
2. Analys

2.1. Inledning

Det inledande avsnittet i analysdelen ger en översiktlig bild vad gäller *forskning* kring lärarutbildning, speciellt kompetensutveckling. Detta kunskapsområde är relativt lite beforskat vilket också i viss mån sätter sin prägel på övriga avsnitt. En kort analys av vad forskning kan ge och inte ge i sammanhanget ingår här. Därpå följer *ett exempel på historik* i form av en "berättelse" som kan ha ett visst vidare intresse.

Följande avsnitt ägnas åt relevanta delar av NCTMs Standards and Principles och John Glenn kommissionens Before It's Too Late. Båda dessa dokument kan uppfattas som väsentliga kondensationspunkter för aktuell matematikdidaktisk forskning, och de kommer båda sannolikt att utöva stort inflytande på skolutvecklingen direkt resp. indirekt i USA och övriga världen. Därefter följer tre avsnitt som översiktligt beskriver *det praktiska och teoretiska* kunnande som sammanfattats av matematikdidaktisk spetskompetens.

Så följer en presentation av aktuella teorier och principer gällande *vad en matematiklärare behöver kunna* för att undervisa i skolämnet matematik, vilket kan sägas vara själva kärnan i utformningen av ett kompetensutvecklingsprojekt.

För att exemplifiera erfarenheter och principer i analyskapitlet åtföljs detta av ett särskilt kapitel med "berättelser", vilka visar hur kunnandet kan omsättas i praktiken. Dessa projektbeskrivningar bör uppfattas som *illustrationer* till analyskapitlets mer teoretiska och övergripande framställning. Rapporten avslutas i diskussionskapitlet med ett antal *operativa förhållningssätt* för anordnare och andra inblandade. Dessa förhållningssätt har extraherats ur det teoretiska och praktiska kunnande som tidigare presenterats i analyskapitlet, och syftet är att de på ett operativt sätt ska visa på möjliga principer för ett kommande svenskt projekt.

2.2. Forskning om lärarutbildning

2.2.1. En utmaning för matematikdidaktisk forskning

Forskningen om lärarutbildning är relativt outvecklad till skillnad från tex forskning om elevers lärande och lärares kunnande och föreställningar, se Krainer och Goffree (1999a). Denna forskning påverkar givetvis lärarutbildningens form och innehåll, men relativt lite är utvecklat i form av teorier och metoder med direkt fokus på grundutbildning och

kompetensutveckling av lärare. För en översikt över matematikdidaktisk forskning om lärarutbildning, se även Cooney och Krainer (1996).

Gällande forskning om lärarutbildning i allmänhet sammanfattar TNTEEs Green Paper (2000):

Research and development is absent in several programmes of teacher education both as an integral curricular component and as a guiding principle.

Additionally, contents of curricula of teacher education frequently seem to correlate with a learning environment characterised by "knowledge transmission teaching" which seems to be counterproductive to aims defined for professional teacher education.

(s 23)

Delvis beror bristen på forskning på områdets komplexa natur. Lärarutbildning inkluderar mycket mer än att studera undervisningspraktik. Exempel på andra relevanta områden för studier är lärares föreställningar och kunskap, elevers förmåga och motivation, skolans kultur, yrkesmässig kommunikation mellan kollegor och allmänna organisatoriska förhållanden i skolan. Dessa studier måste också relateras till kursplaner, bedömningar, skolsystemets struktur och politiska orientering samt olika interna och externa understödjande system för kompetensutveckling. Man kan också studera lärares "inkultivering" med startpunkt från lärarnas egna klassrumserfarenheter, via grundutbildning och skolpraktik fram till ett fullt ansvarigt yrkesutövande vid en speciell skola. Elmore och Burney (1999) formulerar situationen så här:

Although we know a good deal about the characteristics of good professional development, we know a good deal less about how to organize successful professional development so as to influence practice in large number of schools and classrooms.

(s 263)

En annan omständighet som gör forskning om lärarutbildning komplex är att denna är självrefererande, dvs lärarutbildare måste kunna applicera sin kunskap om undervisning och lärande också på sin egen verksamhet. Krainer och Goffree (1999a) skriver:

We are not only trying to understand better teachers' practice (in order to give advice on how teachers, their practice, the curriculum etc. could improve) but also have the duty to understand our interventions into teachers' practice (e.g. through in-service education) or the implications of our preservice education practice on student teachers' development (in order to improve our teacher education practice).

