

# Flera lösningar på ett problem

## – *den japanska metoden*

Japanska matematiklärare organiserar ofta en hel lektion kring ett fåtal problem och med fokus på elevernas olika lösningar. Lärarna förefaller vara av den uppfattningen att eleverna ges bäst möjligheter att lära sig matematik genom att lösa utmanande problem. Varför tycker de att matematiklärande genom problemlösning är så givande? Och hur når de sina undervisningsmål med denna metod?

I den här artikeln kommer jag att ge en översikt över hur lärare i Japan undervisar i matematik med hjälp av problemlösning och även ge en bild av hur de vanligen organiserar en sådan lektion. Jag kommer också att diskutera de underliggande synsätt som de baserar sin undervisning på, speciellt på hur de låter matematiken vara svår för eleverna, hur de fokuserar på problemlösningssmetoderna och på att säga rätt saker vid rätt tillfälle. Vi ska också se på några praktiska klassrumsidéer som japanska lärare delar med sig av.

## Matematiklektionen som strukturerad problemlösning

Japanska lärare brukar, speciellt i klasser upp till nionde årskursen, organisera sina lektioner i helklass runt olika lösningar på ett fåtal problem som eleverna arbetar med. Detta sätt att arbeta är speciellt användbart när ett nytt begrepp eller en ny procedur ska introduceras i början av ett undervisningsavsnitt men fungerar väl även längre fram.

En typisk japansk matematiklektion om fyrtiofem eller femtio minuter kan delas in i olika delar, både i lärarens planering och i den faktiska undervisningsprocessen i klassrummet:

- ◇ presentera problemet
- ◇ eleverna arbetar med problemet på egen hand
- ◇ helklassdiskussion
- ◇ summering
- ◇ övningar eller utvecklingar, beroende på tid och hur väl eleverna lyckades med det ursprungliga problemet.

Lektionen börjar vanligen med att läraren presenterar ett problem på tavlan. När eleverna har läst igenom problemet avgör läraren om eleverna har förstått det. Om inte, får eleverna läsa igenom det igen, eller så ställer läraren frågor för

att ytterligare klargöra problemet. Läraren kan också be en elev redogöra för någon inledande idé om hur de skulle kunna angripa problemet eller en gissning av vad svaret skulle kunna vara. Syftet med detta inledande steg är att hjälpa eleverna att få en klar uppfattning av problemet och att förklara ord och termer.

Under lektionen avsätts en viss tid, vanligen 10–15 minuter, till att eleverna arbetar med problemet på egen hand. Om eleverna har svårt att förstå problemet kan läraren uppmuntra dem att arbeta tillsammans i par eller små grupper. Under tiden som eleverna arbetar med problemet går läraren runt i klassrummet och iakttar dem. De elever som har svårt att ta sig an problemet kan få förslag eller individuell hjälp. Läraren tittar också efter elever med goda idéer, med syfte att låta dem presentera sina idéer i en speciell ordning under den följande helklassdiskussionen. Elever som har en lösning uppmanas att se om de kan finna en alternativ lösning.

Under helklassdiskussionen lyssnar eleverna på de lösningsförslag som deras kamrater presenterar och kommer med egna förslag. Slutligen går läraren igenom och summerar lektionen. Om tiden tillåter, får eleverna en övning eller en utveckling av lektionsproblemet som behandlar det som de just har lärt sig.

## Det japanska lektionsmönstret

TIMSS videostudie var det första försöket någonsin att samla in och analysera videofilmer av lärares arbete i klassrummet. Projektet fokuserade på vad lärare gör och är en rik källa med information om vad som händer i åttondeklasser i Tyskland, Japan och USA och vad som skiljer de tre länderna åt i detta avseende. En av de tydliga kontrasterna mellan lektioner i å ena sidan Japan och å andra sidan de båda andra länderna rörde hur lektionerna var strukturerade. I Japan karaktäriserades lektionerna av *strukturerad problemlösning* medan fokus mer låg på procedurer i Tyskland och USA.

