

Uttrycksformer

I matematikundervisningen är elevernas begreppsutveckling i fokus. Det innebär att eleverna måste få tillgång till matematikens uttrycksformer för att kunna kommunicera i, med och om matematik.

Eftersom varje begrepp är en tankekonstruktion behöver de någon form av "etiketter" för att vi ska kunna kommunicera med och om dem. Vi måste därför representera begreppet med hjälp av olika uttrycksformer som tex laborativa material, ord, bilder, omvärldssituationer och symboler.

I Lgr 11 används benämningen "uttrycksformer" men i kommentarmaterialet förekommer både "uttrycksformer" och "representationsformer" samt vid något enstaka tillfälle även "representationer". I gymnasiets läroplan, Lgy 11, finns "uttrycksformer" en gång i den gemensamma syftestexten för matematikämnet, medan benämningen "representationer" förekommer under rubrikerna Centralt innehåll och Kunskapskrav.

Diskussioner förs bland matematikdidaktiker huruvida benämningarna uttrycksformer och representationer är synonyma eller om de står för olika företeelser. Man kan å ena sidan uppfatta dem som synonyma på det sätt som de förekommer i Lgr 11 och i Lgy 11, å andra sidan kan de uppfattas som tudelade och ges skilda innebörder. Även i det senare fallet finns lite olika tolkningar varav en är att representationen står för något, tex ett matematiskt begrepp, medan uttrycksformen anger formen, dvs hur matematiken kommuniceras. Ett konkret exempel på detta är när en person ritar flera olika trianglar som alla får representera begreppet triangel, men där uttrycksformen i samtliga fall är en bild.

I Nämnarenartikeln *Matematiska uttrycksformer och representationer* menar författarna att de båda orden ofta får stå för samma sak, men i artikeln tas de upp och förklaras separat. Liksom i det tidigare exemplet hör uttrycksformen samman med i vilka former som representationer uttrycks, men i artikeln för de även in med vilka medier som detta sker. Exempel ges på hur bildlig representation kan uttryckas med hjälp av en graf på papper, med grafitande räknare, på interaktiv skrivtavla etc. Artikeln sammanfattas med att representationer och uttrycksformer går naturligt in i varandra och att det många gånger är enklast att tänka på dem som *ett* begrepp med både innehåll och form. Artikelförfattarna anser att oavsett synsätt så är det väsentliga att representationer och uttrycksformer är till för att vi ska få möjlighet att tänka på, använda och kommunicera matematiska begrepp på olika sätt.

Representationer

Representationer ersätter något och står i stället för något annat. Själva ordet representation kommer av det latinska *repraesentatio* som betyder "åskådliggörande framställning eller exempel". En viktig egenskap hos en representation är att den gör det representerade indirekt närvarande för användaren. (Nationalencyklopedin)

I den engelskspråkiga litteraturen refererar termen representation till både process och produkt. "... in other words, to the act of capturing a mathematical concept or relationship in some form and to the form itself." (Standards, s 67).

Olikheter i synsätt kan också uppfattas som att kurs- och ämnesplaner är texter som är öppna för tolkningar. Det kan ses som ett tecken på att vi, inom matematikutbildning i stort, inte har någon tillräckligt entydig terminologi eller vedertaget språkbruk och att det är en ständigt pågående process att fylla orden med mening.

Förstå och använda olika uttrycksformer

Lärande i matematik kan beskrivas som en kumulativ process där man stegvis får tillgång till allt fler och mer avancerade uttrycksformer. Att kunna uttrycka sig på flera sätt är ett tecken på god begreppsförståelse. "Den som kan använda flera olika sätt att beskriva samma begrepp har en rikare begreppsbild och därmed en mer funktionell begreppskunskap", konstateras i *Algebra för alla*.

För att få stöd i sin begreppsutveckling behöver eleverna ges möjlighet att möta ett och samma matematiska begrepp med hjälp av flera olika uttrycksformer. Begreppet kan därigenom bli mer konkret, tillgängligt för reflektion, hjälpa eleverna att få överblick och att strukturera sitt tänkande. Därför räcker det inte att enbart räkna med siffror och bokstäver i en lärobok utan eleverna måste också få arbeta med flera olika uttrycksformer som att

- arbeta laborativt eller undersökande med konkret material, "penna och papper" eller digitala hjälpmedel
- med ord (vardagsord och matematiska termer) tala och skriva matematik
- använda bildspråk, med allt ifrån elevers egna informella skisser till professionellt framtagna illustrationer

- exemplifiera med hjälp av verkliga och påhittade situationer i både närmiljö och omvärld
- beskriva sina tankegångar med hjälp av för kunskapsnivån lämpligt matematiskt symbolspråk.

Uppdelningen på fem uttrycksformer har omarbetats utifrån Richard Leshs klassiska schematiska bild över representationer och deras kopplingar till varandra.

Vi har valt att sätta rubriken *Ord* på en av uttrycksformerna där både informellt vardagsspråk och formella matematiska termer inkluderas. Både *Ord* och *Symboler* kan förekomma i såväl tal som skrift.

Man kan också välja andra sätt att dela upp i uttrycksformer, som exempelvis i fysisk, bildlig eller grafisk, verbal, numerisk och symbolisk.

Interna och externa representationer

I kunskapsöversikten *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* refereras till forskarna Gerald Goldin och Nina Shteingold som delar upp representationer i två kategorier:

- *interna representationer* är elevens eget vardagliga språk, visuella bilder, informella figurer och symboler etc
- *externa representationer* utgår från matematikens konventionella symbolspråk som tex sättet att notera i positionssystem, formell algebraisk notation eller hur tallinje och koordinatsystem används.

Samspelet mellan interna och externa representationer ses som fundamentalt för effektivt matematiklärande. Eleverna ska först få möjlighet att utveckla ändamålsenliga interna representationer som de sedan ansluter till de externa representationerna. Goldin och Shteingold anser att många elevers begränsningar för att förstå matematik ibland kan bero på att deras inre system av representationer bara är delvis utvecklat och på så sätt kan medföra hinder, svårigheter och missuppfattningar. Genom att öka fokus på interaktionen mellan interna och externa representationer finns det möjlighet att fler elever lyckas med skolmatematiken. I praktiken, menar de, innebär detta att matematiska idéer introduceras genom att undervisningen

börjar i det konkreta och sedan går vidare till allt mer abstrakta representationer.

Översätta och välja mellan uttrycksformer

Elever behöver utveckla sin förmåga att översätta och välja mellan olika uttrycksformer. Det innebär förståelse för uttrycksformernas inbördes förhållande, att ha kännedom om deras styrkor och svagheter samt att kunna välja lämplig uttrycksform beroende på situation och syfte.

När elever aktivt engageras i att uppfatta sambanden mellan olika uttrycksformer, stärker det den matematiska förståelsen av begreppet, men det är inte givet att eleven på egen hand kan översätta mellan olika uttrycksformer som tex mellan laborativa aktiviteter och matematiska symboler. Genom att se på vilka sätt som eleven representerar ett aktuellt begrepp kan läraren få värdefull inblick i elevens tänkande. Detta ger stöd för läraren att, där så behövs, bygga broar mellan elevens informella uttrycksformer och sådana som är alltmer matematiskt formella.