(s 7)

Diskussioner kring lärarutbildning världen över brukar ha huvudsakligen två disparata ansatser, menar Krainer och Goffree vidare:

1. Fokus sätts på läraren, utan undervisningskontext i övrigt, för att analysera dennes praktik, föreställningar, kunskaper med mera. Denna typ av forskning har oftast inte något tydligt samband med *förbättring* av lärares eller lärarutbildares praktik, dvs den ger inte några förslag på *hur* grundutbildning ska gå till eller *hur* man ska "intervenera" i utövande lärares verksamhet.
2. Fokus sätts på "lyckade projekt", ofta beskrivna av lärarutbildarna själva. Här finns förbättring av lärarens praktik i förgrunden, liksom mer eller mindre genomförda reflektioner kring lärarutbildarnas erfarenheter från projektet. De svaga punkterna i dessa beskrivningar av "lyckade projekt" är avsaknaden av forskningsaspekt, avsaknaden av kriterier för framgång och kvalitet och bristen på presentation av data som skulle möjliggöra att projektet skulle kunna upprepas av andra. Det sistnämnda hänger samman med att man inte analyserat vilka huvudsakliga faktorer som avgjort projektets framgång, och isolerat dessa från andra influenser. En lärarutbildare lämnas därför att på egen hand försöka avgöra huruvida ett "lyckat projekt" skulle kunna upprepas på annan tid och plats.

En stor utmaning för framtida forskning om lärarutbildning är därför att kunna förena dessa ansatser från två håll:

1. Utvecklande av forskning för en teoretisk förståelse som fokuserar på lärarutbildning och som kan omsättas i praktik för lärarutbildning.
2. Utvecklande av forskning kring de konkreta "interventioner" som görs för att förbättra lärarutbildningspraktik, inte minst kompetensutvecklingsprojekt, och utveckla instrument för kvalitetsvärdering av projekten.

Lärarutbildning är ett komplext forskningsfält även ur andra aspekter: regionala omständigheter, deltagarnas behov och kunnande, anordnarnas teorier och föreställningar, programmens innehåll och de organiserande institutionernas struktur gör att varje projekt får en specifik utformning, vilket kan försvåra generalisering av gjorda erfarenheter.

Situationen verkar alltså vara den att det inte finns någon omfattande forskning att tillgå som ger vetenskapligt stöd för *hur* ett större kompetensutvecklingsprojekt explicit bör utformas. Detta innebär dock inte att de teorier och erfarenheter som är för handen ej kan vara vägledande. De väl forskningsstödda teorier och metoder som finns om lärande i klassrummet kan vid *föredömlig tillämpning* av lärarutbildare leda till en rad implikationer om hur ett projekt troligen bör se ut om lärare ska lära. Dessutom kan de omfattande praktiska erfarenheterna från genomförda projekt innehålla värdefull kunskap om än inte vetenskapligt strukturerad och formulerad.

2.2.2. *Forskningens möjligheter och begränsningar*

Hiebert (1999) ställer den relevanta frågan vad man egentligen kan förvänta sig av forskning angående matematikundervisning. Detta görs i samband med diskussionen kring NCTMs Standards och i vilken grad de är relevanta, samt hur de ska implementeras. Under delrubriken *Some Things We Should Not Expect From Research* hävdar han:

Standards are not determined by research. Standards in mathematics education, like those in other fields, are statements about priorities and goals. In education, they are value judgments about what our students should know and be able to do. They are chosen through a complex process that is fed by societal expectations, past practice, research information, and visions of the professionals in the field. The process is similar to the one that operates in selecting standards in other professional fields. Research can influence the nature of standards that are adopted, but, in the end, research is not the sole basis for selection of the standards. Standards, ultimately, are statements about what is most valued.

.....

In complex environments, such as our bodies and school classrooms, there is a special relationship between research and decision-making. Decisions often are based on probability estimates, and research data help us estimate the likelihood of success. The clearer the results, the more confident we are that we are making good decisions. We make decisions with levels of confidence, not with certainty.

(s 6)

Vad vi kan förvänta oss av forskning, enligt Hiebert, är att den kan påverka utformningen av standards, tex via forskningen om undervisning och elevers lärande. Forskning kan också dokumentera den nuvarande situationen, och ge förklaringar till varför olika större projekt har lyckats resp. misslyckats. Dessutom kan forskningen dokumentera vilken effektivitet nya idéer om undervisningens former och innehåll har då de omsätts i klassrumspraktik.

Det resonemang som Hiebert för kan rimligen också tillämpas vad gäller målsättningar för lärarutbildning och kompetensutveckling av lärare. Intressant är i detta sammanhang den kategorisering av aktuella forskningstrender som görs av Krainer och Goffree (1999b):

- *Research in the perspective of teacher education*: denna forskning har inte lärarutbildning som objekt, men får konsekvenser för lärarutbildningen, tex forskning om lärares föreställningar om ämnet och hur detta påverkar undervisningspraktiken.
- *Research on teacher education*: här är lärarutbildning det explicit uttryckta objektet tex hur lärarutbildare kan initiera och understödja en förändring av lärares arbetssätt.

