte är medveten om att det är detta hon gör.

När Sussi först försökte lägga upp sju visste hon bara att det var ett tal som var större än fem. Att handen har fem fingrar var hon däremot så tvärsäker på att hon började med att lägga upp den oräknad och säga fem. Så säkra hade en del nybörjare redan hunnit bli på antalet inom alla fingertal. Då nöjde de sig med att titta på sina fingrar och senare med att helt enkelt tänka med sina händer. Att någon räkning skulle behövas för att addera eller subtrahera tycktes barnen aldrig hinna upptäcka innan de redan hade tillägnat sig de tio bastalens samtliga 25 kombinationer. Den struktur det odelade femtalet hade gett deras fingertal hade lärt dem att addera och subtrahera genom att *se* istället för genom att *räkna*. Rätt länge blandas emellertid uppskattningar med korrekta svar, under den period när barnen fortfarande håller på att räkna sig fram till det sista ordet i de större fingertalen. Cirka hälften av alla svar i intervjustudien var uppskattningar.

Till sist ser även föreställningarna av händer och fingrar ut att förblekna och ersättas med abstrakt tänkande, uttryckt i tvärsäkra påståenden av typen ”jag vet” eller ”det är jag säker på”. Som den kände gestaltpsykologen Heinz Werner (1948) framhåller kvarstår dock förmodligen alltid ett ”avlägset inre talschema” som ligger under de abstrakta aritmetiska operationerna (s 297).[12]

Sammanfattningsvis använde de nybörjare som kunde lösa intervjuns subtraktionsproblem följande tre modeller för att direkt *se* fingertalens del-helhetskombinationer genom utökad subitizing (se figur 3):

1. I fingertal större än fem lät de alltid den större delen börja med handen.

2. För att lösa uppgifter med tal knutna till kombinationerna 4|2|**6**, 4|3|**7** och 4|4|**8** flyttade de den första handens tumme till den andra handen. I figur 3 syns det hur exempelvis 5 + 2 kan förvandlas till 4 + 3 om man ringar in den högra linjen i V-symbolen – den som representerar den första handens tumme – tillsammans med de två ettor som står för två fingrar på den andra handen. De kunde också göra sådana konkreta femtalsövergångar genom att flytta den andra handens tumme till den första handen så att 5 + 5 = 10 blev till 6 + 4 = 10, 5 + 4 = 9 till 6 + 3 = 9 eller 5 + 3 = 8 till 6 + 2 = 8. I tanken kunde de flytta vilket finger som helst mellan talets delar för att härleda en kombination från en annan.

3. Slutligen kunde de samtidigt öka eller minska talets ena del och helheten med ett finger, så att 5 + 5 förvandlades till 5 + 4, 5 + 2 till 5 + 3 och så vidare.

De tre modellerna skulle kunna få följande namn, oavsett om fingertalen brukas konkret, som konkreta föreställningar eller i mer abstrakt tänkande:

Störst-först (modell 1)

Flytta mellan delarna (modell 2)

Öka/minska del och helhet (modell 3)

Naturligtvis kan också fler än *en* enhet flyttas mellan delarna i modell 2 och fler enheter än en läggas till eller tas bort från del och helhet i modell 3. De tre modellerna passar lika bra för addition som för subtraktion, när barn har lärt sig några fingertal; så som Colin visade när han löste uppgiften 2 + 7 = _.

Vägar som leder in i en återvändsgränd

Det är lätt att *se* samtliga talfakta inom tabellernas bastalområde genom de tre modellerna ovan. Däremot är det svårt att *räkna* sig fram till dem med hjälp av de strategier som beskrivs av Wiggo Kilborn (1985) och Bengt Johansson (2005) (enligt Sterner & Johansson, 2006) (se figur 4) och som stämmer med rapporter från olika delar av världen om hur små barn börjar addera och subtrahera (t ex Carpenter & Moser 1984; Fuson, 1988; Gray & Tall, 1994; Steffe, Cobb & von Glasersfeldt, 1988). Strategierna visar hur barn gör när de adderar och subtraherar, men avspeglar också de undervisningsmetoder som har bidragit till hur de gör. Både i USA och i Sverige, förmodligen även i andra länder, hade barnen redan undervisats i förskola och skola när intervjuerna genomfördes. I den litteraturgenomgång jag gjorde för mitt avhandlingsarbete hittade jag *ingen* beskrivning av hur barn börjar utveckla förståelse för aritmetik innan de har fått någon formell skolundervisning.

Konkreta strategier	
A1. Lägga samman	S1. Ta bort
A2. Uppräkning från början	S2. Lägga till
	S3. Jämföra
Räknestrategier	
(A2. Uppräkning från början)	
A3. Uppräkning från det första talet	S4. Nedräkning till återstoden
A4. Uppräkning från det största talet	S5. Uppräkning från delen
Tankestrategier	
A5. Härledd tabell	S6. Härledd tabell
A6. Automatiserad tabell	S7. Automatiserad tabell

Figur 4. *Strategier redovisade i Sterner & Johansson, 2006, s. 82–84*

I redovisningen av strategierna förklarar man att dubbelräkning är en förutsättning för att barn ska kunna lämna de *konkreta strategierna* och övergå till *räknestrategier* (Sterner & Johansson, 2006).[13] Denna förklaring ger omedelbart upphov till frågan ”Hur kan barn genom dubbelräkning till sist nå målet *automatiserad tabell*?” Den enda övergångsstrategi som finns angiven mellan räknestrategier och automatiserad tabell är *härledd tabell*, och hur ett härlett tabellfaktum kan se ut illustreras med följande exempel: ”Tre plus fyra är sju, då måste sju minus fyra vara tre” (ibid, s. 84). För att barn ska kunna använda denna härledning måste de dels ha tillägnat sig 3 + 4 = 7 som ett automatiserat tabellfaktum och dels uppfatta sambandet mellan addition och subtraktion. Det gjorde ingen av de elever som jag intervjuade i mina pilotstudier. Kvar att besvara står alltså frågan ”Hur tillägnar barn sig de härledda tabellfakta de måste ha tillgång till för att nå målet automatiserad tabell?” Många övriga frågor, bland annat följande tre, måste också besvaras, om listan med strategier ska kunna bli en vägvisare som osvikligt leder mot målet:

