

---

NCM-RAPPORT 2002:1

# Läroarutbildning

## – utbud, utbildare och anordnare

BARBRO GREVHOLM

NATIONELLT CENTRUM FÖR MATEMATIKUTBILDNING

---

Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, är ett nationellt resurscentrum som på uppdrag av regeringen inrättats vid Göteborgs universitet. I samverkan med Chalmers tekniska högskola skall NCM stödja utvecklingen av svensk matematikutbildning i förskola, skola och vuxenutbildning. NCM ger ut tidskriften Nämnaren.

För mer information om NCM och Nämnaren, se <http://ncm.gu.se>

ISSN 1650-335X

NCM  
Göteborgs universitet  
Vera Sandbergs allé 5A  
412 96 Göteborg

© NCM och författaren, 2002

Omslag och layout:  
Andersson & Andersson, Lerum

Tryck:  
Grafikerna Livréna i Kungälv AB

---

# Innehållsförteckning

Sammanfattning.....	1
Inledning.....	5
Grundutbildning av lärare.....	7
Studenternas förkunskaper.....	7
Lärarstuderandes och lärarutbildares erfarenheter av matematikutbildningen.....	10
Vilken utbildning i matematik och matematikdidaktik får de studenter som utbildar sig till lärare?.....	12
Rekrytering och genomströmning – hur ser situationen ut?.....	17
Hur ser rekryteringsituationen hösten 2001?.....	18
Vilken utbildning har lärarutbildarna?.....	21
Vilken utbildning har lärarutbildarna?.....	21
Hur ser rekryteringsituationen ut?.....	22
Vilket behov av kompetensutveckling finns bland högskolans lärarutbildare?.....	23
Utbildningsanordnare för kompetensutveckling.....	25
Universitet och högskolor – utbud, former och bild av matematikämnet.....	25
Hur framstår ämnet matematik i informationsmaterial och kurskataloger?.....	26
Ordinarie kursutbud och centra för kompetensutveckling vid universitet och högskolor.....	28
Varför bör universitet och högskolor vara anordnare av kompetensutveckling?.....	29
Andra kursanordnare.....	29
Vem ska påverka utformningen av kompetensutvecklingen?.....	30
Betydelsen av resurser och tid.....	30
Kan vi lära något av internationell forskning när det gäller kompetensutveckling?.....	31
Exemplariska kursplaner och litteraturlistor.....	32
Referenser.....	33
<i>Bilaga 1: 1–7-lärarutbildningen i matematik. Exempel på organisation och utformning.....</i>	<i>35</i>
<i>Bilaga 2: 4–9-lärarutbildningen i matematik. Exempel på organisation och utformning.....</i>	<i>37</i>
<i>Bilaga 3: Kurser vid universitet och högskolor som tydligt vänder sig till lärare.....</i>	<i>39</i>
<i>Bilaga 4: Enkät till lärarutbildare i matematik.....</i>	<i>43</i>
<i>Bilaga 5: Forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning..</i>	<i>45</i>

---

<i>Bilaga 6</i> : Vad är matematik? – Citat ur några kataloger från universitet och högskolor.....	49
<i>Bilaga 7</i> : Att undervisa i den nya gymnasiala kursen matematik diskret .....	53
<i>Bilaga 8</i> : Vad är matematik och vilken är dess relevans för nutidsmänniskan? <i>Per Anders Ivert</i> .....	57
<i>Bilaga 9</i> : Exempel på kursplan i matematikdidaktik .....	65
Rapporter från Nationellt Centrum för Matematikutbildning .....	69

---

# Läroarutbildning

## – utbud, utbildare och anordnare

BARBRO GREVHOLM

### Sammanfattning

Läroarutbildningen i Sverige är mitt uppe i en stor förändring. Intensivt utvecklingsarbete pågår vid landets universitet och högskolor för det nya som startat hösten 2001. Samtidigt planeras en större satsning på kompetensutveckling av matematiklärare. Inför en sådan satsning är det viktigt att beskriva utgångsläget. Vilken utbildning har sedan tidigare de som ska få kompetensutveckling och vilka behov kan de tänkas ha för framtiden? Vilka möjligheter att möta dessa behov finns det? Hur ser utbudet av kurser ut för läroarutbildning och kompetensutveckling i matematik och vilka kursanordnare finns det? Vilka resurser av olika slag finns tillgängliga? I denna rapport ges mot bakgrund av dessa frågor en bild av utbudet av läroarutbildning, av utbildarna och anordnarna och av några viktiga frågor och områden som berör utbildningen. Studien gäller läget läsåret 2000/2001.

Problemen kring studenternas förkunskaper analyseras inledningsvis. Kraven på förkunskaper i matematik höjdes vid läroarutbildningsreformen 1988 eftersom forskning visat att bla lärare för de tidigare åren hade alltför bristfälliga kunskaper inom sådant som de själva skulle undervisa om. Trots denna skärpning kommer nya larmrapporter om studenters bristfälliga kunskaper i matematik. I diskussioner om antagningskrav inför den nya läroarutbildningen finns en del som pekar på att pendeln är på väg tillbaka igen. Det finns en vilja att sänka kraven främst beroende på svårigheter att rekrytera studenter till läroarutbildning.

En aktuell undersökning av studenters arbetsinsatser i sina studier visar att läroarstudier ägnar väsentligen kortare tid åt studier än de jämförda grupperna (bla civilingenjörer, ekonomer). Vilken slutsats det

ska leda till tål att begrunda. Det finns skäl att noga överväga kraven på förkunskaper i matematik för dem som ska bli matematiklärare. De beslut som tas i dessa frågor kan komma att påverka vårt utbildningssystem under mycket lång tid framöver. Faran med att vara historielös i utbildningssammanhang måste beaktas. Lärarstudenternas syn på utbildningen och visioner inför yrkesarbetet kan behöva vägas in i planeringen av den framtida utbildningen.

Behovet av kompetensutveckling för matematiklärare måste ses mot bakgrund av den grundläggande utbildning de fått. Grundutbildningen av matematiklärare beskrivs genom några exempel, som belyser att utbildningarna vid de olika högskolorna har likheter i omfattning men stora olikheter i innehåll och uppläggning.

Blivande förskollärare får på många håll ingen utbildning alls i hur de kan stödja och hjälpa barn att bygga upp erfarenheter som ger en god grund för skolans matematikundervisning. Det finns en efterfrågan på sådana kunskaper hos förskollärarna. Den tidiga matematikinläringen är nära kopplad till språkutveckling. Behovet av en sådan utbildning visas bl a genom de resultat som kommer fram i en forskningsöversikt om minoritetselevers undervisning och lärande i matematik.

Lärare för elever i år 1–7 får en utbildning med tyngdpunkt i matematikdidaktiska delar. Kurserna omfattar 15 poäng matematik och matematikdidaktik. Lärare för år 4–9 har större inslag av matematik men alltför lite för att verkligen kunna stödja alla elever. Matematikkurserna omfattar 30–40 poäng. Dessa kurser kan antingen vara matematikkurser utan ämnesdidaktiska inslag eller en kombination av matematik och matematikdidaktik. Kursernas innehåll skiljer sig starkt mellan olika lärarutbildningar. Gymnasielärarna ska ha 60 poäng matematik och 80 poäng i det fall matematik är deras huvudämne i examen. Matematik kan här omfatta närliggande ämnen som matematisk statistik, numerisk analys, datalogi osv vilket innebär att de flesta har 40 poäng i "ren" matematik. Gymnasielärarnas matematikkurser har i ett internationellt perspektiv alltför liten omfattning. När skolorna dessutom ofta saknar ämnesansvarig lärare kan det leda till att ingen på skolan känner ansvar för matematikämnet, dess utveckling och lärarnas kompetensutveckling.

Specialpedagoger har ofta ingen utbildning i matematik trots att det är vanligt att elever behöver särskilt stöd eller specialundervisning just i matematik. Även här måste den nära kopplingen mellan matematikinläring och språkinläring betonas och inta en central roll i utbildningen. Det finns skäl att se över förutsättningarna för att ge specialundervisning i matematik då man saknar matematik i sin grundutbildning till lärare. I den nya lärarutbildningen finns möjligheter för lärarstudenter att välja att bli matematikspecialister och verka på alla stadier. Från de båda grupperna, förskollärare och specialpedagoger, har önskemål om mer matematik i utbildningen framförts.

Rekryteringen till lärarutbildning i matematik har i flera år varit mycket problematisk och situationen har varit besvärlig också inför hösten 2001. På vissa högskolor har man diskuterat att lägga ner matematiklärarutbildningen på grund av svårigheter att rekrytera. Att göra det i ett läge då landet saknar mängder av matematiklärare verkar inte vara att ta ansvar för landets utbildningsbehov. Men det skulle krävas rejäla politiska ingrepp för att få en verklig förändring till stånd. Förutom att det är svårt att rekrytera studenter till utbildningen har högskolorna stora problem med att få de studerande igenom utbildningen. Mindre än hälften av de blivande 4–9-lärare som antas avslutar sin utbildning med en examen.

Frågan om vilken utbildning lärarutbildarna har är väsentlig i skenet av att de kommer att bli viktiga resurspersoner i en kompetensutveckling. Lärarutbildare är inte en enhetlig grupp utan består av pedagoger, matematiker, erfarna matematiklärare och matematikdidaktiker. Rekryteringssituationen redovisas med exempel. Så vitt man kan bedöma av rapporter och vittnesbörd från olika högskolor råder stora svårigheter att rekrytera goda lärarutbildare i matematik. Behovet av kompetensutveckling för lärarutbildarna har undersökts. Önskemålen berör en lång rad områden inom matematikdidaktik men även behov av utökade matematikkunskaper nämns. Anknypningen till den utbildning som ges inom forskarskolorna i matematikens didaktik och pedagogiskt arbete kommer att vara en viktig fråga som också berör lärarutbildarnas kompetensutveckling.

En genomgång har skett av förekomsten av utbildningsanordnare för kompetensutveckling och utbud av kurser. Det finns ett stort antal kurser vid universitet och högskolor som är relevanta i en kompetensutveckling och en del av dem riktar sig tydligt till matematiklärare i skolan. I informationsmaterial och kurskataloger ges inte en klar, intresseväckande och distinkt bild av matematiken. En text om och presentation av matematiken på postgymnasial studienivå behövs. Hur ska studenter förmås välja ämnet om det inte framträder som ett attraktivt alternativ?

Motiv för att använda universitet och högskolor i kompetensutvecklingen har analyserats. Det finns flera tunga skäl att ge kompetensutveckling i formen av poänggivande akademiska kurser. En professionalisering av läraryrket kräver att kompetensutvecklingen blir erkänd och synlig. Lärarutbildningen ska bygga på en vetenskaplig grund och behovet av att stärka forskningsanknytningen av den har betonats. Även kompetensutveckling av lärare måste vara forskningsanknuten och hålla åtminstone samma kvalitet som den grundläggande lärarutbildningen. Kompetensutvecklingen bör vara utbyggbar i steg till magisterutbildning och forskarutbildning. Möjligheten att använda privata kursanordnare aktualiserar ett behov av att klargöra vad en beställarkompetens innebär och att upprätta kriterier för kvalitet i kompetensutvecklingen.

Frågor om lärares behov av att ha ett eget inflytande över kompetensutvecklingen samt behov av tid och resurser för genomförande behandlas. Tid är en viktig faktor för lärande och för lärares möjligheter till reflektion och utveckling. För att kompetensutvecklingen ska kunna vara väl anknuten till lärarens dagliga arbete med eleverna krävs rikligt med tid för undersökning och reflektion över problem och frågor som behöver lösas. Gapet mellan forskare och deras resultat och lärare och deras vardag måste överbryggas genom att lärare får vara med och påverka forskningsfrågorna och medverka vid utformningen av studierna. Såväl nationella som internationella erfarenheter bör tas tillvara i det fortsatta arbetet. De svårigheter vi står inför i Sverige delar vi med många andra länder och det gör det viktigt att lära av andras erfarenheter.

Några exempel på kursplaner redovisas. En kompetensutvecklingskurs i "Diskret matematik" har tagits fram i samverkan med Skolverket. Kurser i matematikens didaktik med inslag av distansutbildning och lärares eget utvecklingsarbete redovisas tillsammans med erfarenheter från sådana kurser. En forskningsöversikt om kompetensutveckling indikerar styrkan i att lärare utbildas i grupper från samma skola och med en stor del av verksamheten förlagd till skolan i form av undersökningar med eleverna. Teori och praktik kan förenas i kurserna och skrivprocessen bör vara ett viktigt inslag i utbildningen.



---

# Inledning

Inför en satsning på kompetensutveckling av lärare finns behov av att beskriva utgångsläget. Vilken utbildning har deltagarna och vilka behov kan de tänkas ha? Vilka möjligheter att möta dessa behov finns det? Hur ser utbudet av kurser och kursanordnare ut? Vilka resurser finns tillgängliga? Frågor av detta slag ställs genom det uppdrag NCM har fått av regeringen. Här ska huvudsakligen utbudet av kurser, utbildare och kursanordnare behandlas.

I denna rapport ges en bild av den utbildning matematiklärare får för närvarande i Sverige. Förhållandena gäller främst läsåret 2000/2001. Studenternas förkunskaper, rekryteringssituationen och genomströmningen diskuteras. Utbildningens utformning belyses genom konkreta exempel. Situationen relateras till den nya lärarutbildningen som startat hösten 2001.

Dessutom diskuteras frågan om lärarutbildarnas utbildning. Rekryteringssituationen redovisas med exempel. Behovet av kompetensutveckling för dem har undersökts och berörs. Anknytningen till forskarskolor diskuteras.

Slutligen redovisas utbildningsanordnare för kompetensutveckling och utbudet av kurser vid universitet och högskolor. Motiv för att använda universitet och högskolor i kompetensutveckling analyseras. En professionalisering av läraryrket kräver att kompetensutveckling blir erkänd och synlig. Möjligheten att använda privata kursanordnare leder till slutsatsen att det finns behov av att klargöra vad en beställarkompetens innebär och att upprätta kriterier för kvalitet i kompetensutvecklingen.

Frågor om lärares behov av att ha ett eget inflytande över kompetensutvecklingen samt behov av tid och resurser för genomförande belyses. Tid är en viktig faktor för lärande och för lärares möjligheter till reflektion och utveckling. Några exempel på kursplaner presenteras. Värdet av att ta tillvara såväl nationella som internationella erfarenheter diskuteras.



---

# Grundutbildning av lärare

För att kunna skapa sig en bild av hur lärarutbildning ser ut och vilken betydelse den kan komma att ha för en satsning på kompetensutveckling krävs svar på bla nedanstående frågor.

- Vilken utbildning har de studenter som antas till lärarutbildning i matematik?
- Vilken utbildning i matematik och matematikdidaktik får de studenter som utbildar sig till lärare – från förskola till gymnasieskola inklusive specialpedagogutbildning?
- Hur ser rekryteringssituationen och genomströmningen ut? Vilka förändringar kan man se under senare år? Hur ser rekryteringssituationen ut när det gäller lärare som skall undervisa i matematik?
- På vilket sätt kommer situationen att förändras när den nya lärarutbildningsreformen genomförts? Vilka konsekvenser kommer en gemensam ingång till lärarutbildningen att få för matematiken? Vilka ämneskombinationer med matematik kommer att utvecklas? Kommer vi att få matematikspecialister (lärare som har matematik som sitt huvudsakliga ämne – som inriktning och kanske också som specialisering – med djupa kunskaper om elevers utveckling i matematik genom alla skolåren) på alla stadier i skolan?
- Hur ser situationen ut när det gäller magister- och forskarutbildning i matematik/matematikdidaktik lämpad för lärare i matematik?
- Hur ser prognoserna ut för den närmaste framtiden i relation till förväntade behov?

## Studenternas förkunskaper

De formella kraven på förkunskaper för att bli lärare i matematik har varit naturvetenskaplig (NV) kompetens från gymnasiet. Det finns ingen heltäckande statistik om studenternas studiebakgrund men i en fallstudie vid en av högskolorna (Grevholm, under tryckning a) visas att mindre än hälften av studenterna till 4-9-utbildningen kommer direkt från NV-programmet eller motsvarande. De övriga har kompletterat sina gymnasiestudier från andra program (eller linjer) på Komvux och/eller gått naturvetenskapligt basår. Studien visar även att de som inte kommer från NV-bakgrund på gymnasiet haft större svårigheter att klara av sina studier i matematik. Bla har dessa studerande fler misslyckade tentamensförsök innan de blir godkända. Wistedt (2001) visar att

även inom vissa naturvetenskapliga och tekniska utbildningar är det vanligare att studenter som inte har NV-bakgrund avbryter sina studier.

Även i rapporten *Räcker förkunskaperna i matematik?* (Högskoleverket, 1999) påvisas att elever från Komvux inte har samma faktiska grund att stå på som NV-elever med motsvarande betyg. En undersökning rörande lärarutbildningen i matematik och naturvetenskap för skolår 4–9 i Malmö visar att 40 % av de studerande med ungdomsskola som bakgrund inte fullföljt utbildningen. Motsvarande andel för Komvux är 50 % och för naturvetenskapligt basår 67 % (Isaksson & Zetterberg, 1998).

En annan faktor som påverkar studenternas faktiska förkunskaper är deras ålder. Det har blivit allt vanligare med högre antagningsålder och att de studerande har många års arbetsliv bakom sig då de påbörjar studierna (Grevholm, under tryckning a). Det är givetvis en fördel när de väl kommer ut som verksamma lärare, men under studietiden kan det vara en nackdel. Deras gymnasieutbildning ligger ofta långt tillbaka i tiden och de är ovana vid studiesituationen. De saknar dessutom aktuell kunskap från gymnasiets matematikinnehåll, vilket kan leda till problem.

Ytterligare en faktor som påverkar förkunskaperna är vilken grupp av studenter det är som söker sig till lärarutbildningarna. Det är väl dokumenterat att de NV-studenter som har bäst betyg i första hand söker sig till civilingenjörsutbildning, läkarutbildning och liknande. Det är vanligt att lärarstuderande inte haft lärarutbildningen som sitt förstahandsval och inte tillhör de högst presterande NV-studenterna. Detta kan betyda lägre motivation för studierna än vad studerande i andra utbildningar har. En konsekvens är att gruppen som helhet har lägre förkunskaper än en del andra studerandegrupper och det avgör vilken nivå undervisningen i lärarutbildningen kan utgå från.