- *Research as teacher education*: här syftas på forskande lärare som undersöker och utvecklar sin egen praktik.
- *Meta-research on teacher education*: hit hör tex analyser av olika forskningsaktiviteter gällande lärarutbildning.

Dessa forskningsinriktningar är givetvis av stort intresse för utformningen av framtida kompetensutvecklingsprojekt och väl underbyggda forskningsresultat måste utgöra grundstenar för en projektplanering. Samtidigt måste man här uppmärksamma och tillämpa Hieberts argumentation: ett kompetensutvecklingsprojekt måste alltid influeras av visioner, värderingar och politiska mål som ligger utanför vetenskapens arbetsfält och syfte. En projektplanering innehåller ett beslutsfattande som kan vara mer eller mindre underbyggt av teorier och fakta, men planeringen måste även inriktas mot vissa mål och värden, vilka inte enbart kan vara härledda ur fakta.

Utformningen av ett kompetensutvecklingsprogram måste därför omsorgsfullt relateras till övergripande mål i styrdokumentet, i skolans värdegrund samt till samhällets grundläggande politiska målsättningar. En grannlaga uppgift är här att definiera och hävda det område där forskning och beprövad erfarenhet måste få prioritet i förhållande till mer politiskt bestämda önskemål på kort och på lång sikt.

2.2.3. *Från teknisk till reflexiv rationalitet*

Under 90-talet har "top-down"-föreställningen om en teknisk rationalitet i lärarutbildningen kraftigt kritiserats. Istället betonas en reflexiv rationalitet där lärarens egen reflektion och kunskapsutveckling sätts i centrum. En bra sammanfattning av denna perspektivförskjutning görs av Eisner (1992):

Educational research does not yield prescriptions teachers get from an educational pharmacy which they then implement in their classrooms. What they can get are ideas, suggestions, possibilities. These important contributions are clues, not prescriptions. Nor are they hypothesis to be validated like those used in drug trials. In the classroom, nothing can replace the teachers judgment, including the decision to alter the aims of the lesson. Looked at this way, educational researchers are not engaged in discovering mechanistic universal truths sought by positivists or tidy prescriptions about "what works"... Educational researchers rather provide guidelines and interpretive material intended to liberate the teachers intelligence...

(s 8)

Några alternativa ansatser som kännetecknar denna perspektivförskjutning är *action research*, *situated learning* och *narratives*.

Action research, aktionsforskning, kopplas vanligen till olika former av fortbildning av verksamma lärare, men kan också användas i grundutbildningen, där lärarstudenter kan tillämpa liknande metoder på sin egen praktik. I action research pekas på det singulära och unika i varje utbildningsprocess, liksom på undervisning som en reflexiv aktivitet: *praktik – reflektion – nya hypoteser om praktik – ny praktik*. Lärarens professionella tillväxt sker genom fortlöpande självvärdering utifrån praktiken, med olika former av stöd och samarbete med kollegor och forskare. Läraren är central i denna verksamhet, inte lärarutbildaren. Utan lärarutbildarens och forskarens stöd riskerar dock läraren att fastna i det singulära och unika.

Situated learning lägger till ytterligare en aspekt: undervisning innebär deltagande i en praktiksamhörighet med sin egen historia, sin egen utvecklingsdynamik och förmåga att reproducera sig själv. Nybörjare utvecklas till erfarna lärare i en sådan praktiksamhörighet. En sådan praktiksamhörighet kan utgöras av lärare och forskare som tillsammans engageras i aktiviteter i en lärande gemenskap. Lärande är dessutom något som sker i alla situationer, inte enbart i formella undervisningskontexter.

Narratives, "berättelser", har presenterats som ett speciellt sätt att tänka och få kunskap om lärares kunnande. En utgångspunkt är att lärarens kunnande är inbäddat i praktiken i form av tyst kunskap med djupt liggande ofreflekterade föreställningar och antaganden, vilka är svåra att uttrycka explicit språkligt. Genom reflektion, samtal och dokumentation kan dessa göras medvetna och offentliga. Narratives är också en uttrycksform som ligger närmare lärarens vardagliga sätt att kommunicera med kollegor, dessutom avspeglar narratives den komplexitet som finns i undervisningspraktiken. Lärares beskrivningar om hur de undervisar liknar mer berättelser än teorier. Gudmundsdottir (1991) framhåller att lärares kunnande snarast är organiserat i narrativa strukturer:

their excellence as teachers is mostly due to the storied nature of their pedagogical content knowledge and the interesting stories they tell their students.

(s 207)

Narratives används för att ge ordning, koherens och signifikans åt praktik och *lived experience*, dvs personliga livserfarenheter. Att reflektera över och diskutera "berättelser" med kollegor kan utgöra ett väsentligt inslag i olika former av professionellt växande.