Tabell 1 visar de fem aktiviteter som kallas det *japanska mönstret*. Detta lektionsmönster [eng *lesson script*], speciellt diskussionsfasen, är beroende av de lösningsmetoder som eleverna faktiskt använder. För att detta lektionsmönster ska fungera naturligt och effektivt behöver lärarna inte bara ha en djup förståelse av det matematiska innehållet, utan även en medvetenhet om de möjliga lösningsmetoder som eleverna kan tänkas komma att använda. Har lärarna redan före lektionen en klar uppfattning om hur eleverna förmodligen tänker kring och angriper problemet, är det lättare att veta vad de ska söka efter när de observerar hur eleverna arbetar med det.

Tabell 1. *Det japanska lektionsmönstret* (Stigler & Hiebert, 1999)

Se tillbaka på föregående lektion

Presentera dagens problem

Låt eleverna arbeta individuellt eller i grupper

Diskutera lösningsmetoder

Belys och summera de viktigaste punkterna

## Bortom mönstret

Det problematiska med att karaktärisera klassrumspraktiken i ett land eller en kultur med ett enda mönster aktualiserades av analysen i Learner's Perspective Study (LPS) (Clarke, Mesiti, O'Keefe, Jablonka, Mok & Shimizu, 2007). Forskarna menade där att japansk matematikundervisning knappast kunde beskrivas på ett adekvat sätt med hjälp av ett enda mönster av minst två skäl. För det första varierade lektionsmönstret under en undervisningsperiod beroende på lärarens syfte med de olika lektionerna. För det andra kunde de olika momenten i lektionsmönstret ha olika innebörd eller funktion under en följd av lektioner. En självklar aspekt av lärares arbete är inte bara att genomföra enstaka lektioner utan även att kunna väva ihop flera lektioner till en sammanhängande enhet som kan sträcka sig över flera dagar eller veckor. Det vore omöjligt att fånga dynamiken i undervisningsprocessen om varje lektion betraktades isolerad.

Forskarna i LPS föreslog en annan metod för internationella lektionsjämförelser där olika tänkta lektionshändelser skulle fungera som utgångspunkt för jämförelser av klassrumspraktik i olika länder. Inom LPS analyserade och undersökte man form och funktion hos olika klassrumshändelser som tex *undervisning vid bänkarna*, *elev längst fram* och *lyfta fram och summera huvudpunkterna* (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006).

Isynnerhet undersökte de lektionshändelsen *lyfta fram och summera huvudpunkterna*, eller *matome* på japanska, i "välundervisade" klassrum i Australien, Tyskland, Hongkong, Japan, Kina och USA (Shimizu, 2006). För de japanska lärarna föreföll klassrumshändelsen *matome* ha följande huvudfunktioner:

- ◇ lyfta fram och summera huvudpunkterna
- ◇ stödja elevernas reflektioner över det de har gjort
- ◇ skapa en kontext för introduktion av nya matematiska begrepp baserad på tidigare erfarenheter
- ◇ skapa samband mellan det aktuella och tidigare innehåll.

För att lärarna ska kunna upprätthålla dessa funktioner måste de ha lektionens mål väldigt klart för sig, lektionsaktiviteterna måste vara konsekventa och sammanhängande och eleverna måste vara engagerade i lärandeprocessen. Resultaten visar att detta är vad som ger den höga kvaliteten på japansk undervisning. Lärarna behöver alltså vara flexibla då de använder "lektionsmönstret" när de planerar och genomför en lektion för strukturerad problemlösning.

## Ett drama som metafor för en bra lektion

För japanska lärare hör ett flertal pedagogiska nyckeltermen samman med den ovanstående beskrivningen av strukturerad problemlösning. Termerna belyser det som japanska lärare lägger vikt vid när de planerar och genomför lektioner.