I en pågående forskningsstudie som ännu ej publicerats och som genomförts med lärarstuderande om motiven för valet att utbilda sig till lärare i matematik och naturvetenskap framgår det ofta att det styrts av en önskan att undervisa i naturvetenskap, inte i matematik. Ett sådant utgångsläge ger kanhända inte den bästa motivation för att bli matematiklärare.

Under våren 2001 offentliggjordes en undersökning om studenters arbetsinsatser under studierna. Franke & Lundgren (2001) hävdar att lärarstuderande ägnar väsentligt kortare tid åt studier än andra jämförda grupper (bla civilingenjörer och ekonomer). Vidare anser en del lärarstuderande att det ställs för låga krav på dem under utbildningen. Franke & Lundgren hävdar att lärarutbildningen kunde kortas ner med ett läsår om studierna effektiviserades. För mig som länge arbetat med lärarutbildning och sett studenternas resultat och kunskaper förefaller slutsatsen orimlig. Med den höga grad av studieavbrott och misslyckanden som föreligger är det svårt att inse att det skulle vara möjligt att öka kraven på studenterna. För dem som slutför sin utbildning är tyvärr inte kunskaperna sådana att de med lätthet klarar av att verka som matematiklärare i skolan.

I den nya lärarutbildningen har förkunskapskraven förändrats. Det finns stor risk att de nya behörighetskraven leder till försämrade förkunskaper för de som ska bli lärare i matematik. Historielöshet, något som inte är ovanligt inom utbildningsvärlden, är allvarligt inom ett område där besluten får konsekvenser för många årtionden framåt. En utbildningsforskare med perspektiv vittnar:

Allra olyckligast var att man 1967 beslöt att ta in kandidater till mellanskollärlinjen med bara tvåårig fackskola, social linje. Följderna av detta har vi sett i bland annat nivån på de svenska trettonåringarnas matematikkunskaper. Självfallet gäller här också lagen om tillgång och efterfrågan, inte minst på högstadiet och i gymnasieskolan. Som framgår av de senare IEA-undersökningarna har de svenska högstadielärarna, i varje fall i matematik och naturvetenskap, en sämre ämnesteoretisk bakgrund än sina kollegor i flertalet länder på kontinenten och i England. Flertalet svenska lärare i årskurs sju ligger ämnesteoretiskt faktiskt i botten i industriländerna.

(Husén, 1994, s 143)

Husén bekymrar sig över att vi i Sverige verkar ta sakernas tillstånd med alltför stort lugn. Han talar till och med om uppkomsten av en ny pedagogisk underklass.

Här i landet börjar vi få känna av de problem man i USA haft sedan lång tid: nedgång i rekryteringen till lärarutbildning, byråkratisering och kostnadsstegringar samt uppkomsten av vad jag kallar en ny pedagogisk underklass. Tillsammans med amerikanerna ligger vi vad gäller matematiken på bottenplatser i den internationella kunskapsligan – om man nu skall våga använda ett så olämpligt uttryck.

(Husén, 1994, s 148)

Den nuvarande lärarutbildningen beslutades 1988 och då förändrades förkunskapskraven för blivande lärare i matematik från allmän behörighet till krav på matematik motsvarande nuvarande NV-program från gymnasieskolan. Denna förändring grundades i forskningsresultat av bl a Lindblad (1978) och Ljung (1987). Deras studier visade bl a att studenter från linjer med mindre matematik än den naturvetenskapliga gymnasieutbildningen hade stora svårigheter att klara sådana uppgifter från grundskolans kurs som de själva skulle undervisa om. Frågan om förkunskaper för de blivande lärarna i matematik måste ges stor vikt. Modeller för hur goda lösningar på problemet med tillräcklig kompetens i matematik vid studiernas början ska kunna tillgodoses måste arbetas fram.

En gemensam ingång till lärarutbildning med sänkta förkunskapskrav ställer krav på kompletterande studier under utbildningens gång av de kurser från gymnasiet matematik som den studerande inte har med

sig som förkunskap. I sak innebär dessa tankar att kurser som hör till gymnasieskolans utbud kommer att ges inom ramen för högskolan.

## Lärarstuderandes och lärarutbildares erfarenheter av matematikutbildningen

### *Några bilder*

En kvinnlig lärarstuderande i Malmö delger sina erfarenheter så här (Turgman, 2000).

Jag tragglade mig igenom gymnasiet upp förbi E-kursen i matematik, men det är först nu, när jag fått lära mig grunderna igen, som jag tycker att matte är roligt på riktigt. Jag förstår vad jag gör och hur allt hänger ihop, och jag kan därmed få andra att förstå. Äntligen börjar matematiken bli levande för mig!

Så här säger hon om sin skolpraktik:

Även jag blev inledningsvis imponerad, då jag kom hit vid skolstarten. Det är jag inte längre. Den matematikundervisning som där bedrivs, är en slags färdighetsfokuserad isolering av eleverna som jag inte ger fem öre för och som jag är övertygad om fastcementerar uppfattningar som de jag nämnde i början av det här avsnittet: att matematik är en skolangelägenhet och ingenting man har någon nytta av i verkligheten.

Så här ser hon sin uppgift:

Mitt självklara val blir att arbeta för en matematikundervisning präglad av kommunikation, upptäckarglädje och samarbete. Jag är övertygad om att detta är genomförbart.

Denna lärarstuderandes kommentarer är inte ovanliga. Det förekommer att studenterna i grunden förändrar sin uppfattning av vad matematik är på grund av det sätt på vilket matematiken framställs vid flertalet lärarutbildningar. Det förekommer även ofta att de studerande förhåller sig kritiska till saker och ting de upplever under sin praktiktid i skolan. De ser företeelser som de tar avstånd ifrån. Många gör som denna unga kvinna, utvecklar en egen vision om hur hon vill vara som lärare då hon är klar med utbildningen. Tydligast kommer detta till uttryck då studenterna skriver sina examensarbeten i matematikdidaktik (Ejlefjärd & Haraldsson, 2000; Adolfsson & Nilsson, 2000; Felixson & Kral, 2000). I de tre nämnda arbetena ger studenterna uttryck för en klar övertygelse om hur de vill arbeta som matematiklärare och vad de ser som sin uppgift. Men en del tecken tyder på att realitetschocken de får då de kommer ut i skolan är så stark att de inte klarar att hålla kvar sin vision.

En lärarutbildare reflekterar så här i ett brev till en kollega:

Hur ser det ut med genomströmningen på kurserna? Vår studie-rektor sammanfattade läget något tillspetsat så här: Studenterna blir godkända på kurserna med "alternativa tentamensformer" och underkända på kurserna med traditionell tentamen.... Upplever att man som examinator har ett obehagligt stort ansvar – var och en konstruerar sina egna tentor, ingen verkar bry sig om vad den andre gör. Just det här att man frestas "reglera genomströmningskranen" själv, tycker jag ställer till problem.

En diskussion pågår mellan lärarutbildare om var kraven för godkänt får ligga. En del menar att den acceptabla nivån nedåt har passerats. Andra anser att staten har ansvaret och några absoluta krav på kunskaper kan inte ställas på de blivande lärarna. De anser även att de studenter som kommer till lärarutbildningen måste tas om hand och föras igenom systemet samt att lärarutbildarna har ansvar för att kurserna är sådana att detta är möjligt. För lärarutbildarna som grupp är det inte möjligt att gå ut i en offentlig debatt och angripa sina egna studenter för att en rimlig kunskapsnivå inte uppnås. Det som skulle behövas för att förändra situationen är att landets skolpolitiker visar större intresse och engagemang för dessa frågor.

Det allvarliga är att effekterna av detta kommer att synas för lång tid framåt i form av elever som får undermåliga kunskaper på grund av brister hos lärarna (Husén, 1994). Att vi i början av 2000-talet i ett rikt och välutvecklat land som Sverige ordnar det så att våra unga som ska leda och utveckla landet de närmaste 50 åren får en undermålig utbildning i matematik kommer att få allvarliga konsekvenser. Det är paradoxalt att i en tid då allt mer matematik används för den samhällliga och tekniska utvecklingen det kan vara så svårt att få makthavarna att inse att en god matematikutbildning är av stor vikt och ett krav för demokrati och jämlikhet. Matematiska modeller används på allt fler ämnesområden och den som inte kan genomskåda dem är i ett medborgerligt underläge. Ett aktuellt exempel är försäkringsbolagens modeller för livslängd för män och kvinnor som får till konsekvens att kvinnor får lägre pension.

Lärarutbildarnas erfarenheter av problem med studenternas kunskapsnivå och förståelse för läraryrkets krav borde kartläggas systematiskt. En ingående studie bör göras av de nyutbildade matematiklärarnas situation när de börjar undervisa i skolan och vad brister i utbildningen får för konsekvenser för deras elever. Mycket tyder på att nyutbildade lärare hamnar i en alltför krävande arbetsituation eftersom flera av de kollegor de möter kan sakna utbildning (Skolverket, 2001) och de som har adekvat utbildning inte orkar stödja de nya på ett önskvärt sätt. De visioner om yrket som de nyutbildade har verkar gå i kras ganska omgående när de möter skolans verklighet.

## Vilken utbildning i matematik och matematikdidaktik får de studenter som utbildar sig till lärare?

En översiktlig bild av hur utbildningen ser ut vid olika lärarutbildningar kan ge en uppfattning om vilka behov som finns när det gäller kompetensutveckling. Framställningen bygger på exempel på hur utbildningarna kan vara utformade och på uppgifter från olika personer i nätverket för lärarutbildare i matematik, LUMA (Dahland & Emanuelsson, 1998).

### *Utbildning till förskollärare*

Vid den nationella konferensen för lärarutbildare i matematik, LUMA, i Norrköping 1999 kartlades förekomsten av kurser i matematik i de olika högskolornas förskollärarutbildning. De flesta visade sig inte ha någon matematik alls. Vid några få högskolor gavs kurser om 3 poäng i matematik, som då behandlar barns tidiga matematikutveckling och hur den kan stödjas. På konferensen fanns en enighet om att kurser i matematik, omfattande minst tre men helst fem poäng borde ingå i den utbildning som blivande förskollärare får. Situationen kan ses som oroande när vi vet hur viktig den tidiga utvecklingen är för barns fortsatta lärande i matematik. Om barn tidigt får möta matematik, tal, mönster och former genom lek, ramsor, bilder, berättelser, spel och praktiskt handlande kanske vi skulle kunna hjälpa alla barn till en bättre start (se tex Grevholm, 2001a). Det kräver att förskollärarna har en god förståelse för och kunskap om den tidiga matematikutvecklingen och själva har en positiv attityd till matematiken. En förändring här skulle kunna få stora effekter. Det kräver i så fall en acceptans av alla inblandade parter och ett nytt förhållningssätt till matematiken i förskolan. Vikten av grundläggande begreppsbyggnad i matematik har betonats i Lpfö 98. En förändring förutsätter ett genomförande av utvecklingsarbeten som kan förbereda lärarutbildningen. Vidare krävs förberedelser för att kunna utveckla matematiken i förskolan.

I Rönnberg & Rönnberg (2001) framgår tydligt hur viktigt språket är för matematikinläringen. Det gäller givetvis alla elever. En grundkurs i barns tidiga utveckling av språk och matematik är ett grundläggande behov för alla lärargrupper. En sådan kurs bör finnas i den nya lärarutbildningens gemensamma del. För redan verksamma lärare bör kursen kunna erbjudas som kompetensutveckling. Från personal verksam med barn i förskoleåldern finns en önskan om kompetensutveckling om tidigt lärande av matematik. Detta kommer till synes bland annat genom efterfrågan på studiematerial och kurser (Wallby m fl, 2000). Även dagbarnvårdare verkar i realiteten som pedagoger för de tidiga årens lärande och har givetvis behov av och rätt till kompetensutveckling för att kunna stödja barnens utveckling. Det finns en samsyn kring hur lek och aktiviteter i förskoleåren kan förbereda för gott lärande i matematik. För några synpunkter kring det, se Grevholm (2001a).



Från några förskolor och skolor som genomfört gemensamma utvecklingsarbeten i matematik redovisas förskollärarnas syn på sina egna fortbildningsbehov (Görel Sterner, muntlig kommunikation, 2000). Dessa förskollärare menar att fortbildning i matematikdidaktik är en förutsättning för att de ska kunna utveckla matematiken i förskolan, men de pekar också på behovet av egen utbildning i matematikämnet. De påpekar att många förskollärare har valt bort matematiken tidigt i sin egen utbildning och att man ofta har negativa erfarenheter av den. De menar att förståelse och kunskap om matematiska begrepps uppbyggnad och progression, som sträcker sig utöver den matematik man arbetar med i förskolan, är nödvändig. Förskolan ska utgöra det första steget i det livslånga lärandet och som förskollärare är det då viktigt att veta och förstå vad man i förskolan lägger grunden till.

### *Utbildning till 1–7-lärare i matematik (och no) – två exempel*

Några exempel får belysa situationen. I bilaga 1 beskrivs hur utbildningen utformats i Malmö respektive Karlstad. I båda utbildningarna får de blivande 1–7-lärarna 15 poäng matematik och matematikdidaktik i den obligatoriska delen av utbildningen. De har möjlighet att läsa mer matematik inom ramen för valbara kurser.

Likheter i de båda utbildningarna ligger i att den obligatoriska delen har samma omfattning, 15 poäng, och att i båda kursplanerna har matematik och matematikdidaktik integrerats i kurserna.

En jämförelse av innehållet i kurserna i dessa beskrivningar tyder emellertid på stora skillnader i två utbildningar som leder till samma examen. Den ena har en mycket tydlig inriktning mot didaktik och det så starkt att man närmast måste gissa sig till vilken matematisk ämnesteorier som behandlas. Den andra har en stark betoning på ämnet matematik och kunskaper i ämnet i en sådan grad att man måste undra hur det är möjligt att behandla alla dessa delmoment inom ramen för 15 veckors arbete. Vad en utbildning egentligen innehåller och kräver för att en student ska bli godkänd går naturligtvis inte att utläsa enbart av kursplanen. Det är emellertid förvånande att planerna kan skilja sig så starkt åt. Kan en student som examineras och godkänns på den ena utbildningen även klara den andra utbildningens examination?

Vilka kunskaper har de studerande med sig ut i yrkeslivet från utbildningen? Forskning om effekterna av lärarutbildningen i matematik förekommer i ringa mån i Sverige. Därför vet vi ingenting om vad de här valda exemplen av utbildningar leder till. Det finns ett behov av att veta mer om vilka kunskaper i matematik och matematikdidaktik som är relevanta och värdefulla för lärare. Preliminära resultat från en forskningsstudie inom utbildningen av matematiklärare vid högskolan i Kristianstad tyder på att även lärarstuderande som är framgångsrika i sina studier har svårigheter med undervisningen i matematik under sin inledande

lärargärning. Det kan finnas ett behov av en längre fortlöpande kontakt mellan lärarutbildningen och de nyutexaminerade lärarna. En försöksverksamhet med uppföljning och kontakter efter utbildningens slut borde genomföras och noga dokumenteras. En annan fråga som behöver besvaras är hur studenters kunnande och erfarenheter av lärarutbildningen i matematik tillvaratas i deras yrkesverksamhet. Under utbildningen sker i regel löpande utvärderingar men det är ovanligt att höra studenternas synpunkter efter det att de lämnat sina studier.

#### *Utbildning till 4–9-lärare i matematik (och no) – två exempel*

Även här får några exempel belysa situationen. I bilaga 2 beskrivs hur utbildningen utformats i Malmö respektive Karlstad.

En likhet i båda utbildningarna är att 4–9-lärarna delvis läser samma kurser som 1–7-lärarna. I Malmö är en 10-poängskurs gemensam för de två lärarkategorierna medan det i Karlstad är en 15-poängskurs som är gemensam. Malmö högskola har valt att integrera matematisk ämne-teori och ämnesdidaktik i alla kurser. Intrycket är att matematikdidaktiken dominerar. Det framgår inte hur poängtalet fördelar sig på de olika inslagen i kurserna. I Karlstad finns matematikdidaktik som en del i den grundläggande kursen medan de övriga kurserna är antingen matematiska eller matematikdidaktiska. Karlstads modell ger intryck av att sikta mot den nya lärarutbildningen. De 15 poäng som är gemensamma i de båda utbildningarna är en inledande kurs, vilket möjliggör övergång från en utbildning till den andra.

I Malmö läses totalt 30 poäng matematik och det verkar finnas möjlighet att bygga på med en valbar kurs. I Karlstad läser lärarna 40 poäng matematik med möjlighet att bygga på med kurser inom både matematik och matematikdidaktik. Det är svårt att ur kursplanerna bedöma fördelar och nackdelar med de olika modellerna för kursuppläggning. En djupare analys kräver samtal med verksamma lärare och lärarstudenter inom de olika utbildningarna vilket inte varit möjligt att genomföra inom ramen för denna studie.

#### *Utbildning till gymnasielärare i matematik*

Studier till gymnasielärare i matematik kan i huvudsak ske enligt två modeller. Studenter som antagits på gymnasieläraryrket genomgår en utbildning om 180 poäng, varav 40 poäng är praktisk-pedagogisk utbildning. Vanligtvis studeras ämnen som motsvarar två av gymnasieskolans undervisningsämnen. Om matematik ska vara huvudämnet i examen ska studierna i matematik omfatta 80 poäng, annars 60 poäng. Det andra alternativet är att studenten inhämtar sina ämneskunskaper via fristående kurser i för skolan relevanta ämnen upp till 140 poäng och därefter läser 40 poäng praktisk-pedagogisk utbildning för att få

gymnasielärarexamen. Tidigare (före 1988) räckte det med 40 poäng i matematik.

Eftersom flertalet lärare har den äldre utbildningen är det ännu relativt få lärare i matematik på gymnasiet som har mer än två terminers studier i matematik. De senaste tio åren har ett stort antal ämneslärare som tidigare tjänstgjort på grundskolans högstadium flyttat till gymnasieskolan (Skolverket, 2001).

Den svenska utbildningen till gymnasielärare har kritiserats hårt i jämförelse med andra länders utbildning av lärare för gymnasiet för att den är alltför grund i ämnesutbildningen (Universitetskanslern, 1995).