1. Hur hjälper man barn förstå att räkning är en metod vi använder för att ta reda på ”hur många?”. Och hur hjälper man dem inse att

det sista ord de räknar upp för att ta reda på ”hur många”, *ensamt* kan berätta om alla de räknade sakerna? Förståelse för räkningens och räkneordens mening krävs för att barn ska *begripa* vad de gör, när de börjar använda konkreta strategier; även om de genom givna regler och manipulationer med laborativt materiel kan komma till rätt svar i räkneboken.

2. Hur undervisar man om additionens kommutativa egenskap? Utan att ha upptäckt den är det svårt för barn att *förstå* varför de kan börja uppräkningen från det största i stället för från det första talet i strategi A4. Men även strategi A4 går att lära ut som en regel.

3. Hur hjälper man barn inse att de kan välja mellan att tänka framåt eller bakåt i subtraktion? Den insikten går inte att lära ut som en regel; men hur undervisar man om begrepp? Och kan barn nå målet automatiserad tabell utan att ha begrepp om det samband mellan addition och subtraktion som leder till att de självklart väljer den bekvämaste vägen när de subtraherar?

De *radikalkonstruktivistiska forskarna* Steffe, Cobb och von Glasersfeld (1988) redovisar en annan utvecklingsmodell. För dem är inte den inledande aritmetikundervisningens främsta mål att barn ska tillägna sig ”automatiserad tabell”, utan att de ska nå den kognitiva nivå där de kan betraktas som *abstrakta räknare*. Den nivån har de nått när de kan lösa alla typer av additions- och subtraktionsproblem genom dubbelräkning, förklarar författarna, och tillägger att barn som har nått så långt lätt kan tillägna sig additions- och subtraktionstabellerna, förutsatt att de *lägger sig vinn om att minnas* svaren på de uppgifter de arbetar med. ”Tankestrategier är inte nödvändiga för att lära sig dessa tabeller”, hävdar de (s. 250) ”ett basfaktum är ingenting annat än en förbindelse mellan en summa och en respons, inte olik de funktionella förbindelserna i Thorndikes connectionism” (s. 302–303).[14] Vilket återstår att visa!

Fingertalen – tidiga talsymboler för kultur och individ

Till min förvåning var det två barn i de två klasser där jag prövade samtliga elevers bekantskap med fingertalen, som ännu inte visste att de hade tio fingrar på sina händer. Det var emellertid en brist de lätt avhjälpte om de fann det nödvändigt. När Margareta, som ännu inte vet hur många fingrar hon har på sina två händer, får sin första intervjufråga, säger hon till exempel omedelbart ”Få se ... jag ska ta fingrarna och räkna ... dom vill de' ...” (Neuman, 1987, s. 147; Neuman, 1989, s. 110).

Ting dikterar för barn vad de måste göra, säger den tysk-amerikanske psykologen Kurt Lewin: ”en dörr kräver att öppnas och stängas, en trappa att bli sprungen uppför, en ringklocka att bli ringd" (Lewin, citerad av Vygotsky, 1980, s. 180). Och fingrarna tycktes just diktera för Margareta att hon "ska ta dem och räkna ...".

I sitt verk *Philosophie der Arithmetik* (Aritmetikens filosofi) beskriver Husserl (1891) på liknande sätt hur fingrarna en gång i folkens ungdomstid lätt måste ha "*trugat* sig på motsvarande mångfalder av objekt för efterbildning och symbolisering" (Husserl, 1891, s. 279)[15]. Och hur "fingertalen" på det sättet uppstod som de första taltecknen i åtbördsspråket. Även om det inte finns någon nedtecknad historia om hur utvecklingsprocessen började, säger han, har vi ändå tillräckligt med fakta för att "[...] på alla väsentliga punkter tillfredsställande, kunna rekonstruera den [...] genom många talnamns ursprungliga betydelse, genom vår kännedom om halvciviliserade och vilda folks sätt att räkna och framför allt genom förståelsen [...] för allmänna drag i den mänskliga naturen" (Husserl, 1891, s. 278).

Översiktligt fortsätter Husserl sedan sin filosofi om aritmetikens ursprung så här: Redan femman bjöd en första stoppunkt i räknandet. Man hade kommit till slutet av fingrarna på en hand, vilket är anledningen till att fem på många språk betyder "så många som en hand". Med hjälp av fingrarna på den andra handen kunde man sedan (i formen 5 + 1, 5 + 2, ...) räkna vidare tills tian satte en ny stoppunkt, som inte längre på samma sätt gick att överskrida. För bekvämlighets skull införde vi så småningom tio som grundtal i vårt eget räknesystem, säger han. Många folkslag höll däremot konstant fast vid grundtalet fem, vilket som fingertal utmärker en hand. Och detta ursprungliga uppfattningssätt kommer fortfarande ofta till uttryck i ord och skrift, t ex i de romerska tecknen. Avslutningsvis sammanfattar Husserl sina reflektioner med orden "Inför dessa fakta kan man lätt dra slutsatsen, att den väg vi faktiskt slog in på inte bara var ett lyckligt grepp, utan snarare en nödvändig konsekvens av fingertalens vidareutveckling" (Husserl, 1891, s. 284).