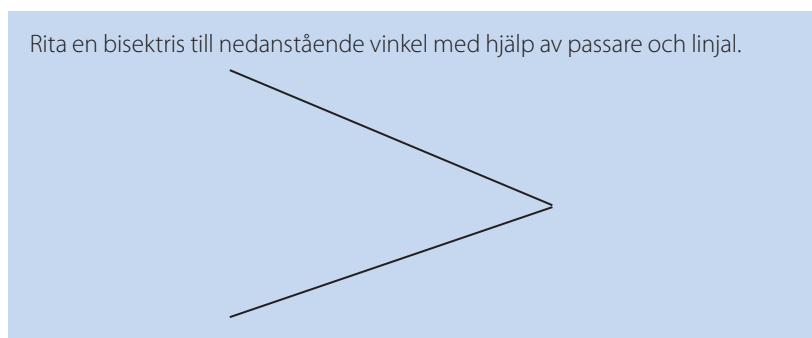
*Hatsumon* till exempel, betyder att ställa en nyckelfråga för att provocera och underlätta elevens tänkande vid en viss punkt under lektionen. Läraren kan ställa en fråga vid lektionens början för att undersöka elevernas kunskap eller för att underlätta elevernas tänkande kring en specifik aspekt av problemet. *Yamaba* betyder höjdpunkt. Japanska lärare anser att varje lektion ska ha minst en *yamaba*. Denna uppträder oftast under den gemensamma diskussionen. Tanken är att alla lektionsaktiviteter tillsammans utgör ett sammanhängande system, en lektion, som förhoppningsvis också innefattar en höjdpunkt.

Dessutom uppfattar japanska lärare ofta en lektion som ett drama, med en början och en höjdpunkt som sedan leder till en slutsats. De hänvisar ofta till *ki-sho-ten-ketsu*, en tanke, med ursprung i en kinesisk dikt, som beskriver en lektion som ett flöde som rör sig från en startpunkt (ki) mot slutpunkten, summeringen (ketsu).

Om vi använder en historia eller ett drama som en metafor för en utmärkt lektion så behöver den en höjdpunkt som är beroende av elevernas aktiva medverkan under ledning av läraren. Stigler och Perry (1988) visade hur japanska lärare lägger vikt vid själva problemlösningsprocessen och uppmanar eleverna att genomföra den med eftertanke och precision. Med tanke på att skolan är en del av det omgivande samhället kan det vara värt att titta på hur skolan passar in i samhället, och begreppet eftertanke förefaller vila på en uppsättning värderingar om vad som ska värderas och uppskattas i klassrummet. Som Lewis (1995) påpekade så är *hansei*, självkritisk reflektion, betonad och uppskattad i såväl den japanska skolan som i den japanska kulturen i stort.

Sammanfattningsvis kan man säga att de stora internationella studierna av matematiklektioner i olika länder visar, från ett lärarperspektiv, att det som karakteriserar japanska lektioner är strukturerad problemlösning med betoning på elevers olika lösningar på ett problem. Dessutom består japanska lektioner av flera, sinsemellan sammanhängande delar där eleverna medverkar i varje del och reflekterar över det de gjort. För att förstå vad japanska lärare värderar i sin undervisning kan ett drama eller en berättelse fungera som en metafor för en utmärkt lektion.

## Förbered lektion med fokus på elevers problemlösning

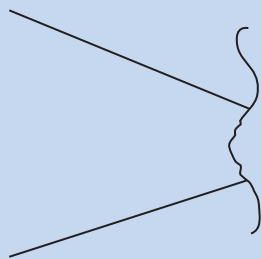


Figur 1. Det ursprungliga problemet

För att förbereda en lektion som fokuserar på elevers problemlösning måste läraren försöka att göra matematiken "problematisk" för eleverna, att fokusera på metoderna för att lösa problemen och att säga rätt saker vid rätt tillfällen. Ett exempel från årskurs 7 illustrerar detta. I problemet förväntas eleverna arbeta med att konstruera en bisektris till en given vinkel med hjälp av passare och linjal.