Om vi tillämpar dessa alternativa ansatser på tidigare kompetensutvecklingsprogram, så kan vi dra slutsatsen att på detta område finns redan en mängd "berättelser" att berätta, reflektera över, diskutera och lära av. Ett väl genomfört framtida program kan dessutom innehålla *action research* där anordnare och övriga inblandade parter fortlöpande kan lära under projektets gång. Speciella organisationer skulle kunna

skapas som har ett kontinuerligt ansvar för kompetensutvecklingsinsatser, där erfarenheter och reflektioner lever vidare i *lärande gemenskaper* för fortlöpande professionellt växande.

2.2.4. *Trender i lärarutbildningsprogram*

Under sextio och sjuttioalet fanns i stort sett ingen dokumentation om lärarutbildning, se Cooney (1994), men speciellt under nittioalet har en mängd litteratur och konferensprogram ägnats detta kunskapsområde. Trots att själva forskningsfältet är problematiskt och relativt lite beforskat kan man urskilja vissa typiska trender i 90-talets lärarutbildningsprogram, hävdar Krainer och Goffree (1999b). Dessa trender ligger väl i linje med den *föredömliga tillämpning* av lärarutbildarnas budskap om undervisning och lärande som diskuterats ovan:

1. Olika försök att förena teori och praktik, tex lärarstudenter i lärandemiljö tillsammans med lärarutbildare och erfarna lärare, där inblandade parter reflekterar över sin interaktion med lärandemiljön.
2. Ett bredare synsätt på forskning om lärarutbildning. Fokus ligger inte bara på lärare utan också på interaktionen lärare och lärarutbildare. Det är inte heller bara lärarutbildarna som gör undersökningar utan även lärarstudenterna.
3. Fokus sätts på klassrummet och reflektion och undersökning av klassrumspraktik. Detta understöds också av multimedias möjligheter att skapa "virtuella klassrum".
4. En ökad betydelse för "berättelser" av olika slag, tex typfall, situationsbeskrivningar och levnadsbeskrivningar. Mycket tyder på att detta är ett bra sätt att få kunskap om, eller representera, undervisnings- och lärandesituationer och professionellt växande.
5. Ökad betydelse för *action research* som systematisk reflektion för praktiker gällande den egna praktiken. Detta gäller både grundutbildning och fortbildning.
6. Större uppmärksamhet på kulturella, situerade och organisatoriska aspekter av klassrumsprocesser och lärarutbildningskurser.
7. Större vikt läggs på att integrera istället för att separera. Detta sammanfattas väl av Cooney (1994) som menar att man nu förkastar klassiska "falska dikotomier" som teori–praktik, innehåll–pedagogik, forskare–lärare.

Undantag från denna utveckling finns dock, tex i England, där "top-down"-tendensen förstärkts under nittioalet så att de lokala och regionala nätverk som växte fram under åttiotalet avvecklats och ersatts med

mer detaljerade centralt utformade träningsprogram, se t ex Comiti & Loewenberg Ball (1996), Hyde (2000) och Woodrow (2000). Denna top-down ansats är dock (för tillfället) inte speciellt relevant för svensk skola, som ju genomgått en omfattande decentralisering med lokala initiativ, implementeringar och beslutsfattande.

2.3. Några historiska perspektiv

2.3.1. *Inledning*

Det är inte möjligt att ge en sammanfattande historisk överblick av grundutbildningen och kompetensutvecklingen gällande en mångfald olika länder beroende på varje lands kulturella, strukturella och politiska särart. Många västländer, och även vissa utvecklingsländer, har emellertid påverkats starkt av den pedagogiska och didaktiska teoribildning som skett i USA. Därför kan en kartläggning av utvecklingen i USA vara av ett visst allmänt intresse. En sådan kartläggning görs av Dawson (1999) i form av en personligt färgad "berättelse". Dawson motiverar sin berättelse på följande sätt:

In order to understand these changes better, let us sketch a history of how we got to where we are today. Although these reflections are about inservice education in North America over the past 30 years, the underlying issues identified are universal.

(s 7)

En liknande historieskrivning finns också i TNTEEs Green Paper (2000) angående lärarfortbildning i Europa de senaste decennierna, vilket stärker bilden av att utvecklingen är en trend med viss internationell omfattning. Ett visst stöd vad gäller utvecklingen av matematikdidaktik som forskningsfält ges också av Niss (2000). I andra delar av världen, tex Japan och Kina, har dock en längre tid funnits andra skolbaserade fortbildningstraditioner, t ex *lesson studies*, se Yoshida (1999). För en närmare historik över fortbildningsinsatser i Sverige, se Emanuelsson (2001).