Först efter det att jag hade presenterat min avhandling råkade jag få Husserls verk om aritmetikens filosofi i min hand, så som det ursprungligen skrevs år 1891. Till min häpnad upptäckte jag då att Husserl hade använt ordet fingertal på liknande sätt som jag själv hade gjort, när jag ytterst tveksamt införde det i min avhandling. En viktig skillnad var emellertid att de fingertal Husserl berättade om var redskap formade av stenåldersmänniskor, som kände behov av att kommunicera om antal. Själv hade jag däremot använt ordet för att tala om redskap barn formar, när de vill förstå de abstrakta räkneord, som ursprungsmänniskornas fingertal nu har omvandlats till. Den kulturella och den individuella utvecklingsprocessen är inte parallell. Nybörjarnas fingrar trugade sig inte från början på konkreta mångfalder för att efterbilda dem. Tvärtom tillhöll de barnen att ta sina fingrar och räkna antalet i de diffusa mångfalder de föreställde sig, när de hörde ett räkneord. Men i båda fallen tillfredsställde fingertalen behovet av symboler som gjorde det möjligt både att uppfatta, kommunicera och tänka om antal.

Barn som lär sig räkna spontant använder inga klossar

En av de viktigaste upplysningar som nybörjarstudien gav, var att barn förmodligen inte spontant börjar utföra ett-i-taget räkning med klossar eller laborativt materiel av annat slag, innan de har fått någon undervisning i matematik.

Alla intervjustudier från västvärlden, som rapporterar hur barn räknar i förskolan och strax efter skolstarten, visar däremot att barn när de börjar addera och subtrahera räknar ett i taget framåt eller bakåt med stöd av konkret materiel i form av klossar eller räknebrickor. Alla dessa barn var emellertid vana från förskolan, och från den undervisning i skolan som pågick mellan intervjutillfällena, att använda laborativt materiel. De uppmanades till och med under intervjuerna att använda klossar när de inte visste hur de skulle lösa uppgifterna (Carpenter & Moser, 1984; T. Carpenter, personlig kommunikation juni 1985; Neuman, 1987).

Barnen i min nybörjarstudie hade aldrig använt något laborativt materiel i förskolan. I mina intervjuer med deras förskollärare förklarade dessa att de inte undervisade om läsning och matematik, eftersom de ansåg att sådana ämnen skulle överlåtas till lågstadielärarna, som hade utbildning för att undervisa inom dessa områden.[16] I nybörjarstudien fanns ändå alltid konkret materiel i form av klossar, knappar och dylikt framlagt på det bord barnen satt vid. Men ingen använde det.

Att förskolebarn uppfinner något slags egen aritmetik utan klossar eller andra typer av konkret materiel långt innan de har fått någon undervisning måste de flesta föräldrar ana, när de hör sina små barn uttala räkneord samtidigt som de ser dem manipulera på olika sätt med sina fingrar. Men vad barnen då gör med sina fingrar och hur räkneorden hör samman med fingermanipulationerna är inte lätt att förstå. ”Barn har sin egen förskolearitmetik som psykologerna måste vara blinda för att ignorera”, säger Vygotskij (1981, s. 162). ”Noggranna undersökningar pekar på att förskolearitmetiken är extremt komplex. [...] Men vi kan ändå inte ’ignorera det faktum’, att skolinlärningen aldrig börjar i ett vakuum”, understryker han (ibid., s. 162).

Nybörjarundersökningen visade att barn med hjälp av denna komplexa förskolearitmetik kan komma rätt långt i sina försök att tillägna sig bastalens kombinationer. Några nybörjare, grovt räknat ett par–tre i varje klass, hade redan börjat tänka abstrakt om dem, och nästan alla hade börjat forma dem konkret med hjälp av sina fingrar.

Å andra sidan var det ungefär ett barn i varannan 20-grupp av elever som inte ens förstod räkneordens och räkningens mening, och cirka tre barn i varje sådan grupp som inte tycktes uppfatta talen som del-helhetskombinationer, utan helt enkelt räknade framåt eller bakåt till det hela talets sista ord för att addera och subtrahera.

Minst tre barn i varje nybörjargrupp ser således ut att helt och hållet vara hänvisade till skolans undervisning för att lära sig aritmetik. Där får de emellertid inte hjälp att vidareutveckla den förskolearitmetik de åtminstone har börjat ana före skolstarten. I skolan erbjuds de i stället klossar, brickor eller liknande materiel för att lösa räkneböckernas uppgifter. Med hjälp av detta kan de oftast åstadkomma korrekta svar i sina böcker. Men det hjälper dem *inte* att spontant upptäcka några av aritmetikens lagar, och inte heller att forma konkreta representationer av tal med femstruktur, möjliga att förvandla till de tankeredskap vi behöver i huvudräkning.

Dessa barn lär sig addera och subtrahera enligt skolans metoder, det vill säga genom att *räkna*. De övriga fortsätter oftast med varierande framgång att utveckla sina fingertal och sin förmåga att *se*, och använder då räkneböckernas uppgifter till att hitta nya infallsvinklar att skärskåda talen ur. Detta skulle kunna förklara varför flertalet av våra elever så småningom lär sig att räkna i huvudet, och att multiplicera och dividera, trots att skolans undervisning snarare tycks hämma än främja utvecklingen av sådana färdigheter.

Dags för paradigmskifte?

Den 30 augusti 2011, kunde vi under rubriken *En bit av lösningen på Sveriges matteproblem* läsa i ledaren till Svenska Dagbladet att ”[...] andelen mycket svaga elever har mer än fördubblats sedan mitten av 1990-talet”.