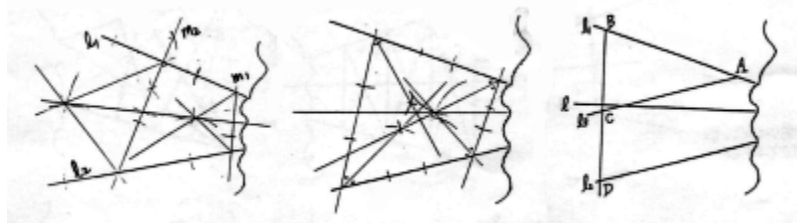
För att göra matematiken "problematisk" för eleverna måste läraren ge dem ett tankeväckande, men inte för svårt problem att lösa. När det gäller det aktuella problemet kan läraren visa bilden i figur 1 och riva av en del så att den blir som i figur 2. Problemet blir då:

När du skulle konstruera bisektrisen till vinkeln i figur 1 råkade papperet rivas av som i figur 2. Kan du ändå konstruera bisektrisen till vinkeln?



Figur 2. Det förändrade problemet

Genom att skapa en kontext på detta vis involveras eleverna i problemsituationen och kan börja fundera på den och de kan föreslå lösningsmetoder baserade på matematiska idéer som de har lärt sig tidigare. Problemet kan i denna form användas i åk 8 och 9. Figur 3a, 3b och 3c visar några lösningar från åk 9. Figur 3a och 3b visar lösningar där eleven på olika sätt använder sig av en inskriven cirkel mellan givna linjer. Eleven som har gjort lösning 3c drar en parallell linje ( $l_3$ ) för att konstruera triangeln ABC. Genom att förlänga linjen BC till punkten D på den givna linjen  $l_2$  kan vi se den stora "triangeln". Bisektrisen är vinkelrät mot BD.



Figur 3a, 3b och 3c. Elevernas olika lösningar på problemet

I den efterföljande helklassdiskussionen presenteras och diskuteras elevernas lösningar. Fokus är inte bara att presentera alternativa lösningar utan att reflektera över dem och titta på likheter och skillnader mellan metoderna ur en matematisk synvinkel. Det finns många idéer som kan användas för att lösa problemet och dessa klassificeras i strukturerade grupper. Genom diskussionen ges eleverna möjlighet att förstå att nyckeln till lösningarna är att få den "saknade vinkeln" att synas på pappret igen. Innan lektionen genomförs behöver läraren tänka igenom de aspekter som beskrevs tidigare. Det är viktigt att lärare under hela processen med att planera och genomföra en lektion noggrant analyserar det matematiska innehållet i relation till målen för lektionen. Denna analys omfattar de matematiska sambanden, både inom det aktuella innehållet och i relation till tidigare och kommande innehåll, hur elever förväntas angripa de framlagda problemen och hur aktiviteterna kan beakta detta.

## Några praktiska idéer från japanska lärare

Lärare som jag har arbetat med under flera år har kommit med många råd angående det japanska sättet att undervisa i matematik (Shimizu, 2003). Bland alla dessa är fem särskilt relevanta för framställningen i denna artikel.

### *Förslag 1: Sätt etiketter på elevernas metoder*

Under helklassdiskussion om elevernas lösningar märks varje metod med namnet på den som ursprungligen presenterade metoden. Därefter används dessa benämningar på metoderna i diskussionen. Denna praktiska teknik kan tyckas vara trivial, men det är viktigt att erkänna elevernas "upphovsrätt" till de presenterade metoderna och den gör helklassdiskussionen mer spännande och intressant för dem.

### *Förslag 2: Använd tavlan effektivt*

En annan viktig teknik för japanska lärare gäller användningen av tavlan. Vikten understryks av att detta har en egen term: *bansho* [eng *board writing*]. När det är möjligt skriver lärarna det som behandlas under lektionen på tavlan utan att radera. Genom att inte radera något av det eleverna har gjort och att placera det på tavlan på ett logiskt, organiserat sätt, är det mycket lättare att jämföra flera lösningsmetoder. Dessutom kan tavlan utnyttjas till skriftliga anteckningar under hela lektionen, vilket ger både elever och lärare en överblick av vad som behandlats under lektionen.