2.3.2. *Fortbildning av matematiklärare i USA och Canada*

Betecknande för sextiotalet var enligt Dawson (1999) introduktionen av "the New Math" och budskapet var att lärarna kunde för lite matematik. Om de bara kunde lära sig denna nya matematik, så skulle alla undervisningssvårigheter minska eller försvinna. Om tomrummet i det matematiska kunnandet fylldes igen så skulle allt falla på plats. Detta var också i överensstämmelse med bilden av vad som var god undervisning i matematik. Läraren skulle behärska sitt ämne och göra en klar och koncis presentation för eleverna. Eleverna fick sedan öva på likartade exempel som de läraren presenterat. Därefter skulle eleverna i test

visa att de kunde lösa just sådana exempel, kapitel för kapitel. Om eleven misslyckades berodde detta enbart på någon form av oförmåga hos eleven. Denna slutsats var odiskutabel, eftersom materialet hade presenterats klart och koncist av en kunnig och väl förberedd lärare. Dawson fortsätter:

The view at that time was one which said if teachers were given more mathematics, this was sufficient to guarantee changes to the teaching and learning of mathematics in school. The view today, as will be seen from the analysis presented later in this book, is that improved mathematical knowledge is a necessary but far from sufficient condition to foster change in the teaching and learning of mathematics.

(s 8)

Förhållningssättet var att se lärare och elever som defekta eller bristfälliga, som i medicinens sjukdomsbegrepp. Fortbildning innebar därför enbart att försöka avskaffa defekter i lärarens matematikkunskaper. Samma tidsanda gav upphov till idén om *programmed learning*, eventuellt med hjälp av undervisningsmaskiner, där det matematiska innehållet skulle kunna presenteras korrekt, precist och koncist.

Protester mot detta undervisningsparadigm förekom dock, liksom ifrågasättande av själva matematikens filosofiska underbyggnad. Dawson minns också sina funderingar kring hur lärare kunde uthärda talare efter talare, som talade om vad som var fel med undervisningen på ett tvådagars seminarium, och att lärarna ifråga bara behövde köpa det senaste "magiska elixiret" för att lösa problemen.

Många olika läror och riktningar började frodas under sjuttioalet, bland annat flyttades fokus från det förmedlade materialet till läraren som en aktiv och beslutande person i en svår och komplex miljö. Ett sätt att hantera denna insikt var att försöka konstruera "lärarsäkra" kursplaner i misstro mot lärarnas förmåga att klara av situationen. På motsvarande sätt vidtog ett omfattande testande av eleverna för att ständigt kontrollera att lärarna klarade av sina uppgifter. Olika rörelser som baserades på back-to-basics och definitioner av specifika lärarkompetenser växte sig starka för att "eliminera lärarvariabeln från utbildningsekvationen". Utvecklingsprogram för lärare skapades som skulle säkra att lärare undervisade på det sätt som var bestämt av utomstående experter.

Dawson menar att dessa projekt var dömda att misslyckas eftersom de inte hanterade de frågeställningar, uppgifter och omsorger som var centrala för lärarnas arbete i klassrummet. De framstod också som "omoderna" ju mer de konstruktivistiska idéerna fick fäste även vad gäller lärarnas sätt att konstruera sin egen matematiska kunskap.

Forskare började lägga märke till att effektiva lärare fokuserade på elevens lärande, och idéer om lärarinstruktioner och lektionsplanering fick en underordnad betydelse. Fortbildningsprogram gällande kunskaper

i matematik minskade också i antal och ersattes av program som fokuserade på elevens lärandeprocess. Lärarna fick lära om att lära, istället för att lära mer matematik. Även denna ansats var dock något ensidig och så småningom insåg man att båda aspekterna var viktiga. Dawson sammanfattar:

A more global view of the teaching and learning environment was emerging, one where the total context in which mathematics, teachers and students interacted needed to be accounted for in teacher development programs.

(s 11)

Det nuvarande läget beskriver Dawson som en insikt i att klassrummet är den oerhört komplexa kontext där matematik, kursplaner, lärare och elever interagerar. Av detta skäl är det svårt att identifiera enstaka variabler som avgörande och därmed också att göra förutsägelser. Lärare reflekterar också mer över sitt klassrumsarbete, de experimenterar mer med olika strategier, de utvecklar mer material som kan ta tag i elevernas intresse och motivation. Lärare och forskare har även börjat ifrågasätta klassiska dikotomier (se 2.2.4.) Dawson sammanfattar:

And it is into this situation that teacher educators are finding themselves immersed. What this means is that inservice leaders cannot just "deliver" a course, or a workshop, or a session as they might once have done. Now the pressure is for inservice providers to become part of the learning community, to live with the teachers and the learners and the realities of their situation. In doing so, inservice providers will necessarily influence and be influenced by that situation, and be an intimate part of any research the inservice providers might be engaged in as part of the development work.