De flesta människor klarar vardagen utan att tillämpa Pythagoras sats eller ställa upp andragradsekvationer, säger man, ”[...] men det är värre att inte kunna göra snabba överslagsberäkningar i huvudet eller förstå hur ränta på ränta fungerar”.

God matematikundervisning är enligt denna ledare mer sällsynt än man skulle önska. Eleverna får ofta sitta på egen hand och mekaniskt räkna ur läroboken, något som snarare skapar tristess än förståelse, påpekar man, men tillägger att skolverket nu föreslår en fortbildning för alla behöriga matematiklärare ”[...] där det centrala är att förändra ett arbetssätt och en kultur”. En sådan satsning beräknas visserligen kosta 1,3–2 miljarder över en femårsperiod, men detta kan bli mycket väl använda pengar, menar man.

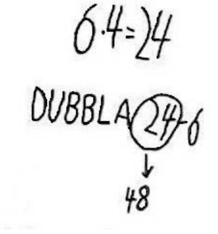
Förmågan att göra snabba överslagsberäkningar grundas på färdigheter i huvudräkning. Den kultur som behöver förändras för att eleverna ska utveckla sådana färdigheter är alltså främst den som styr arbetssättet i aritmetik under de första skolåren. Var femte niondeklassare fick underkänt i det nationella provet i matematik våren 2011. Förhoppningsvis saknar inte alla dessa elever de färdigheter i huvudräkning som ligger till grund för flexibel överslagsberäkning. Matematiken omfattar ju även andra områden än aritmetik. Men när man i ledaren från den 30 augusti skriver att antalet *mycket svaga* elever kraftigt har ökat, torde det vara just denna elevgrupp som avses. Som mycket svaga elever ser åtminstone jag enbart de som inte har några färdigheter i huvudräkning, och som därmed saknar möjlighet att utan professionell hjälp komma vidare inom ämnet.

Tabellkunskaper är inte utantillinlärda fakta

I en divisionsstudie, presenterad ett tiotal år efter min avhandling redovisade jag resultatet från 72 intervjuer genomförda med elever i årskurs 2–6 (Neuman, 1999)[17]. Det visade sig där att formell förståelse för division, på samma sätt som formell förståelse för subtraktion, bara utvecklas i samspel med informell kunskap. Och att varken multiplikation eller division lärs in genom tabellträning. Den senare slutsatsen hade då drygt ett decennium tidigare illustrerats i forskning genomförd av holländaren ter Heege (1985).

Ett av de forskningsproblem divisionsstudien avsåg att besvara var om det är möjligt för barn, som inte kan räkna i huvudet och som således saknar förmåga att utföra upprepad addition, att dividera. De flesta andraklassare men också flera av de äldre eleverna saknade denna förmåga. Andraklassarna kompenserade detta genom geniala teckningar. De äldre eleverna däremot valde ofta att uppskatta, utan möjlighet att kontrollera om deras svar var korrekta. Eller också ställde de upp de tal som förekom i en subtraktionsalgoritm de inte kunde använda, eller i en divisionsalgoritm de inte förstod. Med undantag för de andraklassare som ritade, lyckades ingen av de elever som saknade färdigheter i huvudräkning lösa något av problemen i divisionsstudien.

De övriga eleverna, däremot, fortsatte även när de lärde sig multiplicera och dividera att använda det slags färdigheter i att *se*, som de tidigt hade börjat utveckla och hade använt när de lärde sig addera och subtrahera. En uppgift som handlade om att ta reda på *hur många bullar som ska läggas i varje påse, när 42 bullar ska förpackas i 6 påsar*, löste exempelvis en tredjeklassare genom att samtidigt tänka högt och skriva så här på sitt intervjuprotokoll (se figur 5), innan han svarade ”Sju bullar”.



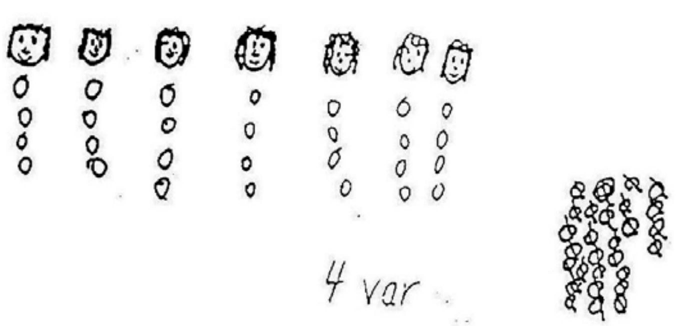
Figur 5. *42 bullar ska förpackas i 6 påsar (Neuman, 1999, s. 111)*

Han uppskattar först att det kanske går fyra bullar i varje påse, men ser att det då skulle bli många bullar över och prövar med att dubbla antalet till åtta i varje påse, varvid han märker att det skulle behövas 48 bullar. Eftersom det bara finns 42 stycken tar han i tankarna bort sex bullar, en från varje påse, så att det blir sju i varje och de 42 bullarna exakt går åt.

För att komma fram till sitt svar "4 kulor var" på uppgiften hur många kulor får varje barn, om 28 kulor ska delas lika mellan 7 barn, berättar en annan tredjeklassare att han har tänkt så här "Först tar jag sju och sju ... de' e' fjorton ... sen fjorton och fjorton ... tjugoåtta" (Neuman, 1999, s. 114).

På frågan vad han gör med de sju kulor han tar flera gånger, blir han först litet ställd. Men efter en kort diskussion förklarar han att han har delat ut en av de sju kulorna till varje barn i första rundan, en till var och en i nästa runda och så vidare.