En svensk gymnasielärare i matematik har i allmänhet studier i matematik som svarar mot tre terminers utbildning. Den matematik som studeras under denna tid är både elementär och grund i förhållande till de krav yrket ställer. Utblickar mot och inblickar i nutida matematik saknas nästan helt, särskilt i sådana grenar som spelar en stor roll i tillämpning av matematik (matematisk statistik, numerisk analys, datalogi etc) men också utblickar mot och insikter i matematikens historiska och filosofiska sidor, som är av stor betydelse för matematiken som undervisningsämne i skolan.

I naturliga jämförelseländer studerar en blivande gymnasielärare åtminstone dubbelt så mycket matematik inklusive fördjupningskurser och seminarieövningar som helt saknar motsvarighet i Sverige.

(Universitetskanslern, 1995, s 19)

I rapporten föreslås att framtida gymnasielärare ska få en ämnesteoretisk kompetens i paritet med vad som gäller i övriga Europa.

Innehållet i den utbildning som ges idag är ofta en grundläggande 20-poängskurs med algebra och analys. Detta följs under andra terminen av en påbyggnadskurs med flervariabelanalys och något kompletterande område (differentialekvationer, diskret matematik, fourieranlys etc). Därefter läser studenten ofta kurser som rör matematikens tillämpningar som datalogi, numerisk analys och matematisk statistik. Det förekommer även kurser som är inriktade mot undervisning i gymnasieskolan och de kan innehålla tex matematikens idéhistoria, problemlösning och matematikdidaktik. Effekten är att kurserna inom den "rena" matematiken i regel omfattar högst 40 poäng.

Det har inte förts någon mera omfattande debatt om vad matematiken i lärarutbildningen ska innehålla. I Sverige har kursplaneutveckling både i skolan och på universitetsnivå av tradition baserats på väl beprövad erfarenhet snarare än forskning. Forskningsartiklar om matematikundervisningens mål och innehåll samt om kursplanearbete finns numera att tillgå även på svenska (Niss, 2001; Gjone, 2001). För framtida förändringar borde resultat från sådan forskning i högre grad få

påverka den utveckling som görs av kursers innehåll och mål inom lärarutbildning och i skolan. Ett förslag är att tillsätta en grupp som arbetar mera långsiktigt med utvecklingen av matematikundervisningens mål och innehåll både i skolan och på universitetsnivån och i samband med det beakta den studerandes begreppsutveckling i matematik i ett longitudinellt perspektiv för att skapa bättre kontinuitet i lärandet. Epistemologiska hinder som diskuterats (Sierpinski, 1994) och återvändsgränder för lärandet skulle då kunna tydliggöras för lärare på olika nivåer.

I regeringsuppdraget till NCM ligger att utveckla förslag till innehåll i ämnesstudier åt gymnasielärare i matematik och utveckla innehållet i ämneskunskaperna så att det tydligare än idag svarar mot läroplanen för gymnasieskolan. Den nya kursen "Diskret matematik" (50 gymnasiepoäng) har föranlett ett arbete som NCM initierat för att skapa förutsättningar för motsvarande kompetensutveckling för lärare.

Efter ett inledande planeringsarbete på NCM togs kontakt med Skolverket som därefter tog över ansvaret för utvecklingen av en ramkursplan (se bilaga 7) som nu ligger klar att användas i kompetensutveckling av gymnasielärare i avsikt att underlätta deras möjligheter att undervisa kursen Diskret matematik. På motsvarande sätt kan NCM medverka till andra ramkursplaner inom områden där kompetensutveckling efterfrågas (se tex bilaga 9).

I det sammanhanget bör även övervägas hur de matematikdidaktiska studierna kan utformas för blivande gymnasielärare. Idag sker detta på mycket olika sätt vid de olika högskolorna. Det förekommer didaktiska kurser som ger 0 poäng till studenterna. Matematikdidaktiken som kunskapsfält har vuxit starkt de senaste tjugo åren genom den aktiva forskning som pågår (Grevholm, 2001b). Dessa nya kunskaper måste erbjudas till gymnasielärare. Här finns det anledning att koppla lärarutbildning till den verksamhet som forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning kommer att generera (se bilaga 5). Verksamma gymnasielärare bör kunna få kompetensutveckling i form av forskarutbildning parallellt med att de upprätthåller en del av sin tjänst i skolan. Detta är desto angelägnare eftersom det idag knappast finns några gymnasielektorer i matematik kvar ute på skolorna.

Lektorerna hade i regel uppdrag som huvudlärare i sitt ämne och kunde därmed ta ansvar för ämnets utveckling, för kontakter med högskolans forskningsverksamhet, för lokal planering och handledning och kompetensutveckling för mindre erfarna kollegor. I takt med att antalet forskarutbildade gymnasielärare i matematik minskat och huvudläraruppgiften avskaffats har ansvaret för ämnet inte varit en lika tydlig och viktig uppgift som tidigare. Lärare påpekar ofta att organisationen med arbetslag över ämnesgränser medför att det sällan blir tid att diskutera frågor om undervisningen i det egna ämnet. Finns det då ingen lärare på skolan som anser att matematik är deras första och främsta ämne kan följden bli att det får en alltför undanskymd roll.

### *Utbildning till specialpedagog*

Matematik är enligt alla redovisade resultat det ämne som bereder elever störst problem i skolan. Att 16% av eleverna i grundskolan inte når upp till betyget Godkänd i ämnesproven i matematik i årskurs 9 är allvarligt och bekymmersamt både för samhället och individen. Se vidare i *Hur klarar våra elever matematiken?* (Johansson, 2001). En följd av det borde vara att merparten av specialpedagogers arbete direkt och indirekt ägnas åt att hjälpa och stödja elever att lära sig matematik. Av den anledningen kunde man förvänta sig att utbildningen till specialpedagog innehöll mycket om matematik och matematikdidaktik. Det är uppenbarligen inte en självklarhet. Från specialpedagogiska utbildningar rapporteras att det inte är givet att matematik har en egen del av utbildningen. Det är inte ovanligt att kompetens för att genomföra de matematiska delarna av utbildningen lånas in från externa källor. Vissa gymnasie-lärare, grundskollärare, förskollärare, fritidspedagoger m fl som utbildar sig till specialpedagoger har inte någon erfarenhet av att undervisa i matematik och saknar ibland matematikutbildning i sina tidigare lärarutbildningar. Specialpedagogutbildningen är därmed sårbar och institutionerna bygger inte upp en kontinuitet i kompetensutveckling på området. Inför den nya lärarutbildningen finns det ett behov av att de som inriktar sig mot speciallärarkompetens i matematik får en god kvalitet på sin utbildning.

### **Rekrytering och genomströmning – hur ser situationen ut?**

Det är väl dokumenterat genom årliga sammanställningar från Verket för högskoleservice, VHS, av universitetens intagning att rekryteringen till lärarutbildning i matematik är minst sagt problematisk. Av de statistiska sammanställningarna kan man utläsa att alla sökande antagits och att intagningspoängen varit mycket låg. Trots att alla sökande antas kan högskolorna i regel inte fylla de platser som finns. Som exempel kan nämnas att Malmö normalt tar in tre grupper med 30 studerande till 4–9-läro-utbildningen och att man vid antagningen hösten 2000 endast kunde fylla en av dessa grupper. En konsekvens av det blev att de studerande fick ytterst lite läro-ledd undervisning jämfört med den tidigare situationen. Över hela landet kunde man hösten 2000 endast fylla hälften av platserna på 4–9-läro-utbildningen i matematik och naturvetenskap.

Den nya läro-utbildningen innehåller inte "läsningar" som ma-no och sv-so och ger därför bättre möjligheter att svara upp mot studenternas intressen och skolans behov av lärare med tex utbildning för undervisning i både svenska och matematik. Preliminära rapporter från den första antagningsomgången ht 2001 visar på mycket större intresse för matematikstudier när dessa kan kombineras med andra ämnen än no. Särskilt populär har kombinationen matematik-svenska varit (Löwall, 2001).

Förutom problem med intagningen kan det också konstateras att genomströmningen inte är den önskade. För Malmös del visar en undersökning (Isaksson & Zetterberg, 1998) att ungefär hälften av de studerande på 4–9-läraryrket hoppar av studierna eller inte klarar att fullfölja utbildningen. Hellström (2000) visar att var tredje student som påbörjar den långa gymnasieutbildningen i matematik och naturvetenskap ej genomför utbildningen och/eller byter yrkeskarriär medan samma sak gäller var tionde student som går den korta utbildningen. En orsak till skillnaden mellan grupperna uppges kunna vara åldern vid antagningen. Medelåldern för antagning till den långa utbildningen är 21 år och till den korta 26 år. De yngre upptäcker andra yrkesområden under studierna och omprövar sitt yrkesval. Hälften av de lärare som gått den långa utbildningen finns i de grupper som svarar att de "vill ofta sluta" eller "vill ibland sluta" som lärare.

Fler kvinnor än män anser, enligt Hellström, att utbildningen inte tillräckligt förbereder dem för yrket. Studenterna är i stort sett nöjda med ämnesstudierna och den skolförlagda praktiken men endast ett fåtal studenter anser efter flera års yrkeserfarenhet att pedagogikutbildningen var både viktig och bra.

Ett annat bekymmer med rekryteringen till läraryrket är att den är så sned ut könssynpunkt. Andelen kvinnor i läraryrket ökar stadigt och för barn i lägre åldrar finns knappast några manliga sökande till utbildningen. Problemet är allvarligt eftersom barn och ungdomar behöver möta både kvinnor och män i sin vardag. Vidare blir en alltmer enkönad arbetsmiljö i skolorna mindre stimulerande för de anställda. Forskning visar att en god balans mellan könen på arbetsplatsen ger en bättre och mer utvecklande miljö.

En forskningsstudie på blivande 4–9-lärare i matematik och naturvetenskap vid en mindre högskola visar att av 48 antagna studenter blev 25 examinerade efter 4,5 år (Grevholm, under tryckning a). Den låga genomströmningen verkar vara ett problem vid alla läraryrken i matematik och naturvetenskap. Sett i skenet av det stora behovet av utbildade lärare i matematik som finns ute på skolorna är detta faktum mycket allvarligt.

Problemen med rekrytering och genomströmning måste ställas i relation till uppskattade behovet av matematiklärare. Enligt Skolverket (2001) fanns 1999 ett behov av 4467 matematiklärare i gymnasiet medan en brist på 457 visas, dvs mer än 10% fattas. Behovet av nyutskott av ämneslärare i matematik under åren 2000–2009 uppskattas till 3580, vilket skulle motsvara ett behov av 4780 examinerade, dvs 480 per år. Antalet lärare på gymnasiet och Komvux i matematik är 5279 och av dessa är 9% obehöriga. Relativt många grundskollärare och speciallärare undervisar i matematik på gymnasiet. De kan utgöra omkring 7–9% av samtliga lärare i matematik på gymnasiet. Är det möjligt att med nuvarande villkor examinera lärare i matematik som täcker det nuvarande och framtida behovet?

## Hur ser rekryteringssituationen hösten 2001?

Behovet av fler lärare i matematik för både grundskolan och gymnasieskolan är dokumenterat i andra sammanhang (se ovan). Bekymmersamt är emellertid att det inte finns tillgänglig statistik på vilka lärare som nu undervisar i matematik i skolorna. Därmed saknas överblick för landet och säkra grunder för beräkningar av hur många lärare som verkligen behövs. Klart är emellertid att för att behovet ska kunna tillgodoses krävs kraftfulla insatser. Ett alltmer växande problem är att lärare som är behöriga att undervisa i matematik ofta gör det på ett stadium i skolan över det som de har utbildats till. Det finns exempel på skolor där alla lärare som undervisar i matematik på högstadiet är utbildade till 1-7-lärare. Vanlig är också att lärare som är behöriga i att t ex kemi och biologi (eller liknande) undervisar i matematik. I SCB:s statistik kallas de behöriga lärare, men de är ej behöriga i matematik. Förskollärare efterfrågar kompletteringsutbildning som gör att de på kort tid kan bli 1-3-lärare i matematik och naturvetenskap. Flera sådana utbildningar ges vid olika lärarutbildningar. I många fall innebär dessa att lärare får akademiska poäng för studieinnehåll som motsvarar kurser i gymnasieskolan. En offentlig belysning har skett av dessa kurser. I bland annat Skåne har långvariga debatter förts i dagspressen om det riktiga att ge dessa "sneddningskurser". Detta problem måste beaktas i samband med den nya lärarutbildningen.

Frågan om hur den gemensamma ingången för blivande lärare hanteras kommer att bli viktig. Det vore olyckligt om vi fick en återgång till den situation för förkunskaper i lärarutbildningen som gällde före 1988 och som beskrivits ovan. Det är emellertid nödvändigt att kunna rekrytera nya grupper av studenter till matematiklärarutbildning. Av matematikundervisning intresserade studenter från andra gymnasieprogram än det naturvetenskapliga borde kunna bli lärare i matematik om en till dem väl anpassad lärarutbildning erbjuds. Kan de studerande under utbildningens gång erbjudas den kompletterande utbildning i matematik som gymnasieskolans kurs D utgör om de saknar denna nivå när det antas till lärarutbildningen? Enligt *Svensk författningssamling*, SFS 1999:1038 paragraf 8 får student påbörja en utbildning i de delar som inte bygger på sådana förkunskaper som saknas. Det kan öppna en möjlighet att erbjuda kompletterande utbildning i matematik samtidigt som lärarutbildning pågår.

Det är angeläget att noga följa den nya lärareutbildningen med tanke på förändringar i förkunskapskrav som genomförs och de konsekvenser för rekryteringen av lärare i matematik som reformen kan komma att medföra.





---

# Vilken utbildning har lärarutbildarna?

Lärarutbildarna är nyckelpersoner i kompetensutvecklingen av lärare. Med nödvändighet kommer de att vara involverade i kurser som kommunernas lärare ska kunna nå lokalt. Vilken kompetens har lärarutbildarna? Vad kan de erbjuda i form av lokala insatser i ett nationellt program för kompetensutveckling av lärare?

## Vilken utbildning har lärarutbildarna?

Det krävs ingen speciell utbildning för att bli lärarutbildare. Det kan vara viktigt att diskutera om det inte skulle behövas en sådan. Av tradition kan man identifiera olika grupper av lärare som medverkar i lärarutbildning. Det är dock inte självklart vilka som betraktar sig som lärarutbildare. Räcker det med att då och då ge någon enstaka kurs inom lärarutbildningen? Vidare växlar gruppen av lärare som arbetar inom lärarutbildningen från år till år på grund av variationer i tjänstefördelning och underlag. Lärarutbildarna är med andra ord inte en lätt urskiljbar grupp. En grupp är de som undervisar i traditionellt ämne. De har ofta sin hemvist på en ämnesinstitution som inte enbart sysslar med lärarutbildning. En annan grupp är lärare i beteendevetenskap eller pedagogik. De arbetar i regel vid en pedagogisk institution. De lärarutbildare som är specialister på undervisningsmetodik kan vara anställda på en pedagogisk institution eller på en speciell institution för lärarutbildning. Deras bakgrund är ofta en lärarutbildning och gedigen egen erfarenhet som lärare. Numera arbetar även ämnesdidaktiker i lärarutbildningen och de kan höra hemma på en ämnesinstitution, på en speciell institution för lärarutbildning eller på en pedagogisk institution. Nya ämnen som didaktik och lärares arbete är under utveckling vid landets högskolor vilket gör situationen allt mer komplex.

Var och en av dessa grupper har tyngden i sina meriter och sin kompetens på olika områden. Detta framträder ganska klart i de svar som kommit in på den enkät (se bilaga 4) som sänts ut via det nationella nätverket för lärarutbildare i matematik (LUMA). 35 personer har svarat på enkäten. Detta utgör endast en mindre del av de lärarutbildare som finns och arbete pågår för att komplettera den bild som kommit fram i dessa svar. Det är oklart vad som gör att lärarutbildarna varit så obenägne att besvara enkäten trots flera upprepade utskick. Kanske är det en pressad arbetssituation? Några statistiskt säkerställda slutsatser kan inte dras av

studien men vi anser ändå att svaren ger en god bild av de lärarutbildarnas i matematik situation.

Av dem som enbart undervisar i ämnesstudierna i matematik är några forskarutbildade men inte alla. Det är inte självklart att dessa personer själva har en lärarutbildning. Denna grupp är liten i svarsmaterialet.

De som representerar pedagogik har i regel ingen akademisk utbildning i matematik (i meningen poäng i ämnet). Några har disputerat i pedagogik vid relativt hög ålder. Även denna grupp är liten i materialet.

Den näst största gruppen bland de svarande är utbildade till låg- och mellanstadielärare. De har i regel ingen akademisk utbildning i matematik och oftast inte heller någon annan kompletterande utbildning.

Den största gruppen bland de svarande har ämneslärarutbildning med 40 eller 60 poäng matematik. Det förekommer i denna grupp att man kompletterat sin utbildning med kurser i matematikdidaktik eller pedagogik.

Dessutom förekommer bland de svarande en grupp som kan kallas matematikdidaktiker. Med det avses lärarutbildare som på ett avsevärt sätt utvecklat sin kompetens inom matematikens didaktik genom omfattande kurser eller delar av en forskarutbildning. De har i regel god kompetens också i matematik samt lärarutbildning och pedagogik. Det förefaller av svaren som om det finns en tendens att som lärarutbildare vilja kompetensutveckla sig inom matematikens didaktik. En större andel av ämneslärarna bland lärarutbildarna verkar vara inne i en magister- eller forskarutbildning i matematikens didaktik.

Av resultaten från sammanställningen av enkäten är det intressant att se på fråga 5 om vilken kompetenshöjning lärarutbildarna önskar sig. Frågan berörs igen lite längre fram. Med hjälp av svaren på enkäten kan ges förslag till konsekvenser för lärarutbildarnas del. Den tydliga uppdelningen i olika kategorier av lärarutbildare med olika studiebakgrund pekar på att inslag av kompetensutveckling som överbryggar olikheter och skapar ömsesidig förståelse för de olika gruppernas kompetens kan vara av värde. Inom lärarutbildningen förekommer tyvärr revirtänkande och fraktionsbildning, som inte underlättar för de studerande och som skapar problem vid genomförandet av utbildningen. Det är naturligtvis önskvärt om alla som undervisar inom lärarutbildning i matematik har egna akademiska studier i matematik på någon nivå, själv har lärarutbildning samt god kännedom om matematikdidaktisk forskning. Tyvärr visar det sig vid rekrytering av personal till lärarutbildning att ytterst få personer har denna tredubbla kompetens.