### *Förslag 3: Använd helklassdiskussion till att utveckla elevernas idéer*

Det japanska ordet *neriage* används för att beskriva den dynamiska och samverkande karaktären av en helklassdiskussion i en lektion. Detta ord, som kan översättas som "putsas upp" [eng *polishing up*] fungerar som en metafor för processen där elevernas idéer finslipas till en enhetlig och samordnad matematisk helhet genom en dynamisk helklassdiskussion. Japanska lärare betraktar *neriage* som helt avgörande för hela lektionens framgång.

### *Förslag 4: Var noggrann med problemens kontext*

Karaktären hos de problem som presenteras för eleverna är mycket viktig. I synnerhet är problemens sammanhang eller kontext avgörande för elevernas engagemang och delaktighet. Även de tal som ingår i problemen är noga utvalda för att möjliggöra en stor variation av elevsvar. Noggrann formulering av problemen är en förutsättning för att få många olika svar och lösningar från eleverna.

### *Förslag 5: Sträva efter många olika lösningsmetoder*

Vad mer bör läraren göra för att främja ett brett utbud av elevsvar? Om eleverna endast finner ett fåtal lösningsmetoder bör läraren vara förberedd. Det är viktigt att läraren på olika sätt kan uppmuntra eleverna att hitta alternativa lösningsmetoder utöver sina ursprungliga tillvägagångssätt.

## Avslutande kommentarer

Den japanska metoden att undervisa om matematik via problemlösning består vanligtvis av att en hel lektion behandlar ett eller två problem där fokus ligger på den efterföljande diskussionen om de olika lösningsmetoder som genereras av eleverna. Elevernas egna idéer införlivas i processen där flera lösningsmetoder

på problemet diskuteras. I detta tillvägagångssätt är problemlösning ett nödvändigt verktyg för undervisningen i matematik. Tillvägagångssättet används inte bara vid speciella tillfällen eller en gång per vecka. Snarare är det den standard som tillämpas för undervisning av *all* matematik.

För att lektionerna ska lyckas måste lärare förstå sambandet väl mellan den matematik som ska läras ut och elevers tänkande om de problem som används. Att försöka förutse elevernas svar på problemen är den mest avgörande komponenten när en lektion planeras enligt den japanska metoden att undervisa i matematik genom problemlösning.

## LITTERATUR

- Becker, J.P., Silver, E.A., Kantowski, M.G., Travers, K.J. & Wilson, J.W. (1990). Some observations of mathematics teaching in Japanese elementary and junior high schools. *Arithmetic Teacher*, 38, 12–21.
- Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E. & Mok, I.A.C. (Eds.) (2006). *Making connections: comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Clarke, D., Mesiti, C., O’Keefe, C., Jablonka, E., Mok, I.A.C. & Shimizu, Y. (2007). Addressing the challenge of legitimate international comparisons of classroom practice. *International Journal of Educational Research*, 46, 280–293.
- Lewis, C. (1995). *Educating hearts and minds: reflections on Japanese preschool and elementary education*. New York: Cambridge University Press.
- Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on teachers’ role. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(1), 107–116.
- Shimizu, Y. (2003) Problem solving as a vehicle for teaching mathematics: a Japanese perspective. In F.K. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades Pre K–6* (pp. 205–214). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Shimizu, Y. (2006) How do you conclude today’s lesson? The form and functions of “Matome” in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. A. C. M. (Eds.), *Making connections: comparing mathematics classrooms around the world* (pp. 127–145). Rotterdam: Sense Publishers.
- Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world’s teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.
- Stigler, J. W., & Perry, M. (1988) Cross cultural studies of mathematics teaching and learning: recent findings and new directions. In D.A. Grouws & T. J. Cooney (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (pp. 194–223). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates & Reston: National Council of Teachers of Mathematics.