Den första av dessa uppgifter är av typen innehållsdivision och den andra av typen delningsdivision, men barnen löste båda uppgifterna som innehållsdivision. De tycktes helt enkelt i sina tankar ordna situationen så att den gick att *se* på ett sådant sätt att uppgiften kunde lösas med den metod de fann enklast. De barn som ritade, formade ofta ett



Figur 6. *Sju barn får dela på 28 kulor (Neuman, 1999, s. 113)*

rektangelmönster, både för uppgifter av typen innehålls- och typen delningsdivision. För uppgiften med de sju barnen som skulle dela på tjugoåtta kulor ritade de till exempel sju barn och delade sedan ut en kula i taget till varje barn fyra gånger, så att teckningen till sist formade ett rektangelmönster av fyra gånger sju kulor (figur 6).

Om den kultur som styr aritmetikundervisningen ändrades från uppfattningen att barn lär sig addera, subtrahera, multiplicera och dividera genom att *räkna* och minnas, till uppfattningen att de lär sig detta genom att *se* och reflektera, skulle andelen *mycket svaga* elever inom ämnet matematik förmodligen avsevärt reduceras.

Kan undervisning grundas på forskningsresultat?

Att grunda undervisning på forskningsresultat är emellertid inte alltid så lätt. Den kända amerikanska forskaren Lauren Resnick (Resnick & Ford, 1981) beskriver hur hon vid ett tillfälle försökte, men totalt misslyckades med att undervisa om en subtraktionsstrategi hon hade märkt att barn använde, och som hon fann vara mycket effektiv (s 83). Barn som brukade den kunde nämligen välja mellan att gå framåt eller bakåt i subtraktion, beroende på vilket som var bekvämast. Resnick kallade strategin *choice*. Anledningen till att hon misslyckades i sitt försök att undervisa om strategin var att hon aldrig kunde komma underfund med hur barn själva *uppfann* den. Hon uppmanade därför forskare att noga hålla utkik efter situationer där de ser barn uppfinna den och att då uppmärksamma hur de bär sig åt. Bara om vi vet hur barn själva *gör* för att lösa problem på bättre sätt, kan vi förverkliga en undervisning som hjälper dem avancera mot högre kompetensnivåer, säger hon.

I nybörjarstudien behövde jag inte hålla utkik efter situationer där barn uppfann strategin choice. Den visade sig nämligen inte vara resultat av någon uppfinning som skedde vid ett enda tillfälle; den uppfanns i en process som uppenbarade sig på olika stadier av utveckling i varje barns intervju. Det vill säga i den process inom vilken fingertalen formades och efter hand förvandlades till tankeredskap. Både ordet strategi och termen choice var således malplacerade i sammanhanget. Barnen valde inte mellan några strategier. Valet skötte det odelade femtalet åt dem. Fast egentligen handlade inte heller detta om något val. Det handlade om en självklar placering av fingertalets två delar, så att den största delen alltid blev den första, knuten till den odelade första handen. När barnen såg alla fingertal som var fem eller större på det sättet fanns det ingen möjlighet för dem att välja någon annan väg än den bekvämaste. Detta är lätt att förstå, om man försöker lösa vilket additions- eller subtraktionsproblem som helst inom bastalområdet genom att titta på de romerska sifferkombinationerna i figur 3.

Tillsammans med två av de intervjuade klassernas lärare vågade jag efter moget övervägande ställa upp på att pröva det helt nya arbetssätt, där addition och subtraktion aldrig lärdes in genom räkning.[18] Vi organiserade en undervisning utgående från tanken att låta barnen fortsätta att utveckla den aritmetik flertalet av dem hade börjat skapa redan före skolstarten (Neuman, 1987, 1989). Det vill säga en undervisning, där vi genom olika utmaningar lät barnen upptäcka först hur man subtraherar och sedan hur man adderar genom att *se*. Alla barn, 39 stycken, lärde sig under de två år de deltog i experimentet inte bara additions- och subtraktionstabellernas talkombinationer. De lärde sig även utföra addition och subtraktion över tiotalsgränser med ett ensiffrigt och ett tvåsiffrigt tal inom hela området 1–100.[19]

Svaren var inte alltid blixtsnabba, så som vi menar att de ska vara om barn har automatiserade tabellkunskaper. Men alla barn kunde i det avslutande prov som spelades in på ljudband berätta hur de hade tänkt, när de löste uppgifterna. Ingen av dem dubbelräknade eller räknade överhuvudtaget. Och ingen använde sina fingrar eller ritade; alla hade övergått till att tänka om det de tidigare hade upplevt konkret. Ingen av de 39 eleverna behövde heller någon specialundervisning efter det att experimentet var avslutat och fram till högstadiet; de år jag hade möjlighet att på avstånd följa deras utveckling. Titti – som vi mötte när hon i gissningsleken gissade att det av de nio knappar jag hade gömt i två askar kunde finnas elva i den ena asken och tolv i den andra, tretton i den ena och arton i den andra – var vid skolstarten inskriven i särskolan. Vi önskade emellertid att ha med henne i vårt experiment, vilket vi fick tillstånd till under förutsättning att jag gav henne två timmars enskild undervisning per vecka, vid sidan av den undervisning hon fick i klassen. I den enskilda undervisningen bearbetade vi det hon hade arbetat med i klassundervisningen med särskild tyngdpunkt lagd på de mycket tidiga områden som hon, till skillnad från flertalet kamrater, inte hade förstått i nybörjarintervjun (se t ex Neuman, 1994, 1989). På min disputation fick jag ett brev från Tittis dåvarande klasslärare, som hade bifogat hennes senaste provräkning med anteckningen: ”resultatet över genomsnittet i klassen”.

