

Hemmafrun som lyckades

Det finns gott om geometriska problem som är enkla att beskriva men svåra eller omöjliga att lösa. Dessa problem lockar inte bara yrkesmatematiker, utan också ett antal fritidsmatematiker som kan använda många år av sitt liv att fundera på dem. I de flesta fall blir resultatet inte mer än att de har roligt under tiden, men ibland händer det att någon hemma vid köksbordet löser ett problem som yrkesmatematikerna gått bet på. Det här är historien om ett sådant problem och den kaliforniska hemmafrun Marjorie Rice.

I slutet av november 2006 utbröt en liten epidemi av *trisektion* i Uppsala. Problemet är här att dela en godtycklig vinkel i tre lika delar med hjälp av passare och omärkt linjal. Ett pålitligt bevis för att det inte går publicerades redan 1837 men beviset är ganska komplicerat och kräver goda matematiska kunskaper för att förstås. Så, trots beviset finns det äldre herrar – för det är mest äldre herrar – som försöker lösa problemet. Med jämna mellanrum annonserar någon av dem att de lyckats. I de flesta fall räcker det med en gradskiva för att visa att lösningarna är fel, men ibland krävs det noggrannare undersökning. Matematiker brukar vara ganska trötta på att göra dessa undersökningar. Men människor som tycker det är roligt att fundera geometriskt behöver inte ge upp. Det finns fortfarande olösta problem som är enkla att förklara men där ingen ännu vet om det finns några lösningar och i så fall hur många.

Tessellering

Bitarna i ett pusselska täcka bordet utan överlapp och hål, man säger att de ska tessellera planet. Redan de gamla grekerna funderade

på vilken form bitarna kan ha för att det ska vara möjligt att lägga pusslet. En gren av tessellationsproblemet är att hitta de former som ensamma täcker planet, det vill säga där alla pusselbitar har exakt samma form. Att kvadratiska bitar fungerar kan inte ha undgått någon – det är mönstret för ett schackbräde eller en digital bild. Om man inte har regler för hur bitarna får se ut finns det hur många möjliga former som helst. Den holländske konstnären MC Escher excellerade i att hitta bitar som föreställer något, till exempel en gubbe eller ett djur (se omslaget på Nämnaren 1, 2006).

Om man begränsar bitarna till konvexa polygoner blir problemet något enklare att hantera. I en konvex polygon finns inga inbuktningar – en gummisnodd spänd runt den tappar ingenstans kontakten med kanten. Problemet Marjorie Rice gav sig på var att hitta konvexa femsidingar som tessellerar planet.

År 1918 skrev tysken Karl August Reinhardt sin avhandling vid universitetet i Frankfurt. Han visade att alla trianglar tessellerar planet, oberoende av sidlängder och vinklar. Lite mera förvånande är kanske att han bevisade samma sak för alla tetragoner (firsidingar), även de som inte är konvexa.

Han bevisade också att de konvexa hexagoner (sexsidingar) som tessellerar planet tillhör en av tre väldefinierade klasser, där vissa förhållanden mellan vinklar och sidlängder måste råda inom varje klass. Det var redan då känt sedan länge att konvexa polygoner med fler än sex sidor inte kan tessellerar planet, även om ett fullständigt bevis kom först 1978. Kvar är alltså pentagonerna (femsidingarna). Dessa hade Reinhardt problem med. Han hittade fem klasser pentagoner som tessellerar planet, klass 1–5. Reinhardt var ganska säker på att det inte fanns fler klasser, men eftersom han inte kunde bevisa det påstod han inte att listan var fullständig.

Under 35 år av sitt liv funderade den amerikanske matematikern Richard Brandon Kershner vid John Hopkins University i Baltimore, USA, på problemet och runt 1967 hittade han tre nya klasser av pentagoner som tessellerar planet, klass 6–8. Han publicerade sina resultat i en artikel i oktober 1968. Kershner påstår där att han har ett bevis för det inte finns fler än åtta klasser, men han har inte tagit med beviset i artikeln eftersom "beviset för att listan är fullständig är extremt arbetsamt och kommer att presenteras på annat ställe". Det var alltså omöjligt för andra matematiker att kontrollera beviset. Kershners stora yrkesinsats var för övrigt att konstruera det första fungerande satellitnavigeringssystemet, som var i drift 1964–1996.

Vetenskapsjournalisten Martin Gardner skrev under många år en fast kolumn med namnet "Matematiska lekar" i den populärvetenskapliga tidskriften *Scientific American*. I juli nummeret 1975 beskrev han Kershners resultat, både i ord och bild. Det var första gången de presenterades för en större publik.

Kort efter Martin Gardners artikel kom ett brev till honom från Richard James, som arbetade med datorutveckling på ett stort företag. James hade läst problemformuleringen i Gardners artikel, men valde sedan att inte titta på listan av möjliga lösningar förrän han provat själv. James var inte matematiker, men hade matematisk skolning. När han jämförde sina pentagoner med Kershners lista upptäckte han till sin förvåning att en av dem inte tillhörde någon av de kända klasserna. James hade på kort tid,

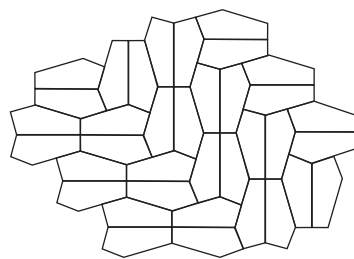
och enligt honom själv med måttlig insats, visat att listan inte var fullständig. Kershner fick en kopia av James brev och konstaterade direkt att han hade missat denna möjlighet, som nu betecknas klass 10 (klass 9 liknar klass 8, därför den till synes ologiska numreringen). Ironiskt är att Kershner hade skrivit en bok om matematik och där påpekat att matematiska bevis inte ska anses som sanna förrän de publicerats och testats av många andra matematiker. Med jämnmot accepterade Kershner att detta visat sig gälla hans eget opublicerade bevis.