### **Hur ser rekryteringsituationen ut?**

Det har inte varit möjligt att inom ramen för denna studie göra en statistisk undersökning av rekryteringen av lärarutbildare. Bilden bygger på aktuella kontakter med högskolor och universitet i samband med tillsättningar

av tjänster inom området. Ett flertal högskolor har rapporterat att de har svårigheter att finna både lektorer och adjunkter i matematik som också har lärarerfarenhet. I annonser till lärarutbildningen söker högskolorna i regel personer med god akademisk kompetens i matematik, egen lärarutbildning, egen erfarenhet av undervisning i skolväsendet och matematikdidaktisk kompetens. Det visar sig att ytterst få personer i landet har formella dokument som styrker en sådan bred kompetens. Ofta slutar tillsättningsärendena med att man får välja en av kompetenserna och avstå från de andra. Som exempel kan tas ett lektorat på en av högskolorna som varit vakant sedan 1996 och nu utannonserats för tredje gången. Det finns åtta sökande men endast fyra av dem har disputerat i matematik. Av dessa fyra har ingen lärarutbildning och heller ingen egen erfarenhet av undervisning i skolväsendet eller i lärarutbildningen. Tillsättningen av ett lektorat/adjunktur på ett av universiteten slutade med att man tillsatte en adjunkt med gedigen undervisningserfarenhet, god ämneskunskap men utan matematikdidaktisk kompetens. Någon lektor gick inte att uppbringa. Till ett lektorat på en av lärarutbildningarna söktes en person som disputerat i matematikdidaktik och hade 80 poäng i matematik. Trots en mycket ingående aktiv rekrytering från universitets sida fick man anställa en lärare som disputerat i pedagogik och med 40 poäng i matematik. Vid andra högskolor har man tillsatt lektorer men förlorat dem igen efter kort tid till annan arbetsplats tex dataföretag och därmed fått göra om en tidsödande och dyrbar rekryteringsprocess. Bristen på forskarutbildade matematiker och matematikdidaktiker med intresse av att arbeta inom lärarutbildning är mycket stor och allvarlig. Det har tidigare förekommit att matematiker sett ner på de lärare som undervisar inom lärarutbildningen. Frågan är om denna syn lever kvar och bidrar till att försvåra rekryteringen. De doktorer i matematik med ämnesdidaktisk inriktning som kan komma fram genom forskarskolan kan bli ett mycket viktigt personaltillskott i denna svåra rekryteringssituation (se bilaga 5).

### **Vilket behov av kompetensutveckling finns bland högskolans lärarutbildare?**

Frågan om behovet av kompetensutveckling har riktats till lärarutbildningens lärare i den tidigare nämnda enkäten och svaren redovisas här. Bland de svarande kan urskiljas två grupper. Den ena gruppen (knappt hälften av de svarande) lämnar frågan obesvarad. Det kan beror på att de inte funderat i sådana termer efter som möjligheterna till kompetensutveckling varit ganska begränsade. Det skulle även kunna bero på att de anser att de har tillräcklig kompetens. Den andra gruppen kan utförligt redovisa en rad olika behov av kompetensutveckling både inom olika delar av matematiken och inom matematikens didaktik. Här nämns forskningsmetodik, utbildningsteorier, epistemologi, vad kan forskningsrapporter bidra med i skolan, problemlösning, huvudräkning, kommunikation,

språkets betydelse för matematikinläringen, begreppsförståelse, interaktion i klassrummet, läroplaner och kursplaner, hur lär sig elever matematik bäst, datorn som verktyg vid lärande i matematik, matematiksvårigheter, PBL, att använda portfolio, kontinuitet i lärandet osv. När det gäller matematik nämns framför allt diskret matematik, analys och algebra. Här är preciseringarna inte så många.

En följdfråga blir då vilka resurser som är tillgängliga för lämplig kompetensutveckling av verksamma lärarutbildare? I det förslag till program som föreligger för den av Riksbankens Jubileumsfond (2000) inrättade forskarskolan framgår att det kommer att erbjudas kurser i forskarskolans regi som kan vara av intresse för vissa lärarutbildare. Resurser som gör det möjligt för lärarutbildare att ta del av sådana kurser är angelägna. Det står nu klart att bland de tjugoen doktorander som år 2001 antagits i forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning finns ett flertal som är eller har varit verksamma inom lärarutbildningen. Söktrycket var mycket stort (136 sökande till de första 15 doktorandtjänsterna) och bland dem som inte fick plats finns en rad lärarutbildare. Eftersom de är anställda vid universitet och högskolor har de möjligheter till kompetensutveckling inom tjänstens ram. De två andra forskarskolor i pedagogiskt arbete som också berör lärarutbildningen och som beslutats av regeringen måste också betraktas som en resurs för kvalificerad kompetensutveckling av lärarutbildare. Forskarskolornas kurser är en möjlighet för lärarutbildare som måste beaktas.

Detta räcker emellertid inte för att ge lärarutbildarna önskvärd kompetensutveckling. En plan för systematisk kompetensutveckling av lärarutbildarna bör utvecklas och kurser skapas som kan erbjudas på nationell nivå. NCM kan ta på sig en viktig roll i att samordna och organisera sådan utbildning. Det skulle även kunna bidra till att lärarutbildarna själva får en bättre överblick över hur lärarutbildning läggs upp vid olika universitet och högskolor, en fråga som ventilerats och behandlats vid ett flertal LUMA-konferenser utan något mera genomgripande resultat.

---

# Utbildningsanordnare för kompetensutveckling

En stor satsning på kompetensutveckling för lärare i matematik kommer att kräva många aktörer och arenor för genomförandet. Av den anledningen är det viktigt att kartlägga möjligheter och befintligt kursutbud. Vad finns att bygga på och hur kan det förädlas? Vilka utbildningsanordnare och tillhörande utbildningsutbud – vad gäller matematik och matematikdidaktik – finns idag vid våra universitet och högskolor? Vilka kurser ges och av vem? Vilka utbildningsanordnare finns utanför högskolorna och vad erbjuder dessa? Vilket innehåll avseende litteratur, form, omfattning har de erbjudna kurserna – inklusive magister- och forskarutbildning? Vilket utbud av relevanta kurser för kompetensutveckling finns redan idag? Vilket utbud skulle kunna utvecklas med hjälp av de medel som högskolorna har till sitt förfogande oberoende av den aktuella satsningen?

## Universitet och högskolor – utbud, former och bild av matematikämnet

En sökning i ASKen (databasen över akademiska kurser i landet) på matematik ger som resultat cirka 650 kurser vid landets universitet och högskolor. Av kursrubrikerna framgår att cirka 50 av dessa riktar sig till lärare. Det är flera kurser som används i utbildning och fortbildning av lärare, utan att det direkt framgår i kurs titeln. Kurser i de traditionella, grundläggande områdena som analys, algebra, linjär algebra, talteori, geometri, matematisk statistik återfinns givetvis på många högskolor.

För att få en mer detaljerad bild av kursernas innehåll, form och uppläggning har vi gått igenom kurskataloger och informationsmaterial från ett stort antal universitet och högskolor. I det följande ges en beskrivning och kommentar till ett urval av de kurser som kan vara intressanta för kompetensutvecklingsprogrammet och som kan tjäna som förebilder eller inspiration för liknande kurser på fler orter. I bilaga 3 beskrivs en rad kurser som tydligt vänder sig till lärare. Ett urval av dessa kurser har ett didaktiskt perspektiv. De matematikdidaktiska kurserna ges i många fall på deltid och ibland även på distans. Det skulle alltså vara möjligt att direkt använda dessa i ett kommande kompetensutvecklingsprogram.

En del av de traditionella fristående kurserna i matematik är sådana att undervisningsformerna skulle kunna utvecklas. Undervisning i form av föreläsningar i storgrupp i kombination med problemlösning i mindre

grupper är fortfarande en vanlig modell. Så har flertalet lärare i äldre utbildningar mött sin matematik. I en kompetensutvecklingssituation har lärare förväntningar om att erbjudas undervisning, studier och arbete i mer varierade former och där resultat från forskning om lärande och undervisning ingår och tillämpas också i kompetensutvecklingen. Det kan komma att innebära krav på förändring av arbetsätt och arbetsformer. Dessutom kommer samarbete mellan ämnestoretiker och ämnesdidaktiker krävas för att det ordinarie kursutbudet ska bli en del av kompetensutvecklingen.

När det gäller kurser i matematik som inte riktar sig speciellt till lärare gäller att de för närvarande i regel ges på dagtid och helfart eller möjligen halvfart. Det innebär att en lärare som har full tjänstgöring i skola knappast kan delta. Ska kurser av det slaget användas i kompetensutvecklingsprogrammet krävs alltså en anpassning av kurstid och fart, såvida lärare inte friställs helt från sin undervisning. Det sista kan knappast vara genomförbart i större skala.

Alla universitet och högskolor har inte svarat på enkäten. Av de svar som inkommit framgår att det redan finns många intressanta kurser att utgå från i en kompetensutvecklingssatsning. Fler kurser kan konstrueras med utgångspunkt från dessa. Exempel på hur ett centralt utbud av kurser kan se ut ges i bilaga 7. Modeller för kurser som kan ges lokalt beskrivs av Grevholm & Wennström, (1998; 1999). Se även bilaga 9.

## **Hur framstår ämnet matematik i informationsmaterial och kurskataloger?**

I grundskolans och gymnasieskolans kursplaner finns ämnet matematik beskrivet under rubriken Ämnets uppbyggnad och karaktär. Där görs försök att i några korta stycken beskriva vad matematik i skolan innebär.

I uppdraget till NCM från regeringen beskrivs bakgrunden på följande sätt:

Matematik är ett mångfacetterat ämne och ett viktigt område för problemlösning och metodutveckling. Matematik är inte bara siffror, symboler och räknande utan också ett språk, ett verktyg, en konst, en lek och mycket annat. Matematik är till nytta för var och en i vardagslivet. Matematiken är dessutom rolig. Kunskaper i matematik är ett verktyg för den enskilde att beskriva och analysera omvärlden och sin egen situation. Förmågan att använda matematik blir då av samma karaktär som att använda det egna språket.

(Utbildningsdepartementet, 1999)

Under läsningen av kurskataloger kan man notera att matematiken i regel knyts till naturvetenskap och teknik och ses som ett verktyg. Aspekter som berör mänskliga problem och konstruktioner, kultur,

konst, sociala perspektiv är ovanliga. Några påståenden som görs verkar tveksamma som tex att studier i matematik tränar upp förmågan till analytiskt, kritiskt och systematiskt tänkande (bilaga 6).

Några exempel på ämnesbeskrivningar:

Matematik är ett brett ämne med många nyanser, alltifrån enkel aritmetik till matematisk forskning. Studier i matematik tränar upp förmågan till analytiskt, kritiskt och systematiskt tänkande och ger det språk som används inom teknik och naturvetenskap.

Teknik, ekonomi och samhällsliv bygger alltmer på matematik. Dess användning ökar ständigt.

Omedelbart efter det meddelar man att: *Undervisningen består av föreläsningar, lektioner och datorlaborationer.*

Matematik är det verktyg vi alla behöver för att lösa problem på entydigt och fungerande sätt. Matematik kan ses som ett "språk" som används inte bara av tekniker utan också tillämpas av naturvetare, samhällsvetare, ekonomer och pedagoger. Undervisningen bedrivs ofta i form av storföreläsningar medan räkneövningarna sker i 30-grupp.

Matematik som vetenskap har utvecklats från försök att hitta enkla generella lagar som beskriver och förklarar olika fenomen vi ser omkring oss såsom tex planeternas rörelse, beteende och utveckling av biologiska system, osv. Många av dessa försök har varit framgångsrika, fast det finns fortfarande gott om olösta problem. Idéer och metoder som har utvecklats är djupa och ofta spännande och dess vidareutveckling och användning kräver ofta stor fantasi och djup deduktiv resonemang. Att studera matematik innebär i första hand att bli bekant med de grundläggande matematiska koncept och idéer samt lära sig använda de verktyg som behövs för att tillämpa matematiska koncept inom andra vetenskaper.

Vi vill verka för att studenterna ska få en annan syn på matematik och framför allt matematikens historia. Det ska de ha nytta av i sina jobb som grundskollärare. Studenterna som är ute på praktik får ofta prova på det annorlunda undervisningssättet. De får mycket positiv respons. Barnen är nyfikna och lever sig in i situationen. Vi vill hjälpa eleverna att förstå matematik och varför det är så viktigt. Framför allt tycker vi att man måste visa barn att matten är ett praktiskt verktyg.

Varför syns det så sällan i katalogerna vad ämnet matematik är och vad studier i ämnet innebär? Hur ska unga människor få lust att läsa matematik? En del nyare utbildningar och områden presenteras i glättade broschyrer i flerfärgstryck och ser mycket attraktiva ut. Varför ska man fastna just för matematik när dessa spännande nya utbildningar ser så lockande ut? Vet unga studenter idag vad det innebär att studera matematik? Är det så att ämnet inte alls behöver marknadsföra sig eller presentera sig? Eller sker det på något sätt som undgått oss?

För studier av matematik på universitet och högskola behövs en beskrivning av matematikämnets struktur och uppbyggnad och ämnets karaktär och utveckling. Om man ska kunna rekrytera unga människor till studier av matematik (både blivande lärare och andra) är det nödvändigt att ämnet framställs så att dess betydelse och vikt, framväxt och historia blir synlig. På motsvarande sätt skulle matematikens didaktik som är en ung vetenskap behöva beskrivas och framträda så att den kan uppfattas av unga studenter.

I den nya lärarutbildningen är det särskilt viktigt att ämnet matematik framstår som intressant att välja som inriktning och specialisering och att studenter önskar undervisa i skolämnet matematik. Vi vet att många unga väljer bort matematik tidigt i sin utbildning trots att de har goda förutsättningar att lyckas med studier i matematik (Grevholm, 1993; Svensson, 1995; Andersson, 1999). Vi vet även att många som idag undervisar i matematik inte ser sig som i första hand matematiklärare utan som lärare i något annat ämne (Grevholm, 1998). Vi behöver lärare som har ett djupt engagemang för ämnet och som kan inspirera sina elever och få ämnet att framstå som det spännande, kreativa, fantastiska ämne det kan vara.

På grund av att ämnet matematik inte framträder i kurskataloger eller annat tillgängligt material för studenter har vi bett universitetslektor Per-Anders Ivert (Lund) att i en artikel ge sin bild av ämnet och dess betydelse. Artikeln återfinns i bilaga 8. Under sommaren 2001 har även universitetslektor Håkan Lennerstad i tidskriften *Tvärnsnitt* nr 2/2001 publicerat en populärvetenskaplig artikel där han beskriver ämnet matematik (Lennerstad, 2001).

### **Ordinarie kursutbud och centra för kompetensutveckling vid universitet och högskolor**

Det som redovisats ovan och i bilaga 3 är ordinarie kursutbud enligt katalogerna. Det förekommer även skraddarsydda, ofta utlokaliserade kurser, som inte syns i detta utbud. Vidare har universitet och högskolor i regel någon form av centrum för kompetensutveckling där skolor eller kommuner kan beställa och köpa kurser och utbildning, som då planeras efter beställarnas behov. Centra för kompetensutveckling drivs på kommersiella grunder och verksamheten ska vara självbärande. De har i regel



inte egna lärare utan köper in lärarkrafter från institutionerna. Hur stor denna verksamhet är i landet är oklart. För kommuner gäller att om lärare deltar i dessa centras ordinarie kursutbud får beställaren betala hela verksamheten. Lärare som går på ordinarie fristående kurs får utbildningen utan kostnad från anordnaren. De enda kostnaderna blir för tid, resor, studentkårsavgift och litteratur.

Möjligheten finns naturligtvis även att universitet och högskolor ger kurser i sitt ordinarie utbud på utlokaliserad plats. Exempel på sådana satsningar ges i bilaga 3 och 9.

### **Varför bör universitet och högskolor vara anordnare av kompetensutveckling?**

Kurser på universitet och högskola kan förväntas hålla hög akademisk kvalitet och ges av specialister. För de deltagande lärarna resulterar kursen, förutom i kunskaper som kan användas i undervisningen, i en dokumenterad kompetensutveckling i form av akademiska poäng som kan vara av nytta både i löneförhandlingar och vid fortsatt meritering. En professionalisering av läraryrket kräver att kompetensutvecklingen blir erkänd och synlig. Grundutbildningen av lärare sker sedan 1977 inom ramen för universitet och högskolor. Lärarutbildningen ska bygga på en vetenskaplig grund och behovet av att stärka forskningsanknytningen av den har debatterats sedan 1988. Självklart måste då även kompetensutveckling av lärare vara forskningsanknuten och hålla åtminstone samma kvalitet som den grundläggande lärarutbildningen. Universitet och högskolor borde kunna leva upp till kravet om forskningsanknytning. Kurser av detta slag kan byggas på och leda till en forskarutbildning inom utbildningsvetenskap. Vidare skulle ett samarbete mellan högskolornas och skolornas lärare ge en viktig kompetensutveckling för högskolornas personal, som behöver en realistisk bild av svensk skola samt en utbyggnad av den matematikdidaktiska kompetensen och kunskaper om skolmatematikens villkor och ställning. Magisterprogram kan konstrueras med kurser som ges i kompetensutvecklingen. Under några år framöver kommer Sverige att ha små inkommande studentkullar jämfört med vad som varit fallet under senare år. Det betyder att det borde finnas ledig kapacitet vid universitet och högskolor för en satsning på lärares kompetens. Det borde även finnas möjlighet att satsa på lärarutbildares kompetensutveckling.

### **Andra kursanordnare**

Det finns många arrangörer av kurser och utbildning i Sverige. Välkända aktörer sedan länge är Liber-Hermods, läromedelsförlagens kursverksamhet, fackförbunden, enskilda läromedelsförfattare, lärarutbildare med eget företag, konsulter, bildningsförbunden och kursverksamheterna osv.

Något nyare på marknaden är en rad Internetbaserade företag som *Theeducation*, *Attveta* och *Brain Books*. I deras utbud verkar kurser i matematik avsedda för lärare vara sparsamt förekommande.

För skolor och kommuner som vill anlita privata kursanordnare finns behov av att utveckla en beställarkompetens. Det behövs kriterier och kvalitetssäkring för att den utbildning som erbjuds av privata anordnare av kompetensutveckling ska vara godtagbar. I huvudrapporten (NCM, 2001) behandlas frågan om att utveckla underlag för sådana kriterier och för en diskussion om vad beställarkompetens innebär. Det arbetet baseras bland annat på tidigare erfarenheter av kompetensutveckling (Emanuelsson, 2001) och den forskning som redovisas i delrapporten *Hur kan lärare lära?* (Mouwitz, 2001).