(s 12)

Det är inte bara klassrummet som måste betraktas som ett komplext samspel med ömsesidigt lärande, utan även ett kompetensutvecklingsprojekt. De teorier och metoder som lärarutbildare lär lärare om klassrumspraktik, måste också tillämpas på lärarutbildarnas egen praktik, både i grundutbildning och annan utbildning av lärare.

Som jämförelse kan tas TNTEEs Green Paper (2000) där sextiotalet beskrivs som en tid av *knowledge transmission* med inriktning på att avskaffa brister hos enskilda lärare, en *deficit model*. Senare har lärares *professionella autonomi* betonats, tex genom introduktion av lärarcenter som drivs av lärare själva. I nutid betonas också systemiska ansatser som fokuserar utveckling av hela skolan och hur skolorganisationen ska kunna utvecklas för att uppnå högre kvalitet i undervisningen. Inför framtiden framhäver Green Paper att mer *skolbaserade och skolfokuserade aktiviteter* måste utvecklas, där lärarutbildare och all skolpersonal under längre tid samarbetar för att förbättra skolans kvalitet.

Trots de förenklingar och generaliseringar som görs, ger dessa två beskrivningar sannolikt en hyfsad bild av dominerande trender inom grundutbildning och fortbildningsverksamhet i Europa och USA de senaste decennierna.

2.4. En undervisningsvision

Som vi har sett av ovanstående historik har fokus flyttats från *läraren* till *lärandet*. Det finns inte längre en ensidig betoning av lärarens undervisning, eller elevens lärande, istället har en mer *systemisk* ansats utvecklats, där hela klassrummet och klassrummets beroende av omgivande kontext betonas.

En sådan fokusering på klassrummet med sin komplexa kontext kan man se i NCTMs nya *Principles and Standards for School Mathematics* (2000). Där målas följande klassrumsvision upp som ett övergripande mål för alla strävanden att förbättra undervisningen i matematik:

Imagine a classroom, a school, or a schooldistrict where all students have access to high-quality, engaging mathematics instruction. There are ambitious expectations for all, with accomodation for those who need it. Knowledgeable teachers have adequate resources to support their work and are continually growing as professionals. The curriculum is mathematically rich, offering students opportunities to learn important mathematical concepts and procedureds with understanding. Technology is an essential component of the environment. Students confidently engage in complex mathematical tasks chosen carefully by teachers. They draw on knowledge from a wide variety of mathematical topics, sometimes approaching the same problem from different mathematical perspectives or representing the mathematics in different ways until they find methods that enable them to make progress. Teachers helps students make, refine, and explore conjectures on the basis of evidence and use a variety of reasoning and proof techniques to confirm or to disprove those conjectures. Students are flexible and resourceful problem solvers. Alone or in groups and with access to technology, they work productively and reflectively, with the skilled guidance of their teachers. Orally and in writing, students communicate their ideas and results effectively. They value mathematics and engage actively in learning it.

(s 3)

Visionen är ett mycket ambitiöst "mål att sträva mot", som i sig skulle kunna vara en rimlig klassrumsimplementering av svenska läroplaner och kursplaner i matematik. En liknande vision skulle därför kunna vara ett överordnat mål för svenska kompetensutvecklingsinsatser och andra insatser för att främja matematikundervisningen. Fokuseringen på

classroom, som kanske inte passar så väl med målen i svenska läroplaner, kan lätt utvidgas till att gälla alla undervisningssituationer, i och utanför skolan, som på något sätt sker under lärares ledning eller mentorskap.

En viktig poäng med NCTMs vision är att förutom innehåll och lärares och elevers förhållningssätt i klassrummet så fokuseras på klassrummet som helhet i vid mening, dvs visionen har den systemiska ansats som tidigare diskuterats. Denna fokusering innebär att NCTM också lyfter fram andra faktorer som måste tas i beaktande, tex skolorganisation, tid för samtal och reflektion, lärares yrkes- och lönestatus, samhällets utbildningspolicy och allmänhetens syn på matematikämnet. En fördel med detta betraktelsesätt är att lärare och andra inblandade kan finna många vägar att närma sig det visionära målet, och att inte fokus sätts på att lärare ska erövra en given uppsättning uppfifrån bestämda "kompetenser".

En annan poäng är *high expectations*; att ha höga förväntningar på vad lärare och elever kan förmå är avsevärt mer fruktbart än att medverka till att befästa uppfattningar om att elevers och lärares brister och oförmågor idag är här för att stanna. Även själva visionen uppfattas ur detta dynamiska perspektiv: visionen bör enligt NCTM fortlöpande förfinas utifrån nyvunnen praktisk och teoretisk kunskap.