Ett nytt symbolspråk

I december 1975 skrev Gardner kort om James upptäckt i sin kolumn och även om han inte direkt säger att det kan finnas fler klasser är det helt klart att så kan vara fallet. Decemberkolumnen fångade intresset hos Marjorie Rices, en hemmafru och fembarnsmamma i San Diego i Kalifornien. Hon fascinerades av mönstren och hon ville förstå dem bättre. Och hon undrade om inte också hon kunde hitta nya klasser.

Rice började med att studera de nio klasser av tessellerande pentagoner som nu var kända. För att systematisera sambanden mellan vinklar och sidlängder i pentagonerna uppfann hon en uppsättning symboler, som mest liknar hieroglyfer. Dessa symboler blev nyckeln till hennes fortsatta arbete, eftersom hon med dem kunde hantera den stora mängd kombinationer av vinklar som måste undersökas.

Under julen 1975 använde Rice all ledig tid till problemet. Hon hade sina diagram på köksbänken, men täckte snabbt över



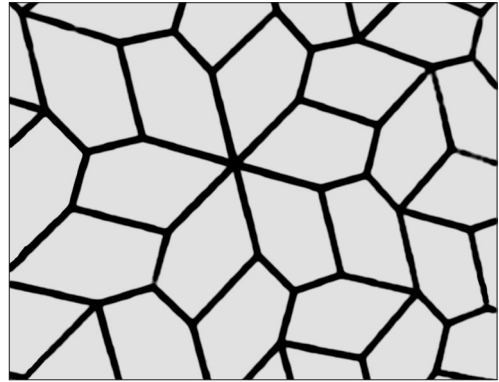
Pentagoner från klass 13, den sista av de fyra klasser Marjorie Rice upptäckte.

dem när någon kom i närheten, för att slipa förklara vad hon höll på med. I början av 1976 hittade Rice till sin stora glädje en ny klass av pentagoner som tessellerar planet. Hon skickade den till Martin Gardner, som skickade dem vidare till bland annat Kershner. Kershner insåg direkt att detta verkligen var en ny klass, klass 9.

Till att börja med blev Rices ”hieroglyfiska” symboler en svårighet i kommunikationen med yrkesmatematiker. De hade aldrig sett något liknande och insåg inte med det samma att de var ett enkelt men korrekt sätt att beteckna olika samband och att Rices skisser faktiskt var fullständiga bevis för vilka kombinationer som var möjliga och vilka som var omöjliga. Matematikern Doris Schattschneider blev den som tolkade symbolerna och först förstod hur avancerat Rices arbete var. Rice fortsatte sin genomgång av möjliga pentagoner och lagom till julen 1976 hittade hon ytterligare två nya klasser av pentagoner, klass 11 och klass 12. Jultid verkar vara hennes bästa tid för ytterligare ett år senare upptäckte hon klass 13. På två år hade hemmafrun från Kalifornien uppfunnit ett effektivt symbolsystem för geometriska resonemang och använt detta till nya resultat som skulle imponerat på yrkesmatematiker även om de kommit från en kollega.

Vem var Marjorie Rice?

Marjorie Rice föddes 1923 i St. Petersburg, Florida. Ända sedan hon var barn har Rice älskat teckning, naturens mönster, och varit intresserad av deras matematiska samband. Hennes första skola var mycket liten, klass 1–8 undervisades i samma rum. I high school studerade hon mest stenografi och maskinskrivning med tanke på framtida jobb, men hon var ledsen för att hon inte fick läsa mer matematik än den allmänna kursen. Rice slutade skolan vid 16 års ålder och började arbeta på kontor. Men samtidigt var hon flitig gäst på biblioteket för att kompensera för den utbildning hon inte fått i skolan. Hon tog också en korrespondenskurs i reklamteckning. Så småningom gifte hon sig med sin dåvarande chef, blev hemmafru och flyttade till Kalifornien. Rice är idag en gammal kvinna och hon bor hos en dotter i San Diego.



Ett mönster av Marjorie Rice som används som golv i amerikanska matematiksamfundets huvudbyggnad.

Rices länk till den matematiska världen blev alltså professor Doris Schattschneider vid Moravian College i den lilla staden Bethlehem i Pennsylvania. Schattschneider har skrivit flera artiklar om Marjorie Rice och hennes insatser. Enligt henne hade Rice alltid en bok med matematiska pussel i närheten och hon fortsatte arbetet med pentagonerna tills ganska nyligen. Hon hittade aldrig några fler nya klasser, och var ganska övertygad om att det inte fanns fler. Däremot upptäckte hon många nya fascinerande sätt att sätta ihop pentagoner från de kända klasserna. Ett mönster som Rice konstruerade 1995 pryder idag ett golv i huset i Washington där amerikanska matematik-sällskapet håller till. Det är inget dåligt erkännande av hennes insats.

Finns det fler?

Reinhardt trodde han hade hittat alla möjligheter. Kershner trodde att han hade ett bevis för att hans lista var fullständig. Även Rice var övertygad om att det inte fanns fler varianter. Men år 1985 hittade matematikern Rolf Stein från universitetet i Dortmund ytterligare en klass av pentagoner som täcker planet. Vi känner alltså nu till 14 sådana klasser. Finns det fler? Ingen vet.

Den vill försöka hitta klass 15 får en bra start på Marjorie Rices hemsida, som fortfarande finns på internet: tessellations.home.comcast.net/. Lycka till!