Även i andra länder, till exempel i Japan, har undervisning av liknande slag prövats och visat sig framgångsrik. Undervisningen i Japan utgår visserligen inte från barns eget sätt att skapa aritmetik, men den bygger på forskning och beprövad erfarenhet av femtalets betydelse och ställer sig avvisande till tabellträning och till framåt- och bakåträkning (Hatano, 1982). Den är också, precis som undervisningen i vårt svenska försök, problemorienterad (Easley & Taylor, 1990). I problemorienterad undervisning formulerar läraren ett problem med det medvetna syftet att skapa en diskussion som slutligen ska leda fram till självklar insikt om något eleverna behöver förstå.

I vårt undervisningsexperiment började vi till exempel med att låta barnen föreställa sig att de levde i *Landet Längesen*, ett land där det varken fanns mått, mynt, räkneord eller siffror. Där ställdes de inför problem som handlade om att lista ut vilken av två personer som hade fått mest av något. Till exempel av "olja" som de behövde till sina oljelampor och som var upphälld i olikformade kärl. Eller av "guld" i olikformade stavar, som de använde till betalningsmedel. Eller av olikformade stycken av vävnad, som de behövde för att tillverka kläder. I uppgiften ingick också kravet att på något sätt ange det antal enheter som fattades för att båda personerna skulle få lika mycket. Syftet var att barnen skulle få uppleva varför det var nödvändigt för oss att skapa matematiken. Och hur det kunde ha gått till, när vi gjorde det. De tvingades uppleva att jämförelse kräver mätning och att man för att mäta först och främst måste skapa en för storheten passande enhet att mäta med och sedan symboler, som gör det möjligt att berätta om hur många dessa enheter är. Likhetstecknet infördes som ett tecken man bara får använda, när det finns lika många enheter på varje sida om det. Alltså, när båda personerna i sagan hade fått lika mycket. Symbolerna fick barnen uppfinna själva, eftersom de räkneord och siffror vi nu använder ännu inte existerade. Ibland satte de upp ett finger för varje enhet och ibland ritade de ett streck för varje. När talen blev större berättade vi att man i Landet Längesen – i stället för att exempelvis rita av alla fingrar utom ett (IIIIIIII) – brukade börja med att rita hela den första handen, V, och sedan rita streck enbart för den andra handens fingrar (VIIII). På det sättet gick antalet att uppfatta och det odelade femtalets idé befästes. De romerska siffrorna i sin antika form översatte vi så småningom till våra nuvarande siffror och räkneord. De barn som kände sig osäkra kunde emellertid, så länge de hade behov av det, fortsätta att använda de gamla uttrycken parallellt med de nya. Aritmetik och geometri introducerades således i inbördes samspel. Räkning och mätning hör enligt mina erfarenheter nära samman.

Undervisningsexperimentet avsåg inte att illustrera någon universalmetod för bättre undervisning. Det handlade överhuvudtaget inte om tillämpning av någon metod utan var ett exempel på hur en *filosofi* om kunskap kan omsättas i praktik. Låter man undervisning spegla barns sätt att spontant, i samspel med sin närmiljö, utveckla förståelse för någonting, kommer undervisningen osökt att illustrera en fenomenologisk kunskapsfilosofi omsatt i praktik. Spontan kunskapsutveckling börjar alltid med att en vagt uppfattad helhet efter hand allt tydligare avslöjar sina delar.

Ett stort utbud av varierande metoder användes i experimentet. Alla var knutna till en fenomenologsk epistemologi om kunskap som en differentierande process. Likaså brukades många typer av laborativt materiel. Alla var av det slag där ett helt tal, eller en storhet, skulle delas upp i enheter, eller i delar bestående av flera enheter.[20] Emellertid avsåg experimentet också att pröva den lokala teori som blev möjlig att forma genom intervjuundersökningen, och som antydde att:

> Ingen räkning behövs för att tillägna sig så kallade tabellkunskaper. När barn har lärt sig förstå räkneordens innebörd och räkningens mening formar de mönster som låter dem *se* tabellernas talkombinationer.

De barn som deltog i experimentet tillägnade sig tre sådana mönster.

1. För addition och subtraktion inom bastalsområdet: det mönster som figur 3 avslöjar, och som gör basbegreppens 25 kombinationer till abstrakta talföreställningar, dels genom att varje talkombination i konkret form är direkt uppfattbar genom utökad subitizing och dels genom att var och en av dem tydligt visar såväl additionens kommutativa egenskap som sambandet mellan addition och subtraktion.

2. För addition och subtraktion inom högre talområden: *ett mönster som visar hur ett bastal delas upp vid tiotalsgränserna*; tyvärr finns inget utrymme för närmare beskrivning av mönstret här. [21]

3. För multiplikation och division: det *rektangelmönster* som flera barn i divisionsstudien formade i sina teckningar (figur 6) och som tydligt visar multiplikationens kommutativa egenskap och det omvändbara förhållandet mellan multiplikation och division.

Förändring av arbetssätt och kultur

För att genomföra aritmetikundervisning med utgångspunkt från en fenomenologisk epistemologi, och från teorin om aritmetik som en förmåga att *se* – vilken var karakteristisk för vårt experiment och alltid har varit det i japansk undervisning – krävs ett *paradigmskifte* för vår del av världen. Vi måste välja bort paradigmet att *räkna* och välja paradigmet att *se*. De två paradigmen är oförenliga.

Väljer vi paradigmet att *se* måste det centrala i den ”förändring av ett arbetssätt och en kultur” som Skolverket efterlyser bli att prioritera förmågan att *se* och *tänka* istället för att fokusera på *räknefärdigheter* och *minneskunskap*. Mekanisk tabellträning, tragglande med framåt- och bakåträkning och tidsödande undervisning av algoritmer som ingen kommer att använda, skulle då falla bort. Likaså skulle rättningen av varje enskilt exempel i elevernas räkneböcker bli överflödig när det gäller aritmetikundervisningen. Den är bara nödvändig om undervisningens syfte har varit att lära dem *räkna* och *minnas*. Har det varit att lära dem *se* och *reflektera* prövar man istället varje elev genom att då och då ställa frågan: "Hur tänkte du här?" De yngsta eleverna kan då visa med sina händer och med romerska siffror hur de har sett problemens lösning, och när talen blir större kan både yngre och äldre elever berätta genom att rita.