### **Vem ska påverka utformningen av kompetensutvecklingen?**

Ska lärarna formulera sina behov av ny kompetens eller ska kursgivaren styra utbudet? Är det möjligt att åstadkomma en kombination av de två styrprocesserna så att det passar båda parter? Det är kommunen som är ytterst ansvarig för att lärare erbjuds kompetensutveckling. I praktiken innebär det att skolledarna skall planera för lärares kompetensutveckling. Även lärarna själva har ansvar för att de får rätt kompetensutveckling. Lärarnas vilja att få kompetensutveckling saknas inte, problemen syns snarare ligga i att tilldelade resurser i form av tid och medel för kurskostnader saknas. I de fall som läraren själv har önskemål om vilken typ av ny kompetens som han/hon tror kan vara till bäst glädje och nytta är det förmodligen rimligt att lyssna till det. Även för lärare gäller att lärandet går lättare om det är roligt och det är säkert mer givande att få den kompetensutveckling man efterfrågar än att bli påtvingad en kurs som någon annan har valt ut till en.

### **Betydelsen av resurser och tid**

I enkäter och utvärderingar om hur lärare ser på kompetensutveckling framgår det att tiden är den mest avgörande faktorn. Tid är också den viktigaste faktorn för lärande rent allmänt. Lärarna behöver tid för att utveckla sin kompetens. Bättre arbetsorganisation och resurser måste satsas på att skapa tidsutrymme för lärare att reflektera över sin verksamhet, studera nya rön och utveckla sin undervisning. Detta innebär att resurserna för kompetensutveckling i hög grad måste gå till att frigöra lärare från annat arbete så att utrymme skapas för studier. Det är inte rimligt att tro att många lärare samtidigt kan friställas på heltid för studier. Om lärare ska studera på deltid med IT-stöd måste det finnas ett utbud av kurser som ges på deltid och med ett realistiskt tempo så att kurserna är genomförbara med framgång. Kurser på kvartsfart eller långsammare har visat sig vara rimliga om det finns en önskan att lärare ska

kunna koppla kompetensutvecklingen till den dagliga verksamheten och fördjupa den i form av utvecklingsarbeten eller undersökningar. Lärare måste friställas från undervisning i motsvarande grad. Vidare har erfarenheter av kompetensutveckling för förändring och utveckling av skolan visat att det är önskvärt att en hel grupp lärare från samma skola deltar i samma kurser. De behöver då resurser för att lokalt kunna arbeta samman och pröva och utveckla sina nya kunskaper och synsätt.

Lärare vittnar om att det förekommer att skolledare intecknar deras utrymme för kompetensutveckling med något program som erbjuds hela lärarkollektivet på skolan vid ett tillfälle. När läraren så själv framför önskemål om att delta i en viss utbildning blir svaret att tiden och resurserna för kompetensutveckling är slut. Regelverket kan behöva ses över för att tillgodose lärares rättmätiga krav att få påverka vilken utbildning de ska genomgå. En långsiktig plan för lärares kompetensutveckling borde upprättas. Ett sådant krav finns uttryckt i Skollagen.

I den nya lärarutbildningen är det väsentligt att noga överväga hur kurser ska läggas ut i tiden för att göra det möjligt både för lärarstudenter i grundutbildning och verksamma lärare i skolorna att delta i samma kurser. Kanske måste ett större antal kurser läggas ut så att de löper över längre tid och schemamässigt så att de kan inordnas i en undervisande lärares schema. Dessa frågor hoppas vi att få möjligheter att återkomma till. En viktig anledning till att tidigare satsningar på kompetensutveckling inte har fullföljts kan vara att den tid som avdelats för lärarna till arbete med kompetensutveckling inte varit tillräckligt omfattande i förhållande till det arbete som krävdes. Se vidare i Emanuelsson (2001).

### **Kan vi lära något av internationell forskning när det gäller kompetensutveckling?**

Vid en internationell konferens i Japan i augusti 2000 behandlades frågor om lärarutbildning och kompetensutveckling. I presentationerna redovisades flera studier om kompetensutveckling av verksamma lärare. Det visar sig att problembeskrivningen i de flesta länder har stora likheter med den situation vi befinner oss i Sverige. Det är viktigt att gå igenom det materialet och se vad vi kan lära av det. De frågor som väcktes av arbetsgruppen och som ska behandlas i kommande böcker och tidskrifter kommer att vara aktuella för svenska lärares utbildning (Grevholm, under tryckning b). Gemensamma problem är svårigheter att rekrytera lärare, svårigheter att få goda studenter till lärarutbildningarna och svårigheter att få lärare att stanna i yrket. Vidare är man i många länder sysselsatta med frågor om vad som är relevant innehåll i matematiklärarutbildningen, vilka styrmekanismer i samhället det är som påverkar lärarutbildningen, lärares samhällsuppgift, hur värdefullt lärande ser ut i framtiden osv. Problemet att forskningens resultat inte når ut i klassrummen och gapet mellan forskare och lärare har alltmer fokuserats och

diskuterats och en tendens är att genom kompetensutveckling erbjuda lärare att gå in i rollen som forskare (Grevholm, 2001c). Mer om vad internationell forskning har att lära oss om kompetensutveckling av lärare i matematik presenteras i delrapporten *Hur kan lärare lära* (Mouwitz, 2001).

### **Exemplariska kursplaner och litteraturlistor**

En del av de ovan och i bilaga 3 och 9 beskrivna kurserna har studerats mera ingående. En möjlig väg att ta vara på det bästa från dem i kompetensutvecklingen vore att via NCM utveckla modellkursplaner för kurser som kan ges nationellt på distans och med IT-stöd. Då kan lokala krafter, resurspersoner, fungera som handledare och kurssamordnare. En utbildning av dessa resurspersoner kommer att övervägas mot bakgrund av erfarenheter från tidigare satsningar på kompetensutveckling och mot vad forskningen visar (Emanuelsson, 2001). I bilaga 7 ges ett exempel på hur ramkursplaner för nationellt bruk kan utformas. Exempel på hur arbetet med frågor kring organisation av och innehåll i tänkbara kurser kan behandlas beskrivs av Grevholm & Wennström (1998; 1999) utifrån ett konkret genomfört samarbete. se även bilaga 9.

Den modell som förespråkas innebär att alla matematiklärare på en skola utbildas tillsammans. Studierna bör innehålla både teori och praktik. Teorin studeras under handledning av erfarna lärarutbildare och praktiken innebär utvecklingsarbete eller aktionsforskning tillsammans med de egna eleverna på skolan. Arbetet bör dokumenteras skriftligt i rapporter av samma form som examensarbeten. En viktig anledning att göra så är att skrivprocessen är en stark del av lärandet och att en djupare insikt nås om sådant man lär sig genom att skriva om det.

I vilken mån kan sådana kurser utgöra delar av ett nationellt utbud även i grundläggande lärarutbildning? Det vore säkert av stort värde för lärarstudenter under sin verksamhetsförlagda utbildning att vara delaktiga i kompetensutvecklingskurser av detta slag. De kan medverka i ett utvecklingsarbete eller i en aktionsforskningsprocess och bidra till dokumentationen. Kanske kan deras eget examensarbete knytas till ett sådant projekt? Planer av detta slag har redan utarbetats inom vissa lärarutbildningar, tex genom Arena Lärande vid Luleå tekniska universitet.

---

# Referenser

- Adolfsson, U. & Nilsson, Å. (2000). *Övergångsproblem i matematik*. Högskolan Kristianstad, examensarbete.
- Andersson, A. (1999). *Matematik, flickor och gymnasievalet*. Examensarbete 1999:E21. Lund: Matematikcentrum.
- Dahland, G. & Emanuelsson, G. (1998). *LUMA 1998. Dokumentation*. Göteborg: Göteborgs universitet.
- Ejleffjård, L. & Haraldsson, L. (2000). *Progressiv eller traditionell matematikundervisning?* Högskolan Kristianstad, examensarbete.
- Emanuelsson, G. (2001). *Svårt att lära – lätt att undervisa?* NCM-rapport 2001:3, Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- Felixson, M. & Kral, L. (2000). *Hur kan man hjälpa elever med matematiksvårigheter? Vad är matematiksvårigheter?* Högskolan Kristianstad, examensarbete.
- Franke, S. & Lundgren, U. P. (2001). *Dagens Nyheter*, 2001 04 26, DN debatt.
- Gjone, G. (2001). Läroplaner och läroplansutveckling i matematik. I B. Grevholm (red), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. (1993). *Naturvetenskap och teknik. Kan forskningsinformation stimulera?* Stockholm: Verket för högskoleservice.
- Grevholm, B. (1998). Vad vet fröken om flickor och matematik? I L. Lindberg & B. Grevholm (red), *Kvinnor och matematik. Konferensrapport från Göteborg, 1996*. Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik.
- Grevholm, B. (under tryckning a). *En grupp lärarstuderandes bakgrund, förkunskaper och inställning till matematik vid studiernas början. Rapport från en forskningsstudie*. Högskolan i Kristianstad.
- Grevholm, B. (under tryckning b). *Teacher education in transition – The case of Sweden*. Artikel presenterad vid International Congress of Mathematics Education i Tokyo 2000.
- Grevholm, B. (2001a). Flickor, pojkar och matematik. *Familjedaghem*, 21(1), 21-26.
- Grevholm, B. (red.) (2001b). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. (2001c). Läraren som forskare i matematikens didaktik. Några exempel och reflektioner. I B. Grevholm (red), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. & Wennström, T. (1998). Samverkan högskola – skola. *Nämnamnaren* 25(3), 30–31.
- Grevholm, B. & Wennström, T. (1999). Samverkan högskola – skola II. *Nämnamnaren* 26(4), 36–39.
- Hellström, L. (2000). *Vad blev det av studenten?* Malmö: Malmö Högskola.

- Husén, T. (1994). *Skola och universitet för 2000-talet. En utbildningsforskarens perspektiv*. Stockholm: Atlantis.
- Högskoleverket (1999). *Räcker förkunskaperna i matematik?* Stockholm: HSV
- Isaksson, A-C. & Zetterberg, P-O. (1998). *Genomströmningen för studerande MaNO 4–9*. Malmö: Malmö högskola.
- Johansson, B. (2001). Hur klarar våra elever matematiken? *Hög tid för matematik*. NCM-rapport 2001:1. Göteborg: NCM, Göteborgs Universitet.
- Lennerstad, H. (2001). Matematik och mänsklighet. *Tvårsnitt 2001(2)*, 22-43.
- Lindblad, T. (1978). *Blivande klasslärares ingångskunskaper i matematik*. Institutionen för praktisk pedagogik, Mölndal: Göteborgs universitet.
- Ljung, B-O. (1987). *Klasslärarkandidaters räkneförmåga*. Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.
- Löwall, S. (2001). *Sökande och antagningsbild för studenter som valt inriktningar med matematik*. Karlstad: Karlstads universitet.
- Mowitz, L. (2001). *Hur kan lärare lära?* NCM-rapport 2001:2, Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- NCM (2000). *Tid för matematik – rapport 1 november*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- NCM (2001). *Hög tid för matematik*. NCM-rapport 2001:1. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- Niss, M. (2001). Mål för matematikundervisningen. I B. Grevholm (red), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
- Riksbankens jubileumsfond (2000). *Forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning*. Stockholm.
- Rönnerberg, I. & Rönnerberg, L. (2001). *Minoritets elever och matematikutbildning*. Stockholm: Skolverket och Liber distribution.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding mathematics*. London: Falmer Press.
- Skolverket (2001). *Lärare i gymnasieskolan och gymnasial vuxenutbildning, tillgång på och behov av lärare i de flesta karaktärsämnen*. Stockholm: Skolverkets rapport nr 199.
- Svensson, A. (1995). *NOT-häfte nr 3*. Stockholm: Fritzes förlag.
- Turgman, E. (2000). Om lärarkandidaten får välja. *Nämnan 27(4)*, 39–41
- Universitetskanslern (1995). *Nationell utvärdering av grundutbildningen i matematik*. Kanslersämbetets rapport 1995:5.
- Utbildningsdepartementet (1999). *Uppdrag till Göteborgs Universitet. Om utbildningsinsatser rörande utbildningen i matematik*. U1999/3992/S. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Wallby, K. m fl (2000). *Nämnan TEMA: Matematik från början*. Göteborg: NCM, Göteborgs Universitet.
- Wistedt, I. (2001). Increasing the participation of women in tertiary mathematics, physics and technology: An evaluation of a Swedish initiative. I B. Grevholm, I. Sigstam & A. Vretblad (red), *Kvinnor och matematik, konferensrapport Uppsala 1999*. Uppsala universitet: Uppsala.

# 1–7-läroarutbildningen i matematik

## Exempel på organisation och utformning

### *Malmö Högskola*

Malmö högskola erbjuder två kurser, båda i matematik för 1–7-lärare, 1–5 poäng och 6–15 poäng. Den första kursen är inriktad på att ge kompetens att undervisa i grundskolans första årskurser, den andra för skolår 1–7. Kursernas syfte anges vara att de studerande ska kunna inhämta både ämnesteoretiska och ämnesdidaktiska kunskaper i matematik relevanta för undervisningen i grundskolan första årskurser.

För den första kursen kan man under rubriken *Mål och innehåll* inte läsa ut någonting om vad det matematiska innehållet är. Av litteraturlistan framgår att fyra av de fem böckerna är matematikdidaktiska. Det finns även en lista med referenslitteratur med femton titlar, alla inom området matematikdidaktik. Det är alltså mycket oklart om något av det som i kursplanen kallas ämnesteori (matematik) alls ingår i denna kurs. En gedigen satsning på ämnesdidaktik föreligger emellertid. En av de lärare som undervisar på kursen skriver själv om den så här:

Vi skulle behöva mycket längre tid än fem veckors studier för att först genomföra en synvända i båda dessa kategorier av studerande, bygga upp och lyfta fram deras egen kunskap, för att sedan kunna bearbeta, värdera och problematisera de didaktiska aspekterna.

(Anselmsson, 1999)

I kursplanen för den andra kursen framgår av målen att områdena geometri, aritmetik och statistik ska behandlas. Bland de för skolår 1–9 relevanta ämneskunskaperna nämns taluppfattning, huvudräkning, närmevärde, överslag, hur olika räknesätt hänger ihop och hur positionssystem är uppbyggda. Begrepp som delbarhet, printal, del av, procent och förändringsfaktor behandlas liksom även hur man från aritmetiska och geometriska talföljder kan generalisera till linjära funktioner och exponentialfunktioner. Vidare nämns statistik och sannolikhet samt vissa enkla konstruktioner och geometriska beräkningar. Matematikens historiska

utveckling och problemlösning ingår. Litteraturlistan innehåller en förlagsutgiven bok på gränsen mellan matematik och matematikdidaktik, *Laborativ geometri*, (78 sidor), samt tre av lärarna skrivna, lokalt utgivna kompendier, (102 sidor totalt). De tre övriga matematikdidaktiska böckerna på listan omfattar ca 600 sidor. Det förefaller som den ämnesteoritiska litteraturen dels är mycket begränsad, dels i hög grad lokalt producerad. I den valbara litteraturen är alla titlar utom en matematikdidaktiska. Det vore intressant att veta hur mycket dessa studenter får av matematikämnet som de inte redan har mött på gymnasienivån.

### *Karlstads universitet*

På nivå A finns en obligatorisk kurs om 15 poäng för grundskolläraryrket 1–7. I *Matematik för lärare* anges delkursens innehåll som bla logik, mängdlära, kombinatorik och grafteori, induktionsbevis och rekursion, relationer och funktioner, statistik och sannolikhetslära, kongruensavbildningar, vektorer i planet och rummet. Linjära ekvationsystem och matriser, talmängderna  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$  och  $R$  samt modulatoräkning. Komplexa tal, polynom och algebraiska ekvationer. Talbegreppet och positionssystemets betydelse för taluppfattningen, problemlösning samt en rad områden inom didaktiken som matematikens språk, problemlösningstrategier, laborativt och undersökande arbetssätt, granskning av läromedel, urval av stoff, diagnosticering med analys och åtgärdsförslag. I delkurs 2, *Matematiken i historien* tillkommer bla primitivretorisk matematik, Pythagoras sats, talbeteckningssystemet, inkommensurabiliteten, det axiomatiskt-deduktiva vetenskapsidealet, Euklidisk geometri, kongruensgeometri och likformighetsgeometri, tredje likformighetsfallet i praxis, transversalsatsen, kordasatsen och bisektrissatsen, geometrisk problemlösning, delbarhet, primtal, Euklides algoritim, ändliga och oändliga kedjebråk, diofantiska ekvationer, aritmetikens fundamentalsats med tillämpningar samt en rad historiskdidaktiska områden. Kurslitteraturen innehåller en mycket omfattande amerikansk matematikbok på cirka 500 sidor, boken *Matematiken i historien* som omfattar ca 800 sidor samt två ämnesdidaktiska böcker på ca 350 sidor sammanlagt.

Efter denna kurs kan de 1–7-studerande välja bland ett antal kurser som påbyggnad.



# 4–9-läroarutbildningen i matematik

## Exempel på organisation och utformning

### *Malmö högskola*

Vid högskolan i Malmö har de studerande till 4–9-lärare en enda kurs omfattande 30 poäng, som är delad i fem delkurser: aritmetik med didaktik 6 p, geometri med didaktik 6 p, algebra, statistik och sannolikhetslära 7 p, funktionslära med didaktik 6 p och matematikdidaktik 5 p. Kursen aritmetik med didaktik innehåller i stort sett det som beskrivs ovan i 6–15 poäng för 1–7-lärare. Kursen geometri med didaktik innehåller tex vektorer i planet och rummet, men det finns ingen kurslitteratur som behandlar detta. Troligen arbetar studenterna då med stencilmaterial. Det enda i kursen som är utöver gymnasienivå när det gäller matematisk ämnesteori är just vektorer i planet och rymden samt den axiomatiska uppbyggnaden av den klassiska geometrin. I delkursen algebra utgörs den nya ämnesteorin av området komplexa tal. I kursen funktionslära ingår utöver gymnasiekursens innehåll polynomapproximationer, någon fördjupning av differentialekvationer och integralberäkningar.