Genom en sådan förändring av arbetssätt och kultur skulle vi få en ocean av tid som vi kunde använda till att utveckla förmåga att se mönster, problemlösningsförmåga, tankeförmåga, förmåga att använda miniräknaren på ett intelligent sätt, samt till att diskutera varför vi en gång skapade aritmetiken och hur det kan ha gått till, när vi gjorde det. Och till allt annat vi nu inte anser oss hinna med. Vi skulle med andra ord få vara med om äventyret att äntligen forma en *modern* aritmetikdidaktik. En som är anpassad till 2000-talets datoriserade värld, men som lägger huvudvikten vid att utveckla den mänskliga föreställnings- och tankeförmåga, som är förutsättningen både för en fungerande vardagsaritmetik och för vidare studier inom ämnet matematik och inom alla andra ämnen.

Referenser

Brissiaud, R. (1992). A tool for number construction: finger symbol sets. I J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (red.), *Pathways to number. Children's developing numerical abilities* (s. 41–66). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Bråten, I. (1988). *Vygotskij och pedagogiken*. Lund: Studentlitteratur.

Carpenter, T. P. & Moser, M. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (red.), *Addition and subtraction. A cognitive perspective* (s. 9–24). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The development of addition and subtraction concepts in grades one to three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (3), 179–202.

Easley, J. & Taylor, H. (1990). Conceptual splatter in peer dialogues in selected Japanese and US first grade mathematics classes. I L. P Steffe & T. Wood (red.), *Transforming children's mathematics education* (s. 216–226). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Eriksson, R. & Neuman, D. (1981). *Räknesvaga elevers matematikundervisning under de sex första skolåren* (Opublicerat manuskript). Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet.

Ernest, P. (1996). Varieties of constructivism: a framework for comparison. I L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (red.), *Theories of mathematical learning* (s. 335–350). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving decimal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3–17.

Fuson, K.(1984). More complexities in subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 15 (3), 214–225.

Glasersfeld, E. von (1996). Aspects of radical constructivism and its educational recommendations. I L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (red.), *Theories of mathematical learning* (s. 307–314). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: preferences and its consequences. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 551–574.

Gray, E. M. & Tall, D. O (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 115–141.

Hatano, G. (1982). Learning to add and subtract: a Japanese perspective. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (red.), *Addition and subtraction. A cognitive perspective* (s. 211–223). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Heege, J. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16 (4), 375–388.

Hellström, L. (1985). *Undervisningsmetodisk förändring i matematik – villkor och möjlighet* (Doktorsavhandling). Malmö: Gleerups.

Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell Publisher.

Husserl, E. (1891). *Philosophie der Arithmetik*. Leipzig: Verlags-Buchhandlung.

Husserl, E. (1970). *The crisis of European sciences and transcendental phenomenology*. Evanston: Northwestern University Press.

Husserl, E. (1973). *Experience and judgement. Investigations in genealogy and logic*. Evanston: Northwestern University Press.

Husserl, E. (1989). *Fenomenologins idé*. Göteborg: Daidalos.

Husserl, E. (2004). *Idéer till en ren fenomenologi och fenomenologisk filosofi*. Stockholm: Bokförlaget Thales.

Marton, F (1981) Phenomenography – describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, 10, 177–200.

Marton, F. & Booth S. (2000). O*m lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Munn, P. (1997). Children's beliefs about counting. I I. Thompson (red.), *Teaching and learning early number (7–19)*. Buckingham: Open University Press.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills. A phenomenographic approach* (Doktorsavhandling). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Neuman, D. (1994) Five fingers on one hand and ten on the other. A case study in learning through interaction. I J. P. da Ponte & J. F. Matos (red.), *Proceedings of the 18th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3, s. 352–359). University of Lisbon.

Neuman, D. (1999). Early learning and awareness of division: a phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 101–128.

Piaget, J. (1965). *The child's conception of number.* London: Norton & Company.

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Siegler, R. S. & Robinson, M. (1982). The development of numerical understanding. I W. R. Hayne & P. L. Lewis (red.), *Advances in child development and behavior* (vol. 16). New York: Academic Press.

Starkey, P. & Gelman, R (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (red.), *Addition and subtraction. A cognitive perspective* (s. 99–116). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. P. & Cobb, P. & E. von Glasersfeld (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Sterner, G. & Johansson, B. (2006) Addition och subtraktion: helhet-del-del. I E. Doverborg & G. Emanuelsson (red.), *Små barns matematik: erfarenheter från ett pilotprojekt med barn 1–5 år och deras lärare*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet.

Struik, D. J. (1966). *Matematikens historia*. Stockholm: Prisma.

Svensson, O. & Sjöberg, K. (1982). Solving simple subtractions during the first three school years. *Journal of experimental education*, 2, 91–100.

Werner, H. (1973). *Comparative psychology of mental development*. New York: International Universities Press.

Wertsch, J. W. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge: Harvard University press.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220–251.

Vygotskij, L. S. (1980) *Psykologi och dialektik* [Antologi: urval av Lars-Christer Hydén]. Stockholm: Norstedts och söners förlag.

Vygotskij, L. S. (1999) *Tänkande och språk* [Förord Gunilla Lindström]. Göteborg: Bokförlaget Daidalos AB.