Huvuddelen av litteraturen i matematisk ämnesteori består av lokalt utgivna kompendier, omfattande ca 300 sidor, medan den matematikdidaktiska litteraturen består av förlagsproducerade böcker och uppgår till ca 1700 sidor.

Helhetsintrycket av denna kurs är att studenterna förväntas nå ytterst begränsade ämnesteoretiska kunskaper i matematik utöver vad som redan erbjudits dem i gymnasiskolan. Matematikdidaktiken är givetvis ny för de studerande.

### *Karlstads universitet*

I grundskolläroarprogrammet för 4–9-lärare ingår en 20-poängskurs som består av den ovan beskrivna 15-poängskursen för 1–7-lärare samt ytterligare en del om 5 poäng analys. I analysen behandlas funktioner av en variabel, elementära funktioner, gränsvärde och kontinuitet, derivata, deriveringsregler och tillämpningar. Kurvkonstruktion, integraler,

numerisk lösningar av ekvationer, numerisk derivering samt enkel felkalkyl. Kurslitteratur för analysen är en mycket omfattande amerikansk bok, *Calculus: A complete course*.

Efter den grundläggande kursen kan de studerande göra tillval av två olika 20-poängskurser som innehåller tex linjär algebra, 5 poäng, matematisk statistik, 5 poäng, analys, 5 poäng samt matematiska modeller och datoranvändning, 5 poäng. Kurslitteraturen är rent matematisk utan didaktiska aspekter.

Det ges även flera kurser i matematikdidaktik om 5 eller 10 poäng samt ytterligare kurser att välja bland, tex datoranvändning.

### *Referens*

Anselmsson, B. (1999) Vilken matematikdidaktik möter lärarstudier i sin grundutbildning? I G. Dahland & G. Emanuelsson, *LUMA 1998. Dokumentation*. Göteborg: Göteborgs universitet.

# Kurser vid universitet och högskolor som tydligt vänder sig till lärare

Högskolan på Gotland har en kurs med 25 platser i didaktik B, *Allmän didaktik, påbyggnadskurs* (nivå 21–40), som ges på kvartsfart och riktar sig till yrkesverksamma lärare. Den består av fyra 5-poängs delkurser: *Didaktikens grunder – Från läroplansteori till undervisning*, *Läro- och undervisningsforskning*, *Inlärningsforskning* samt *Didaktisk uppsats*. Den kan byggas på med didaktik C som består av *Didaktikens kunskapsområden*, *Vetenskapsteori och forskningsmetodik*, vardera 5 poäng samt uppsats, 10 poäng. Kurserna ges i samarbete med lärarhögskolan i Stockholm och går på kvällstid, varannan vecka.

Mälardalens högskola redovisar ett stort utbud av kurser i matematik. Speciellt noteras kursen *Inläringsteorins matematiska grunder D*, 5poäng, där man skriver att

Inläringsteorier studerar olika sätt att representera kunskap ur ett dynamiskt perspektiv. Olika inläringsteorier hör till olika ämnesområden såsom psykologi, datalogi samt logik och berör vitt varierande problemställningar. Kursen syftar till att ge ett gemensamt matematiskt perspektiv på inlärningsfenomenet. Matematiska modeller av inlärningsprocesser som utvecklats under de senaste åren använder metoder från flera klassiska matematikområden, framför allt från statistik, logik och diskret matematik. Kursen är ett försök att framföra dessa på ett matematiskt sammanhängande sätt. Kursen ges på halvfart i Västerås. Det övriga utbudet innehåller inga kurser som anknyter till undervisning eller lärande i matematik.

Umeå universitet har ett stort utbud av kurser i matematik, som i regel ges på dagtid men med 50 % studietakt. Noteras kan kursen *Matematikdidaktik för gymnasielärare*, 5 poäng som ges på distans i kvartsfart. Kursen är inriktad på ämnesdidaktiska grundfrågor och de områden som behandlas är teorier om inläring och kunskapsbildning, bl a lärares och elevers inställning till matematiken, skolmatematikens klassrumskultur, representationsformer, matematisk problemlösning,

läromedel och utvärdering. Till den grundläggande kursen hör *Matematikdidaktik, fördjupning* 10 poäng, som ska ge fördjupade kunskaper i didaktiska frågor och i samband med detta färdigheter i att söka och bearbeta relevant litteratur. Kursen består av två delmoment:

1. läroplans- och kursplaneutveckling, inläring och kunskapssyn, läromedel ur jämställdhetsperspektiv, elevers räknefärdigheter och problemlösningsförmåga mm.
2. Individuell fördjupning i matematikdidaktik i form av ett projektarbete.

Kursen ges på distans veckoslut/kvälls/dagtid med 50 % studietakt. Vid enheten för barn och ungdomspedagogik ges kursen *Språk och matematik – utveckling och hinder*, 5 poäng. Ges på distans dagtid med halvfart.

*Karlstads universitet* erbjuder ett stort utbud av kurser i matematik. Kursen *Matematik för lärare*, 10 poäng, som ges på helfart dagtid, innehåller didaktiska moment med anknytning till arbetet med matematik i grundskolan. Kursen *Matematikdidaktik*, 5 poäng, ges på halvfart dagtid och behandlar olika aspekter på undervisningen i matematik i grundskolan, såsom kursplaner, läromedel, betygsättning, arbetsorganisation, samverkan med andra ämnen, begreppsbyggnad, individanpassning, barn med matematiksvårigheter mm.

*Luleå tekniska universitet* erbjuder matematik A, B, C och D, vardera 20 poäng. De är uppbyggda av ett antal delkurser om 2, 5 eller 10 poäng. Vid lärarutbildningen ges kurserna matematik för grundskolan (1–7 respektive 4–9) om 10 poäng. De är påbyggnadskurser för 1–7-lärare i sv/so respektive för 1–7-lärare i ma/no och ges på dagtid i kvartarfart. Kurserna behandlar för grundskolan viktiga områden ur ämnesteoretiskt och didaktiskt perspektiv. Eget utvecklingsarbete ingår.

*Lunds universitet* har ett stort utbud av kurser i matematik och matematisk statistik. Kursen *Matematik för lärare*, 10 poäng, läses vanligen av blivande gymnasielärare och innehåller matematikens historia, problemlösning och didaktik.

*Högskolan i Skövde* har en rad kurser i matematik och främst med inriktning mot tillämpad matematik.

*Högskolan Dalarna* erbjuder förutom en rad kurser i matematik, som i regel går på dagtid i halvfart, även kurser under rubriken *Matematik*

med didaktisk inriktning. Kurserna *Matematiklärande för verksamma lärare*, 10+10 poäng, vänder sig till lärare som har behov av att fördjupa sina kunskaper om matematiklärande och att reflektera över sin egen undervisning. Ett fördjupningsarbete i egen verksamhet ingår. Fördjupningskursen *Matematik med didaktik*, 20 poäng, är tänkt att vara forskningsförberedande. Kursen syftar till att deltagarna ska få en ökad förståelse för matematik som disciplin och matematiska sammanhang och därmed utvecklas som lärare och lärarutbildare. Kursen ges på kvartsfart, dagtid i Falun.

Högskolan i Jönköping har förutom *Matematik*, 20 poäng, kursen *Matematik- svårigheter – dysmatematik*, 5 poäng, som syftar till att ge fördjupad kunskap om barns och ungdomars möte med matematiska begrepp. Vidare ger kursen insikter i hur val av arbetsformer och arbetssätt påverkar inlärningsmöjligheterna i matematik.

Högskolan i Halmstad ger *Matematik*, 20 poäng, på halvfart och distans. Två sommarkurser om vardera 5 poäng ges under vecka 24–28, *Matematik, envariabelanalys* respektive *Linjär algebra*.

Högskolan i Gävle erbjuder *Algebra för lärare*, 5 poäng, samt *Analys för lärare*, 5 poäng, som båda ska ge kunskaper av värde för blivande lärare. De ges på distans i kvartsfart. Kursen *Matematik för lärare A*, 10 poäng, ska ge ämnesteoritiska kunskaper och en god didaktisk förmåga att undervisa i ämnet med dessa kunskaper. Kursen ska även ge de blivande lärarna beredskap att möta nya situationer i det framtida skolarbetet och att kunna använda datorn som pedagogiskt hjälpmedel i undervisningen. Kursen ges på distans dagtid i kvartsfart. Vidare erbjuds *Matematik för lärare ämnesfördjupning*, 5 poäng, på distans under dagtid, 50 % samt *Matematikens historia* även den dagtid, 50%. Ett stort utbud med sedvanliga kurser om 5–10 poäng finns däribland även *Tesselleringar, mönster och matematisk konst* på dagtid med kvartsfart.

Högskolan Kristianstad har förutom *Matematik*, 20 poäng, kursen *Matematik för lärare 4–9*, 20 poäng, som erbjuder ämnesteoritisk fördjupning och ämnesdidaktiska perspektiv inom områdena algebra, geometri, funktionslära och statistik med sannolikhetslära. Kursen ges på halvfart under kvällstid. Vidare finns kursen *Lärande och undervisning i matematik*, 10 poäng på B-nivå, som ges på kvartsfart och distans. I den behandlas matematikens didaktik från teoretisk och praktisk utgångspunkt. Aktuell forskning om lärande och undervisning i matematik diskuteras och kopplas till deltagarnas egen undersökning i klassrummet. Undersökningen redovisas i en skriftlig rapport. Till kursen hör en påbyggnad *Lärande och*

*undervisning i matematik*, 10 poäng, som ges på kvartsfart och distans. Den behandlar vetenskapsteori samt didaktisk forskningsmetodik. Den studerande genomför en egen undersökning med utgångspunkt från skolans undervisning i matematik. Detta arbete redovisas skriftligt.

Högskolan i Karlskrona/Ronneby presenterar sina kurser i matematik som *Matematik 1*, 1–20 poäng samt *Matematik 3*, 41–60 poäng, med texten

Kursen avser att öka förståelsen för matematik och dess tillämpningar med betoning på matematisk modellering av naturvetenskapliga och tekniska fenomen.

Det antyder att kursen *Matematik 2* också kan ges men inte innevarande termin. De har emellertid även ett program för matematik och datavetenskap, där man påpekar att en möjlighet efter studierna på programmet är att bli gymnasielärare efter något års komplettering av studierna.

Högskolan i Borås har en 20 poängskurs i matematik som riktar sig till lärare och en som riktar sig till ingenjörer. Man påpekar att kurserna för 40 och 60 poäng kommer att ges under 2001.

# Enkät till lärarutbildare i matematik

Nationellt centrum för matematikutbildning  
Barbro Grevholm 20000531

## **Till dig som medverkar i lärarutbildning i matematik och/ eller matematikdidaktik**

Inför den kommande satsningen på kompetensutveckling av lärare i matematik vore det av stort värde för NCM att ha en komplett överblick över medverkande i landets lärarutbildning i matematik och/eller matematikdidaktik, normala verksamhetsområden, specialistkompetens och grundkompetens. Vi är tacksamma om du vill ta dig tid att fylla in nedanstående och maila till [Barbro.Grevholm@mna.hkr.se](mailto:Barbro.Grevholm@mna.hkr.se)

Jag kan erbjuda min kompetens inom följande områden av matematiken och/eller matematikdidaktiken:

...  
...

Jag brukar ha studiedagar och/eller fortbildning för lärare som undervisar i matematik inom följande områden:

...  
...

Enligt min bedömning är behoven av kompetensutveckling hos lärare som undervisar i matematik störst när det gäller

...  
...

Jag skulle vilja höja min egen kompetens på följande områden:

...  
...

Jag har varit verksam inom utbildningen i matematik och/eller matematikdidaktik i ... år och inom följande program (sätt kryss i lämpliga rutor):

Förskollärare och fritidspedagog	<input type="checkbox"/>
Lärare 1-7	<input type="checkbox"/>
Lärare 4-9	<input type="checkbox"/>
Gymnasielärare	<input type="checkbox"/>
Högskolepedagogik	<input type="checkbox"/>
Vux-lärarytutbildning	<input type="checkbox"/>
Specialpedagogisk utbildning	<input type="checkbox"/>
Annan lärarytutbildning	<input type="checkbox"/>
nämmligen .....	

I min egen utbildning ingår:

... poäng i matematik	år	(ca)
... poäng i matematikdidaktik	år	(ca)
... poäng i matematisk statistik	år	(ca)
... poäng i datalogi eller datakunskap	år	(ca)
... poäng i numerisk analys	år	(ca)
... poäng i kurs i .....	år	(ca)
relevant för lärarytutbildning i matematik/didaktik		
... poäng i pedagogik	år	(ca)
... poäng i .....	år	(ca)
relevant för lärarytutbildning allmänt		
Lärarytutbildning av typ .....	år	
Förskollärarytutbildning av äldre slag	år	
Lågstadielärarytutbildning av äldre slag	år	
Mellanstadielärarytutbildning av äldre slag	år	
Annan lärarytutbildning nämligen .....	år	
Forskarutbildning i ämnet.....	år	(ca)

En forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning ska komma igång under 2001. Därför vill vi gärna veta vilka önskemål som finns om forskarutbildning.

Jag är intresserad av att genomgå

- forskarutbildning i matematikdidaktik, eller  
 matematik, eller  
 pedagogik med matematikdidaktisk inriktning

Jag är redan klar med ca ..... % av en forskarutbildning i matematikdidaktik.



Utdrag ut Riksbankens jubileumsfond (2000). *Forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning.*

# Forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning

*Sammanfattning av ledningsgruppens förslag till genomförande av forskarskolan*

I mars 2000 beslöt styrelsen för Riksbankens Jubileumsfond att avsätta medel för en forskarskola i matematik med särskild ämnesdidaktisk inriktning. RJs styrelse beslutade då

*att* avdela 45 mkr i anslag till planering och genomförande av en forskarskola med denna inriktning

*att* Svenska kommittén för matematikutbildning (SKM) utses att ansvara för planering och genomförande av denna forskarutbildningsinsats och

*att* de detaljerade planerna för antagning av forskarstuderande och genomförandet av forskarskolan föreläggs styrelsen vid sammanträdet den 26 oktober 2000.

## **Mål för forskarskolan**

Man kan ur promemorian som bifogades beslutet läsa ut två tydliga mål för forskarskolan:

*att* förse högskolans lärarutbildning och gymnasieskolan med fler forskarutbildade lärare i matematik och matematikdidaktik

*att* utveckla matematikdidaktik som forskningsområde i vårt land.

Ledningsgruppen har i sina överväganden strävat efter att förena båda dessa mål i den modell för genomförande som föreslås.

## Genomförande

En forskarskola av hög kvalitet och effektivitet inrättas och genomförs med start 1 juli 2001. I forskarskolan deltar minst cirka 15 doktorander som efter föreskriven tid avlägger doktorsexamen. Undantagsvis kan studierna avslutas med licentiatexamen. Innehållet i utbildningen är matematik med ämnesdidaktisk inriktning. Det finns ett stort inslag av matematik. Den forskning som bedrivs inom forskarskolan behandlar matematikdidaktiska frågor.

## Mål för och innehåll i utbildningen

Ett mål för forskarutbildningen är att den studerande utvecklar och dokumenterar en förmåga att bedriva forskning om lärande ("lära" i betydelsen "lära in och lära ut", "learning and teaching") i matematik och om matematikutbildning. Kompetensen ska omfatta sådan forskning inom fältet som bygger på goda och omfattande kunskaper i matematik.

Kursdelen av utbildningen bör ge kunskaper i

- matematik som ger grund för forskningen
- lärande i matematik
- grundläggande pedagogisk teori av relevans för matematikdidaktisk forskning
- matematikdidaktik som forskningsfält
- forskningsmetodik och teoribildning inom fältet
- matematikens historia och vetenskapsteoretiska aspekter på ämnet

## Ämne, fakultetstillhörighet

Från forskarskolan ställs inga krav på ämnesbenämning eller fakultetstillhörighet. Olika lösningar beträffande ämne och fakultet kan tänkas. Den formella ämnesbenämningen blir normalt matematik (med diak-tisk inriktning), matematikdidaktik eller (för en utländsk examen) mat-hematics education eller motsvarande.

## Behörighet

En student som ska kunna antas till forskarskolan måste, förutom allmän behörighet till forskarstudier och behörighet för forskarstudier i ämnet, även ha sådana förkunskaper som krävs för att kunna uppnå den kompetens som definieras i forskarskolans mål på föreskriven tid och med det program som institutionen och forskarskolan erbjuder. Förkunskaperna kan variera beroende på vilken forskningsinriktning och vilket innehåll

utbildningen har och måste bedömas från fall till fall. Normala krav kommer att vara

- Minst 60 poäng i matematik
- Lärarutbildning

## Organisation

Universitet och högskolor inbjuds att delta i forskarskolan. En institution kan delta om där finns kompetens för att genomföra utbildningen med visst stöd från forskarskolan och om fakulteten accepterar utbildningen. Forskarskolan erbjuder ett gemensamt kursutbud, bestående av kurser som ges av de ingående institutionerna och av vilka varje doktorand måste läsa ett visst minsta antal. Kurserna bedrivs delvis i internatform och/eller på distans.

## Handledare

Handledningsresurser brister när det gäller matematikdidaktik i vårt land. I vissa fall kan det krävas två eller flera handledare för att garantera tillräcklig kompetens. Inom forskarskolan utvecklas ett program för att ge kompetensutveckling för handledarna. Kvalificerade gästprofessorer från utländska universitet med utvecklad tradition för forskarutbildning inbjuds att medverka i forskarskolan. Forskarskolan kan även bidra till att finansiera handledning från andra länder.

## Antagningsprocessen

Ansökan sker via institutionerna. Studenten ansöker samtidigt om att bli antagen till forskarutbildning vid en viss högskola och till den nationella forskarskolan. Ansökan till forskarutbildning ställs till fakulteten och ansökan till forskarskolan ställs till ledningsgruppen. Institutionen ansöker sedan hos forskarskolan. De kriterier som ledningsgruppen använder vid urvalet relaterar till den enskilde studentens kvalifikationer, till handledningsresurserna på institutionen och till forskningsprogrammet. Kriterierna kommer att formuleras och beslutas i god tid innan antagningsprocessen startar. En ansökningsomgång genomförs under våren 2001 med antagning före 1 juli 2001. Eventuellt kompletteras med ytterligare en antagningsomgång ett eller två år senare.

## Uppföljning

Formella kontrakt skrivs mellan forskarskolan och deltagande universitet/högskolor. Kontrakten innehåller tydliga regler för hur uppföljningen ska ske och vilka krav som gäller för fortsatt finansiering från forskarskolan.

Medel för de forskarstuderandes löner fördelas för ett år i taget efter en årlig uppföljning av varje enskild studerandes framsteg. Ledningsgruppen rapporterar årligen hur verksamheten fortskrider till RJ.

### **Arbetsmarknad för doktorerna från forskarskolan**

Två avnämare är av RJ tydligt utpekade för forskarskolan, nämligen gymnasiet och lärarutbildningen Forskarskolans doktorer (eventuellt licentiater) kommer att få en kompetens som är mycket attraktiv för gymnasierna. Men efterfrågan är för närvarande stor och växande från högskolor och universitet på just den kompetens som forskarskolan kommer att ge. Det är mot den bakgrunden inte troligt att majoriteten av de doktorer som utbildas inom forskarskolan kommer att välja att arbeta på gymnasiet direkt efter examen. Lärarutbildningen inom högskolan blir sannolikt den största arbetsmarknaden. Genom att en grund för forskarutbildning inom fältet matematikdidaktik byggs upp vid institutionerna kommer nya generationer av forskarutbildade lärare längre fram att bli en tillgång även direkt ute i skolorna.

# Vad är matematik?

## Citat ur några kataloger från universitet och högskolor

### *Mälardalens högskola*

Matematik är ett brett ämne med många nyanser, alltifrån enkel aritmetik till matematisk forskning. Studier i matematik tränar upp förmågan till analytiskt, kritiskt och systematiskt tänkande och ger det språk som används inom teknik och naturvetenskap.

### *Umeå universitet*

Teknik, ekonomi och samhällsliv bygger alltmer på matematik. Dess användning ökar ständigt. Omedelbart efter det meddelar man att: Undervisningen består av föreläsningar, lektioner och datorlaborationer.

### *Karlstads universitet*

Matematik är en vetenskap med gamla rötter, som hela tiden utvecklas i snabb takt. Analys och algebra är en grund för all naturvetenskaplig och teknisk utveckling världen över. Det är ofta också en bas för studier i ekonomi.

### *Högskolan Dalarna*

Matematik är det verktyg vi alla behöver för att lösa problem på entydigt och fungerande sätt. Matematik kan ses som ett "språk" som används inte bara av tekniker utan också tillämpas av naturvetare, samhällsvetare, ekonomer och pedagoger. Undervisningen bedrivs ofta i form av storföreläsningar medan räkneövningarna sker i 30-grupp.

### *Högskolan i Halmstad*

Matematiken är naturvetenskapens språk och verktyg som utvecklats genom behov av problemlösning baserat på logiska resonemang. Eftersom matematik har utvecklats i alla kända kulturer är den samlade matematiska kunskapen gigantisk och har avgörande betydelse för utvecklingen av teknik och naturvetenskap. Du läser grundläggande begrepp inom klassiska områden som logik, geometri och algebra. Centrala inslag i kursen utgörs av problemlösning och tillämpningar. Du kommer även att få tillfälle att arbeta med matematisk programvara.

### *Högskolan i Gävle*

Matematik som vetenskap har utvecklats från försök att hitta enkla generella lagar som beskriver och förklarar olika fenomen vi ser omkring oss såsom tex planeternas rörelse, beteende och utveckling av biologiska system, osv. många av de försöken har varit framgångsrika, fast det finns fortfarande got tom olösta problem. Idéer och metoder som har utvecklats är djupa och ofta spännande och dess vidareutveckling och användning kräver ofta stor fantasi och djup deduktiv resonemang. Att studera matematik innebär i första hand att bli bekant med de grundläggande matematiska koncept och idéer samt lära sig använda de verktyg som behövs för att tillämpa matematiska koncept inom andra vetenskaper.

### *Högskolan i Karlskrona/Ronneby*

I katalogen berättar Eva Pettersson, universitetsadjunkt i matematik varför man ska läsa matematik/datavetenskap. Hon säger:

Det kan ju nästan kännas lite lyxigt att få ägna sig åt det man är intresserad av. Att få utforska matematikens mystik, använda sitt logiska tänkande och kanske ibland bli lite filosofisk. Att sedan få utnyttja dessa kunskaper inom datorns värld kan ju bli grädden på moset. Efter en sådan här utbildning är du attraktiv vad du än vill syssla med. Jag valde att stanna kvar i skolans värld och undervisar numera i matematik på vår högskola.

### *Högskolan i Borås*

I en broschyr med titeln *Utbildning för mänskligt växande* visas de två lärarna Eva Persson och Eva Sjöholm som den kvinnliga professorn i matematik Sonja Kovalevsky och som Aegidius Aurelius, som gav ut den

första räkneläran i Sverige på 1600-talet. De berättar att de vill verka för att studenterna ska få en annan syn på matematik och framför allt matematikens historia. Det ska de ha nytta av i sina jobb som grundskollärare. Studenterna som är ute på praktik får ofta prova på det annorlunda undervisningssättet och får mycket positiv respons. Barnen är nyfikna och lever sig in i situationen. *Vi vill hjälpa eleverna att förstå matematik och varför det är så viktigt, säger Eva. Framför allt tycker vi att man måste visa barn att matten är ett praktiskt verktyg.*





Ramkursplan– Diskret matematik  
Skolverket

Enheten för kursplaner och betygskriterier  
2001-03-25  
Barbro Wennerholm

# Att undervisa i den nya gymnasiala kursen matematik diskret

*Ramkursplan för lärares kompetensutveckling i Diskret matematik*

Kompetensutvecklingen skall ha en omfattning som motsvarar 5 poäng. Den bör ges under former som förutsätter kontinuerlig aktivitet av deltagarna.

Ramkursplanen har utvecklats i ett samarbete med representanter för sju olika högskole-/universitetsinstitutioner och med yrkesaktiva gymnasielärare.

## **Målgrupp**

Kursen vänder sig främst till matematiklärare och blivande matematiklärare i den gymnasiala utbildningen och till matematiklärare i grundskolans senare del.

## **Syfte**

Kursen syftar till att deltagarna skall ha fått ökad kunskap om några väsentliga kunskapsområden som kan innefattas under termen Diskret matematik. De skall också ha fått stöd för hur dessa kunskaper kan omsättas för att stödja elevers lärande.

## Mål

Efter genomgången kurs skall deltagarna ha

- förmåga att kunna omsätta den gymnasiala kursplanen i Matematik diskret i sin egen undervisning
- god kännedom om väsentliga begrepp inom området Diskret matematik och förmåga att relatera dessa till exempel av intresse för gymnasieeleverna
- viss kännedom om aktuella tillämpningar av de diskreta strukturerna inom systemvetenskap och datalogi samt inom ny teknik
- viss inblick i den diskreta matematikens historia
- utvecklat sin förmåga att identifiera den logiska strukturen i matematiska resonemang
- planerat en undervisningssekvens och analyserat denna i en kollegial diskussion.

## Innehåll

Området Diskret matematik är inte väldefinierat men kursen måste åtminstone ta upp ett innehåll som är relevant för gymnasiekursen Matematik – diskret.

Deltagarna skall – inom givna ramar – kunna påverka kursens innehåll och omfattning.

Följande områden skall ingå:

Talteori

Kombinatorik

Rekursion

Relationer

Sist i bilagan återfinns en lista med flertalet av de inslag inom respektive område som föreslagits av arbetsgruppen.

## Arbetsformer

Genom ett deltagaraktivt arbetssätt, där problemlösning och didaktiska frågor är centrala inslag, skall kursen vara ett exempel i sig själv.

Deltagarna skall kunna påverka kursens arbetsformer.

Kursen skall ge många exempel på problem av skiftande svårighetsgrad. Problemen skall vara såväl inommatematiska som tillämpningsinriktade och syfta till att inspirera gymnasieeleverna till fortsatta studier.

## Litteratur

Varje kursanordnare beslutar om litteraturlista för respektive kurs.

## Förslag till innehåll i de fastställda kunskapsområdena.

### *Talteori*

Tex:

- Talsystem
- Delbarhet
- Euklides algoritm
- Primtal
- Modulär aritmetik
- Induktion
- Fermats lilla sats
- Kryptering
- Felrättande koder

### *Kombinatorik*

Tex:

- Lådprincipen
- Additionsprincipen
- Multiplikationsprincipen
- Permutationer
- Kombinationer
- Mängdlära; union, snitt och potensmängd
- Inklusion – exklusion

### *Rekursion*

- Kombinatoriska problem som leder till rekursiva samband
- Rekursiva talföljder; speciellt linjär rekursion
- Några historiskt intressanta metoder

*Relationer*

Ekvivalensrelationer

Partiella ordningsrelationer

Som mindre prioriterat men ändå av intresse föreslås från arbetsgruppen:

Grundläggande *grafteori* samt inom området logik något om *elementär satslogik* och *logiska kretsar*.

# Vad är matematik och vilken är dess relevans för nutidsmänniskan?

PER-ANDERS IVERT

Det finns många sätt att mäta ett samhälles utvecklingsnivå. En ofta använd måttstock är mängden av tekniska och vetenskapliga landvinningar. En annan är det kulturella klimatet i vidare mening, konstnärligt och intellektuellt. Somliga föredrar att bedöma samhällets civilisationsgrad efter sociala förhållanden. Samhällsutveckling är just samspelet och växelverkan mellan dessa faktorer. Här vill jag diskutera en speciell komponent i den mänskliga civilisationen.

Matematiken har sina rötter såväl i den tekniska och naturvetenskapliga som i den humanistiska kulturen. Den är vetenskap och konst tillika. Detta gör det befogat att tala om matematiken som en civilisationens spegel. I motsats till många andra vetenskaper är matematiken något som nästan alla människor har kommit i kontakt med redan under sin barndom och därför har en viss uppfattning om. Tyvärr är denna uppfattning ibland förknippad med motvilja, smärta, skräck eller avsky.

De allra flesta yrkesmatematiker torde vara bekanta med följande situation: man befinner sig i ett socialt sammanhang och blir tillfrågad om sin verksamhet och sitt yrke. Då man förklarar sig vara matematiker verkar den frågande känna ett behov av bikta sig och redovisa sin egen matematiska oförmåga. Somliga, och det gäller i synnerhet människor med kulturella och intellektuella anspråk, tillåter sig gärna att kokettera med denna oförmåga och sitt främlingskap inför matematiken. Ibland kan detta ta sig nästan aggressiva uttryck. Jag drar mig till minnes en känd publicist som för ett antal år sedan härjade på en av landets större regionaltidningar och som var en flitig deltagare i kulturdebatten. Han deklarerade ofta med emfas sitt förakt för matematiken, samtidigt som han avslöjade en ganska besynnerlig ämnessyn.

Vanligen tycks de som lider av ett sådant matematikkomplex sakna en adekvat uppfattning om vad matematik egentligen är; inte ovanlig

är föreställningen att matematiken är en själsdödande bokhållarsyssla som kan intressera enbart personer med ett deformerat känsloliv, utan skönhetssinne och förmåga till mänsklig empati. Jag vill inte påstå att dessa attityder är typiska för människors inställning till matematiken, bara att de är ganska vanliga, som sagt framför allt i kretsar där man vill se sig som en del av det kulturbärande skiktet. Vanföreställningar om ämnets natur är vanliga även bland dem som inte har ett känsloladdat förhållande till matematiken. Alla matematiker är vana vid frågor som "Hur kan man forska i matematik?", "Är inte allt i matematiken redan upptäckt?" eller "Behövs verkligen matematiker nu när det finns så avancerade datorer?". Även när dessa frågor ställs av ett uppriktigt och välvilligt intresse, skulle ett seriöst och upplysande svar kräva betydligt mer uppmärksamhet och tålmod av den frågande än vad denne kan begäras uppstå i situationen i fråga. Det ironiska är att det krävs vissa insikter i själva matematiken för att man skall kunna tillgodogöra sig en beskrivning, om än aldrig så ytlig, av ämnets natur.

Då jag som yrkesmatematiker reflekterar över mitt ämne, matematiken, nödgas jag konstatera att jag inte kan ge en koncis och någorlunda upplysande beskrivning, ens för mig själv, av vad matematik egentligen är. Här vill jag nu, med tonvikt på den sista av dem, behandla tre frågor i samband med matematik: vad, hur och varför?

## 1. Vad?

Om man studerar källor från olika tider finner man att den gängse beskrivningen av matematik har genomgått en förändring. Immanuel Kant försökte formulera en vetenskapsteori för matematiken. Vi ska här inte gå in på hans uppfattningar om de matematiska utsagornas natur (de anses ha vederlagts redan under 1800-talet), men man finner hos honom en indelning av matematiken som kom att utvecklas till den distinktion mellan "ren" och "tillämpad" matematik som fortlever än i dag. Liksom senare även Schopenhauer urskiljer han tre grenar av matematiken, nämligen geometri, aritmetik och mekanik, och beskriver dem som respektive läran om rummet, läran om tiden och läran om sambandet mellan rum och tid.

Den vedertagna uppfattningen under 1800-talet var att matematik är en vetenskap om *storheter* och om de egenskaper som tillkommer dessa blott i den mån de är storheter, såsom räknebarhet, delbarhet, sättet att kombinera dem till nya storheter. En annan sida av matematiken ansågs vara sättet att omsätta övriga kvaliteter hos objekten för vårt medvetande i kvantitativa företeelser, såsom exempelvis ljusfenomen till svängningstal eller sannolikheter till bråkdelar av visshet. I Meyers Konversations-Lexikon (Leipzig & Wien) från 1897 sägs matematiken vara *storleklära* och *mätningkonst*, eller med andra ord: *ren* och *använd* (tillämpad) matematik. Denna syn på matematik återspeglas i Nordisk

Familjebok 1912: "Matematik (av grek. *mathematikós*, hörande till vetenskaperna, i synnerhet de matematiska, af *máthema*, kunskap, vetenskap) kallas vetenskapen om storheter i allmänhet och deras egenskaper samt lagarna för deras förhållanden till hvarandra. Man bortser därvid från storheternas kvalitativa bestämningar och betraktar dem endast med hänsyn till form, storlek och läge. – Då storheter kunna indelas i två hufvudgrupper, nämligen rumsstorheter och talstorheter, kan med anledning häraf matematiken delas i två afdelningar: geometri och analys (i vidsträcktaste mening)."

Att matematiken är en lära om storheter torde än i dag stämma väl med gemene mans föreställning om ämnet, och detta kan väl inte sägas vara helt felaktigt, men i modernare beskrivningar tonas denna uppfattning ned, och man föredrar att tala om strukturer i stället för storheter och framhålla tankemönstren snarare än tänkandets objekt. I Svensk Uppslagsbok 1947–55 talas också om storheter, men med reservation, och vi finner också uttryck för en modernare uppfattning:

Matematik, enl. vanlig (men icke fullt korrekt) uppfattning vetenskapen om storheter, spec. tal och geometriska figurer, och deras samband. Som det för m. karakteristiska måste emellertid anses den logiska härledningen, deduktionen, av konsekvenserna av exakt formulerade förutsättningar. En sådan konsekvens kallas en *matematisk sats* och dess härledning *beviset* för satsen. Förutsättningarna äro ant. redan bevisade satser el. sådana satser, *axiom*, som utan bevis läggas till grund för en matematisk teori. Ett nödvändigt krav, som måste ställas på axiomen, är, att de äro motsägelsefria, och detta är ur rent matematisk synpunkt också tillräckligt. Den åskådliga el. praktiska betydelsen av de begrepp, som axiomen handlar om, är ur denna synpunkt oväsentlig, men den spelar en avgörande roll som källa för inspirationen vid uppställandet av matematiska teorier och vid m:s tillämpningar inom andra vetenskaper och i praktiken.

I nyare uppslagsverk har ett modernare synsätt helt slagit igenom:

Bonniers lexikon 1966:

Matematik (av grek. *máthema*, vetenskap, av *manthánein*, lära sig) är läran om logiska samband mellan abstrakta begrepp som mängder, tal, geometriska figurer och funktioner.

Bra Böckers lexikon 1995:

Matematik (av grek. *máthema*: vetenskap, och *thechne*: konst). Definieras som teorin för strukturer på mängder och sysslar väsentligen med matematiska modeller.

Ingen av dessa beskrivningar kan sägas vara felaktig eller vilseledande, men ingen kan heller anses vara helt tillfredsställande. För den som inte

redan är väl förtrogen med matematik torde de vara rätt så intetsägande. De är naturligtvis inte definitioner i matematikens mening och egentligen är det väl inte så intressant att försöka formulera sådana; det låter sig nog inte heller göras. Däremot kan det vara befogat att diskutera vad som är utmärkande för matematik som vetenskap och som kulturyttring, vilka objekten är för matematiken och hur matematiken bedrivs. En utförlig och intressant diskussion av matematikens väsen och metodik ges i Håkan Lennerstads essä *Matematik & mänsklighet* i HSFR:s tidskrift *Tvårsnitt* (nr 2/2001).

Man kan sammanfatta några karakteristiska drag hos matematiken på följande sätt: En matematisk teori består av utsagor av olika slag. Dessa kallas, allt efter sin funktion, till exempel *axiom*, *definitioner*, *lemman*, *propositioner* eller *satser*.

Ordet *axiom* används även i vardagligt tal utanför matematiken, men i en annan och äldre betydelse, nämligen som benämning på ett påstående som ej behöver bevisas eftersom dess sanning är uppenbar. Detta är inte vad som i matematiken avses med axiom. Att axiomen inte bevisas beror inte på att de skulle vara *evidenta* eller *uppenbart sanna*, vilket en vanlig uppfattning om innebörden av *axiom* är, utan de är valda, ungefär som föreskrifterna i en lagtext, om vilka man ju kan säga att de är *giltiga* men det är knappast meningsfullt att säga att de är *sanna*. Ofta innehåller de odefinierade begrepp, och detta kan ibland vara själva poängen.

Låt oss som exempel ta det första axiomet ur den axiomatiska mängdläran. Objekten för denna teori är klasser. Vad som här menas med klasser spelar ingen roll, och det är en viktig poäng att detta inte spelar någon roll. Att just ordet "klass" används beror bara på att man har en viss tolkning av begreppet i bakhuvudet, men denna tolkning är inte alls nödvändig för teorin. Vad som finns är alltså något som kallas klasser.