Noter

1 Jag kommer i denna artikel för bekvämlighets skull att genomgående använda det uttryck, ”elever med matematiksvårigheter”, som användes när jag presenterade min avhandling år 1987.

2 I den engelska utgåvan av Vygotskys stora verk om tänkande och språk (*Myshlenie i rech'*) antyder redaktören Alex Kozulin att Vygotsky hade en inträngande kunskap om Husserl (Vygotsky, 1986, *Thought and Language*, s. xiv). Och i inledningen till den tyska utgåvan (Vygotsky, 1964 [1977], *Denken und Sprechen*, s. xix) skriver Thomas Luckman att Vygotskys undersökningar har många intressanta likheter med Husserls, både när det gäller innehåll och metod.

3 Uttrycket INOM var beteckning för forskning om INlärning och OMvärldsuppfattning.

4 Iakttagelser som främst grundar sig på noteringar jag har gjort i ännu opublicerade dagböcker, där jag har följt mina tre barnbarns aritmetiska utveckling under förskoletiden och början av skoltiden.

5 Wynns och Brissiauds rapporter, överensstämmer med resultaten i min avhandling och med noteringar jag har gjort om mina barnbarn.

6 Fuson har beskrivit metoden som ”metod A” (Fuson, 1984, s. 217–218).

7 Fuson har beskrivit metoden som ”metod B” (Fuson, 1984, s. 218–219). Fuson var vid den tid jag beskriver den enda som, vid sidan av mig själv, skilde mellan dessa två så avsevärt olika bakåträkningsmetoder.

8 De barn som kände till att de hade tio fingrar på båda händerna, och förstod att nio var ett mindre än tio, vek ibland in tummen för nio eftersom det gick lättare. Och ett barn formade åtta genom att först lägga upp en hand med tummen invikt och sedan räkna alla fingrar utom tummen på den andra handen

9 Ordet *subitizing* kommer från latinets subito, som betyder plötslig eller omedelbar (Resnick & Ford, 1981).

10 Av misstag har jag här ersatt nio med åtta i uppgiften $2 + \_ = 9$.

11 ”Dubbla”, ett ord lärare och barn i de tidiga skolåren ofta använder för kombinationer av två lika stora tal, t ex $2 + 2$ eller $3 + 3$.

12 Alla översättningar gjorda av mig.

13 På sidan 83, punkt 2, skriver författarna att barn visserligen söker stöd i sina fingrar när de adderar, men att det då inte direkt är ”talen de opererar med”, utan att fingrarna används för att hålla reda på stegen i räkningen;

(alltså för dubbelräkning; min kommentar). Och på sidan 84 under rubrikerna ”Nedräkning till återstoden” och ”Uppräkning från delen” skriver de att ”antalet steg hålls i huvudet eller räknas på fingrarna”,

14 Ett jämförelsevis utförligt referat av det radikalkonstruktivistiska undervisningsexperimentet har gjorts av Göta Eriksson (2004) i avhandlingen *Tidig aritmetisk kunskapsbildning – ett radikalkonstruktivistiskt perspektiv.*

15 Det avsnitt om Husserl som följer är ett sammandrag av i princip ordagrant översatta utdrag ur Husserl 1891, sidorna 278–284; samtliga översättningar gjorda av mig.

16 Nybörjarstudien genomfördes 1982, och det var då inte vanligt att man i förskolan ägnade sig åt sådant som betraktades som ”skolverksamhet”.

17 Tack till fil doktor Anita Sandahl, Linköping, för den utomordentliga skicklighet med vilken du genomförde halva antalet av dessa intervjuer.

18 Tack till Elisabet Eskils och Birgitta Wahlqvist för det mod ni visade när ni ställde upp som lärare för de två klasserna i detta projekt.

19 Resultaten redovisas i Neuman 1987 (s. 294–312) och 1989 (s. 237–240). Uppgifterna utanför bastalområdet utgjordes alltid av ett tvåsiffrigt och ett ensiffrigt tal, och krävde alltid att tiotalsgränsen passerades.

20 I Neuman, 1987 (s. 261–301) och 1989 (s. 200–236) finns många exempel på dessa metoder och materiel.

21 För den som är intresserad finns beskrivningar av detta mönster i min avhandling (Neuman, 1987, s. 294–297) och i boken *Räknefärdighetens rötter* (Neuman, 1989, s. 233–236).

Dagmar Neuman

Dagmar Neuman doktorerade vid Göteborgs universitet år 1987, avgick med pension från universitetet år 1991 och har därefter huvudsakligen ägnat sig åt fortbildning inom ämnet matematik, med inriktning mot förskollärare och lärare för de första skolåren.

dagmar.neuman@gmail.com

Abstract

Setting out from the holistic view of knowledge representing phenomenology and the phenomenographic research approach, I have in this article revisited the observations presented in my now twenty-six year old dissertation *The origin of arithmetic skills*, the Swedish book *Räknefärdighetens rötter* and a later study of how children divide. One side of the observations concerns elementary and middle school pupils who take part in special education as well as high school pupils who believe they suffer from severe math difficulties; the other concerns seven year old first year pupils without any formal education in the field of mathematics. These observations show

- that the primary cause of severe or specific math difficulties seems to be the absence of numerical representations and of the conceptual understanding of the inverse relation between addition and subtraction
- that those concepts and representations are probably not developed through the table-training usually used at school; but
- that many children intuitively begin to use those concepts or arithmetic laws before they enter school, whilst simultaneously creating numerical representations, which in due time become tools for thinking in numerical terms.

Finally, the question is posed: would a shift of paradigm within the culture now ruling the ways in which arithmetic is introduced to first year pupils possibly reduce the great number of pupils who now fail mathematics when leaving school at the end of grade nine?