Därutöver finns en relation, *tillhörighet*. Om  $x$  är en klass och  $y$  är en klass, så kan det antingen inträffa att  $x$  *tillhör*  $y$ , eller också inträffar det inte. Nu lyder mängdlärans första axiom:

*Det gäller att  $x=y$  om och endast om  $z$  tillhör  $x$  närhelst  $z$  tillhör  $y$ .* För att denna utsaga (som ändå utgör det allra första påståendet i teorin; inga förkunskaper förutsättes) inte ska vara obegriplig, är det viktigt att vara medveten om ett par saker:

Likhetstecknet betecknar identitet, dvs  $x=y$  betyder att  $x$  och  $y$  är samma objekt; detta kräver ingen ytterligare förklaring. Det är alltså självklart att om  $x=y$  så gäller att  $z$  tillhör  $x$  närhelst  $z$  tillhör  $y$ .

Axiometets egentliga innehåll är omvändningen: Om  $x$  är en klass och  $y$  är en klass, och det gäller att  $z$  tillhör  $x$  närhelst  $z$  tillhör  $y$ , så är  $x$  och  $y$  samma klass. Om man nu tolkar ordet *klass* som en samling av objekt och ordet *tillhör* på det sätt som är uppenbart i den *naiva* mängdläran, så är även detta påstående självklart, eftersom en samling inte är något annat än sina element, men denna tolkning är inte underförstådd i



teorin. I så fall vore axiomet intetsägande, vilket det inte alls är. Dock är det knappast naturligt att säga att axiomet är *sant*. Det är giltigt eftersom vi beslutar att det ska gälla.

*Definitionerna* är strängt taget inte helt nödvändiga i teorin, utan de är bara överenskommelser om språkbruk för att presentationen skall bli hanterlig. Ett exempel hämtar vi återigen från den axiomatiska mängdläran: *En klass  $x$  för vilken det finns en klass  $y$ , sådan att  $x$  tillhör  $y$ , säges vara en mängd*. Detta är ju inget egentligt påstående, utan bara en namngivning. Dess syfte är bara att man i den fortsatta framställningen ska kunna säga "mängd" i stället för det längre "klass, till vilken det finns en annan klass, vilken den tillhör".

*Satser* kallas också för teorem, lemman, propositioner eller korollarier. Vilket av dessa ord som används beror på sammanhanget och på tycke och smak hos framställaren. Någon sträng åtskillnad kan inte göras. Viktiga satser kallas sats eller teorem, satser som huvudsakligen är till för att förbereda eller vara en del av beviset för en viktigare sats kallas lemma (eller hjälpsats), och satser som uppträder i direkt anslutning till och som en omedelbar följd av en annan sats kallas korollarium (eller följsats). Teorin växer genom att satser härleds ur axiom och ur tidigare härledda satser. Detta sker genom så kallade bevis. De matematiska bevisen genomförs med iakttagande av vissa logiska slutledningsregler. Om vilka dessa är och hur de ska användas korrekt råder enighet bland matematiker. Mot detta påstående kan man visserligen invända att det även bland matematiker finns olika skolor med skilda uppfattningar i vissa grundlagsfrågor (eller olika "förklaringsmodeller", som en samhällsvetare skulle säga), men dessa olikheter är inte av samma slag som de olikheter i grundläggande uppfattningar och värderingar som man återfinner främst inom samhällsvetenskaper, men även inom fysiken. Det är inte så att matematiker av olika skolor betraktar varandras uppfattningar i dessa grundvalsfrågor som felaktiga eller en olämpliga. Det är bara en smaksak om hur man vill uppfatta till exempel talbegreppet, och motsättningar i detta avseende är knappast mer affektionsladdade än frågan om man föredrar te eller kaffe under sin arbetspaus. De logiska regler som används är i allmänhet av enkelt slag och kan betraktas som något som ligger utanför den egentliga matematiken.

## 2. Hur?

Av ovanstående beskrivning av den matematiska lärobyggnaden leds man lätt till uppfattningen att den matematiska forskningen verkligen är något mekaniskt, maskinmässigt, fritt från konstnärlig kreativitet och framför allt utan något utrymme för mänsklig fantasi, och den kan till och med tyckas bekräfta den niddbild av matematiken som jag nämnde i inledningen. Hur kan detta förenas med det som ständigt hävdas av matematikens företrädare, nämligen att matematiken är en konststart

som av sin utövare kräver fantasi och intuition, och att ett väl utvecklat skönhetssinne är en viktig vägledare för att bedriva god matematik? David Hilbert, som var en av det förra seklets allra mest framstående matematiker lär om en av sina avhoppade elever ha sagt: *han hade för litet fantasi, han blev författare i stället.*

För det första vill jag framhålla att beskrivningen ovan är bristfällig så till vida som att den bara omnämner komponenterna i teorin, axiom, satser etc. Vad som är fascinerande är att lärobyggnaden har något som inte finns i de enskilda byggstenarna. För det andra så är det skillnad på matematikers sätt att arbeta och på deras sätt att framställa matematiken.

Nu kan matematiska framställningar variera mycket i stil, och det finns goda och dåliga sätt att skriva matematik. Allmänt kan man i alla fall säga att det strängt logiska och "mekaniska" sätt som matematiska resultat vanligen presenteras på inte omedelbart återger de bakomliggande tankeprocesserna. Matematiken utvecklas i regel inte genom att man på grundval av givna axiom försöker bevisa nya satser. Under den kamp som strävan efter ett matematiskt resultat alltid innebär leds matematikern på många avvägar och blindspår, och det krävs erfarenhet (trots att matematik ju inte är en empirisk vetenskap) för att kunna välja omdömesgillt bland de hugskott som under denna process kommer i dagen. Utgående från bekanta metoder och resultat utvecklas nya metoder för att lösa eller bättre förstå det aktuella problemet. Under arbetets gång utkristalliserar sig den väsentliga strukturen i det aktuella problemet. Detta leder till abstrakta konstruktioner där allt utom de karakteristiska dragen hos problemet (det som "det hela hänger på") rensas bort varvid nya begrepp skapas som finner användning på en stor klass av skenbart olikartade problem. Att genomföra detta lärobygge på ett fruktbart sätt kräver naturligtvis både intuition och erfarenhet.

Liksom det matematiska skapandet ser annorlunda ut och sker i en annan ordning än den matematiska presentationen, sker också inlärandet av matematik, inhämtandet av andras resultat, på ett annat sätt och i en annan ordning. Med detta vill jag inte plädера för ett annat sätt att skriva matematik. Att tillägna sig innehållet i en matematisk text kräver ett engagemang som kostar ansträngning och kanske till och med smärta. Detta kan inte undvikas, ty det handlar om att inarbeta ett idéinnehåll i sitt medvetande och göra det till sitt eget. Att teorin presenteras i en strikt logisk följd, med satser i "rätt" ordningsföljd, var och en följd av sitt bevis betyder dock inte att detta är den bästa vägen att följa. Däremot kan det vara den bästa vägen att avvika ifrån och sedan återvända till, ty när man genomgått det mentala kaos som inhämtandet av ett nytt idékomplex innebär, infinner sig behovet av struktur av en "röd tråd", och då ska man lätt kunna hitta tillbaka.

### 3. Varför?

Det talas ofta såväl om nyttan som om nöjet med matematik. Som jag nämnde inledningsvis, finns det dock många människor, kanske flertalet, vilkas kontakt med matematiken varit av ett sådant slag att de omöjligt kan förstå talet om nöje. Vad beträffar nyttan, så råder nog inget tvivel om att matematik haft stor betydelse för samhällslivet genom sin roll inom teknik och naturvetenskaper. Såsom matematiken beskrivits ovan är det naturligtvis märkligt att den kommit att bli av så oundgänglig betydelse inom dessa områden, men denna paradox har diskuterats utförligt i många andra sammanhang. Utan matematik vore mycket av det moderna livet otänkbart. Detta gäller såväl byggnadsverk som hus och broar, datorer, läkemedel, metoder att bemästra miljöförstöring och mycket annat. För ärlighetens skull ska också sägas att mycken miljöskadlig verksamhet, massförstörelsevapen mm möjliggjorts av matematiken.

Många vill nog, i den mån man kan tala om matematikens nytta, se den som en nytta för samhället; inte för den enskilde individen. På samma sätt är ju till exempel avloppsteknik av nytta i ett modernt samhälle, och det är viktigt att det finns människor som ägnar sig åt avloppsteknik och gör det med en viss skicklighet, men få ser detta som viktigt för den enskilde individen och som nyttigt för den personliga utvecklingen.

Matematiken har flera olika ansikten. Själv tycker jag att varken talet om matematikens användbarhet och nytta eller talet om nöjet med matematik är helt träffande. Jag tycker att det är viktigt att erkänna matematikens roll som kulturföreteelse och hävda dess ställning som sådan. Det är visserligen sant att matematiken har spelat och spelar en oundgänglig roll inom teknik och vetenskap. Hur sant och hur viktigt detta än är, kan det ändå inte vara detta som utgör matematikens existensberättigande. Detta är inte vad som driver matematikern, lika litet som en seriös bildkonstnär arbetar i syfte att pryda sitt hem eller sälja sina verk i sin konstbutik eller lika litet som en lyriker har det färdiga poesihäftet i tankarna under arbetet. Matematiken betyder mycket mer än så. Om man försökte att bedöma och behandla matematiken i första hand efter dess materiella nytta eller efter dess användbarhet inom andra vetenskaper, så skulle detta leda till stagnation av såväl matematiken som dessa andra vetenskaper. Med hänvisning till samma liknelser som ovan vill jag också invända mot framhållandet av nöjet med matematik. Visst är det så att många matematiker finner nöje, åtminstone ibland, med sitt ämne, men nöje är inte det ord jag själv skulle använda som motivering. Det finns annat än nytta och nöje. Skulle en seriös konstnär motivera sitt måleri med att det är roligt? Skulle en lyriker uttrycka sig så?

Som alternativ till *nytta* och *nöje* vill jag framhålla *den tredje drivkraften* som motiv. Det är en kraft som uppstår av ett behov som kan vara svårförståeligt för den som inte känner det. Detta behov kan uppstå av andlig brist eller i annat avseende problematiska villkor. Till exempel har såväl matematiken som bildkonsten, lyriken och musiken har vunnit

många utövare som tagit sin tillflykt dit undan en verklighet med vissa brutala inslag. Naturligtvis vill jag inte hävda att matematiker i allmänhet, eller ens konstnärer i allmänhet, haft sådana bevekelsegrunder, jag vill bara framhålla att begreppen nytta och nöje i många fall är otillräckliga, och själv känner jag mig främmande inför bägge.

Matematiken är en hederlig vetenskap. Den lånar sig ogärna till charlataneri. Den kräver en orygglig konsekvens och innebörden av dess utsagor måste vara klara och tydliga. Om man försöker tillägna sig matematik utan att underkasta sig allvarliga intellektuella ansträngningar, så stoppas man i ett mycket tidigt skede. Därigenom har matematiken en fostrande effekt som jag anser vara av stort värde, inte bara inom matematiken utan i mänskligt samspel över huvud taget. Jag vill också hävda att studier i matematik är en ypperlig förberedelse, kanske den bästa tänkbara, för vilken vetenskap som helst.

Då man för matematikens räkning gör anspråk på dess rättmätiga plats i kulturlivet kan man mötas av invändningen att den som konstart är esoterisk och otillgänglig för alla utom ett begränsat antal specialister. Detta är naturligtvis riktigt om man avser resultat från den så kallade frontlinjeforskningen, men det är inte denna jag i första hand tänker på när jag talar om matematik som kulturyttring, och samma invändning kan med minst lika stor rätt resas mot mycket inom postmodern lyrik, atonal musik och viss bildkonst. Matematiken ställer krav, inte bara på forskarna utan på alla som kommer i kontakt med den. Man kan inte vänta sig att alla, eller ens de flesta, eller ens många, människor ska vara villiga att underkasta sig dessa krav. Det är ju inte heller så att alla människor har en gedigen bildning inom andra områden. Däremot anser jag att det för den allmänskulturellt intresserade bör ingå i god allmänbildning att ha en adekvat uppfattning om matematikens väsen och arbetsätt, även om man inte är utövande matematiker.

# Exempel på kursplan för matematikdidaktik

## **MAL400, Lärande och undervisning i matematik**

(21-30), 10 poäng

### *Kursens syfte*

Kursen syftar till att de studerande ska

- utveckla sitt kunnande i matematikens didaktik och om hur detta kunskapsområde har vuxit fram
- få en orientering om forskning i matematikens didaktik med dess teorier och metoder
- få arbeta med didaktiska frågeställningar med exempel från matematikämnet
- utveckla sin förmåga att ta reda på och analysera elevers begrepp i och föreställningar om matematik.

### *Förkunskapskrav*

Allmän behörighet för högskolestudier, lärarutbildning samt lärarerfarenhet från grundskola eller gymnasium.

### *Urval*

De sökande rangordnas efter yrkeserfarenhet.

### *Kursens innehåll*

I kursen ingår följande moment:

- Didaktiska frågeställningar och forskningsmetoder vad gäller undervisning i matematik i skolan
- Elevers förståelse av matematiska begrepp och samband som utgångspunkt för didaktisk forskning och lärares arbete
- Sociala och kulturella aspekter på inläring och undervisning i matematik

- Att formulera didaktiska problemställningar och utifrån dessa göra enklare empiriska undersökningar
- Nationella och internationella utvärderingar och undersökningar om undervisning i matematik

### *Undervisning och examination*

Kursen omfattar föreläsningar, seminarieövningar samt en undersökning i egen klass.

Examination sker i form av muntlig och skriftlig litteraturredovisning och redovisning av genomförda empiriska undersökningar. Betygsgraderna är väl godkänd, godkänd och underkänd.

### *Litteraturlista*

- NämnnarenTEMA, *Matematik - ett kommunikationsämne*, Institutionen för ämnesdidaktik vid Göteborgs universitet, 1995, ISBN 91-88450-06-6
- NämnnarenTEMA, *Matematik - ett kärnämne*, Institutionen för ämnesdidaktik vid Göteborgs universitet, 1996, ISBN 91-88150-04-X
- NämnnarenTEMA, *Algebra för alla*, Institutionen för ämnesdidaktik vid Göteborgs universitet, 1997, ISBN 91-88450-08-2
- Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*. Skolverket, 1997. ISBN 91-88373-05-3
- Arfwedson G, *Hur och när lär sig elever?* HLS Förlag, 1992, ISBN 91-7656-282-4
- Artzt A, Newman C, *How to use cooperative learning in the mathematics class*, NCTM, Reston, 1990, ISBN 0-87353-293-7
- Grevholm, B. (red.), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Studentlitteratur, 1998, ISBN 91-4401835-5
- Malmer G, *Bra start i matematik för alla: nödvändig för elever med inlärnings-svårigheter*, Studentlitteratur, 1999, ISBN 91-44-01287-X
- TIMSS rapporter för resp åldersstadium: *Rapport 114*, 1996, ISSN 1103-2421 eller
- TIMSS: *Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv: Provuuppgifter*, Skolverket, 1996, ISBN 91-88373-60-6
- Nationella utvärderingen (för någon åldersgrupp) tex  
*Utvärdering av grundskolan 1995*, UG 95, Skolverket, 1995, ISSN 1103-2421 eller  
*Prblemlösning i grupp. Den nationella utvärderingen 1992*. Skolverket, 1993, ISSN 1103-2421
- Ett urval artiklar ur *Nordisk matematikdidaktik*.

## **MAL410 lärande och undervisning i matematik**

(31-40), 10 Poäng

### *Kursens syfte*

Kursen syftar till att de studerande ska

- fördjupa sitt kunnande om forskning i matematikämnets didaktik
- utveckla sitt kunnande om relevanta vetenskapsteoretiska strömningar
- öka sin kunskap om såväl kvalitativa som kvantitativa forskningsmetoder och statistisk bearbetning
- genomföra en egen empirisk undersökning med utgångspunkt från en didaktisk frågeställning om lärande och undervisning i matematik
- göra en grundlig litteraturgenomgång i anslutning till ovanstående undersökning.

### *Förkunskapskrav*

Kurs MAL400 eller motsvarande.

### *Urval*

Urval sker på grundval av flest avklarade poäng i ämnet.

### *Kursens innehåll*

I kursen ingår följande moment:

- vetenskapsteori
- kvantitativa och kvalitativa forskningsmetoder med grundläggande statistik
- forskning om lärande och undervisning i matematik
- en empirisk undersökning utifrån en matematik didaktisk frågeställning.

### *Undervisning och examination*

Kursen omfattar föreläsningar, seminarieövningar samt genomförande av en individuell undersökning om lärande eller undervisning i matematik. Examination sker i form av litteraturredovisning samt en skriftlig,

individuell redovisning av den empiriska undersökningen. Betygsgraderna är väl godkänd, godkänd och underkänd.

*Litteraturlista*

Chalmers A F, *Vad är vetenskap egentligen?* Nya Doxa, 1995, ISBN 91-88248-82-8

Månsson P (red), *Moderna samhällsteorier*, 5 rev uppl, Rabén Prisma, 1998, ISBN 91-518-33396-4 (valda delar)

Novak J D, *Learning, creating, and using knowledge*. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1998, ISBN 0-8058-2626-2

Svenning C, *Metodboken*, 3 uppl Lorentz Förlag, 1999, ISBN 91-972961-3-9

Biehler R, *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, Kluwer Academic Publishers, 1994, ISBN 0-7923-2613-X

Obligatoriska artiklar (100 sid)

En vald metodbok (ca 200 sidor)

Fördjupningslitteratur med anknytning till vald empirisk undersökning (800 sid)



---

**Rapporter från  
Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM  
Göteborgs universitet**

- 2001:1 **Hög tid för matematik**  
Nationellt Centrum för matematikutbildning, NCM
- 2001:2 **Hur kan lärare lära?**  
Lars Mouwitz
- 2001:3 **Svårt att lära – lätt att undervisa?**  
Göran Emanuelsson
- 2001:4 **Kompetensutveckling med IT-stöd**  
Günther Dippe
- 2002:1 **Läro utbildning – utbud, utbildare och anordnare**  
Barbro Grevholm
- 2002:2 **Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik  
– en kunskapsöversikt**  
Görel Sterner & Ingvar Lundberg

ISSN 1650-335X

Beställes från

NCM  
Göteborgs universitet  
Vera Sandbergs allé 5A  
412 96 Göteborg

E-post: *ncm@ncm.gu.se*  
Fax: 031-773 22 00