2.5. En planerad totalsatsning

2.5.1. Inledning

Ett intressant exempel på en planerad totalsatsning med systemisk ansats, är den så kallade John Glenn kommissionens slutrapport från september år 2000. Kommissionens rapport kan ses som ett första försök att i stor skala implementera NCTMs *Principles and Standards* i en nationell lärarutbildningssatsning. Intressant är att NCTM ger John Glenn kommissionens rapport sitt fulla stöd. NCTMs ordförande Lee V. Stiff sammanfattar:

We are very pleased with the goals of the report and to see that programs we have recently put in place are consistent with the reports recommendations for improving the mathematics education of our nations students.

Stiff hänvisar här till NCTMs *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) och även till NCTMs redan existerande *Academy for Professional Development*. Också i övrigt finns samstämmighet mellan John Glenn kommissionens rapport och NCTMs *Principles and Standards*, särskilt den breda ansatsen där även administratörer, distrikt, familjer och policyskapare ingår som givna element i en satsning för att förbättra matematikundervisningen i landet.

2.5.2. *Rapportens bakgrund och motiv*

I rapporten, *Before It's Too Late* (2000), beskrivs dels varför matematik och naturvetenskap är betydelsefulla skolämnen, dels det aktuella läget på undervisningsfronten, och till sist anges också ett antal övergripande mål och hur man ska nå dem. Även om vissa delar av rapporten behandlar specifikt amerikanska förhållanden, så är den centrala problematik som beskrivs gemensam för de flesta industriländer, inklusive Sverige. De förslag som ges i rapporten är inte enbart av typ fortbildningskurser, utan inbegriper även tex lärarlöner, arbetsmiljö, rekrytering och lärarutbildning. Denna breda ansats och totalsatsning bör ha sitt intresse även för svenska kompetensutvecklingsprogram. Kostnaden för genomförandet av programmet i USA beräknas till över 5 miljarder dollar per år. Ett omfattande lagförslag som konkretiserar organisationsutveckling och finansiering har tillställts kongressen, se *To Improve the Quality and Scope of Science and Mathematics Education*, H.R. 5504 (2000).

Matematik och naturvetenskap beskrivs i rapporten som särskilt betydelsefulla utifrån fyra motiv:

1. den snabba globaliseringen och behovet av utbildad arbetskraft
2. medborgarnas behov av matematik och naturvetenskap för vardagslivets beslutsfattande
3. kopplingen till landets säkerhetsintressen
4. det djupare värdet av matematik och naturvetenskap, eftersom dessa skapar och definierar vardagsliv, historia och kultur, de är primära källor för ett livslångt lärande och för civilisationens framsteg.

Situationen i USA att ungdomar inte lyckas i matematik och naturvetenskap beskrivs som "störande nyheter", men samtidigt pekas på ett antal gynnsamma faktorer för en större satsning. Hit hör allmänhetens medvetenhet om att utbildning är en samhällselig angelägenhet, och att landet just nu har ett resursöverskott som kan satsas. Dessutom kommer två tredjedelar av lärarkåren att ha bytts ut inom ett årtionde, så fokus kan sättas på att utbilda en ny lärarkader. Skolorna har också nu möjlighet att bruka all den kunskap som vuxit fram om skolämnen, hög standard, effektiv undervisning, bedömning och barns lärande. Angående dessa kunskapsområden framhåller rapporten:

In several states, school districts and schools innovative approaches are being attempted. Many are promising. We need to build on these approaches and extend them with new research. We now have the chance to bring this knowledge together in a mathematics and science education effort that will serve as a powerful tool for change. Ignored research is worthless; unused tools can only rust.

(s 13)

Till sist lyfter rapporten också fram att flera undersökningar visat att dagens ungdomar har ett ökat intresse för läraryrket i allmänhet som profession, jämfört med på åttiotalet.

2.5.3. *Action strategies*

Det övergripande målet är enligt rapporten att åstadkomma *high-quality teaching*. För att nå detta övergripande mål anges *tre delmål* med tillhörande *action strategies*:

1. Etablera ett *fortlöpande system* för förbättring av undervisningen i matematik och naturvetenskap för K–12. Varje delstat måste göra en heltäckande *behovsinventering* angående vad lärarna behöver. *Sommarinstitut* måste skapas för att möta dessa utvecklingsbehov. *Inquiry groups* kan erbjuda mötesplatser för lärare så att de engagerar sig i gemensamma studier för att förbättra ämneskunskaper och undervisningsskicklighet. Till detta behövs *ledarskapsträning* för de som ska leda dessa verksamheter. En *Internetportal* ska byggas upp så att lärarna får tillgång till en ständigt växande kunskapsbank. Ett *koordinerande råd* ska inrättas som harmoniserar alla aktiviteter. Till sist ska alla delstater initiera *belönings- och prestationslöneprogram*, detta både för att stödja kompetensutveckling hos lärare och göra läraryrket mer attraktivt.
2. Öka antalet lärare i matematik och naturvetenskap markant och förbättra kvaliteten i deras grundutbildning. En direkt strategi för att identifiera *exemplariska modeller för grundutbildning* som kan få en vidare spridning måste utvecklas. Andra *kvalificerade grupper* ska lockas att välja läraryrket och *Mathematics and Science Teaching Academies* ska skapas, vilka ger intensivkurser i effektiva undervisningsmetoder i matematik eller naturvetenskap.
3. Förbättra *arbetsmiljön* och gör läraryrket mer attraktivt för K–12 lärare i matematik och naturvetenskap. Speciella *introduktionsprogram* behövs som stödjer nya lärare på sin första tjänst, och som skapar formella mentorrelationer och introducerar till *inquiry groups*. Samarbete med *näringslivet* betonas för att skapa en professionell miljö, där material, utrustning och hjälpmedel kan erbjudas. Olika slag av *belöningar och uppmuntran* behövs, tex i form av priser, lönehöjning, stöd för vidare utbildning eller allmänt erkännande, för att lärare ska stanna kvar i yrket och förbättra sin kompetens. Dessutom behöver *lönen höjas* för alla lärare, speciellt för matematik och naturvetenskapslärare, så att den blir konkurrenskraftig i förhållande till näringslivet.

I dessa *action strategies* blir den systemiska ansatsen mycket tydlig; att utveckla en undervisning av god kvalitet innebär inte bara att stärka lärarnas kompetenser, det handlar även om tid, utrustning, löner, rekrytering, stöd från administration och skolpolitiker, uppmuntran, belöning och allmän förstärkning av lärares status. Rapporten avslutas dessutom med att *alla* amerikanska medborgare uppmanas att ta ett direkt ansvar i att uttrycka sina synpunkter på utbildning i matematik och naturvetenskap, och att ta initiativ för att implementera strategierna i sin egen samhällsmiljö, bland annat med hjälp av listor över vad man kan förvänta sig av inblandade parter.

2.5.4. Professionell utveckling

Ett viktigt begrepp i rapporten är *professionell utveckling*. Detta innefattar en planerad utbildningsprocess i samarbetande former med sikte på fortlöpande professionell utveckling för läraren ur följande aspekter:

- fördjupade ämneskunskaper
- förbättrad undervisningsskicklighet i klassrummet
- möjligheter att följa utvecklingen vad gäller ämnet och undervisningsskicklighet, och på utbildningsområdet i allmänhet
- möjligheter att själv utveckla ny kunskap om lärarprofessionen och delge andra dessa kunskaper
- ökad förmåga att leda elevens arbete, så att undervisningen ger en konstruktiv feedback från elever i syfte att utveckla undervisningen.

Här ligger fokus på *lärarens* utveckling, men som framgått tidigare finns också ett helhetsperspektiv: det är till sist *elevernas* utveckling som avgör i vilken grad läraren har utvecklats professionellt och den övriga miljön i vid mening varit gynnsam för lärande.

2.5.5. Högre studier för undervisning i matematik

Både John Glenn kommissionens rapport och NCTM ägnar intresse åt hur högre studier för undervisning i skolmatematik bör utformas. Följande framhävs i *Principles and Standards*:

The in-service education and professional development of teachers, especially in content knowledge, are not the exclusive mission of any single type of institution, so a significant leadership role is available for higher education. Teachers need in-service and graduate education that helps them grow mathematically and as practitioners.

Faculty members in institutions of higher education should be partners in the development of school-based mathematics communities. Teacher educators, mathematicians, and practising teachers working together can create a rich intellectual environment that will promote veteran teachers' growth and demonstrate to new teachers the value of learning communities.

(s 377–378)

Här finns tydliga paralleller med John Glenn kommissionens förslag om *Inquiry Groups och Teaching Academies*. Den matematik som behövs för att undervisa i skolämnet matematik bör vara utvald på så sätt att läraren får *a profound knowledge of fundamental mathematics* och professionell utveckling bör ske under former som påminner om *lesson studies*. Den systemiska ansats vad gäller att utveckla *professional cultures* med olika samverkande parter, som finns i NCTMs *Principles and Standards* och John Glenn kommissionens rapport, är en internationell trend och omfattar också grundutbildning och kompetensutveckling i stort. TNTEEs *Green Paper* ger en sammanfattande kommentar i frågan:

Active systemic relations and mutual partnerships between institutions of teacher education, teachers and schools are extremely important in all forms of teacher education. Close cooperation in areas such as

- the teaching practice component of programmes of initial teacher education
- research and development, and
- school improvement activities

between institutions of teacher education, teachers and schools are important in establishing and maintaining professional cultures of learning and development of "partnerships" is taking place in most countries of the European Union, although progress is by no means uniform.

(s 52)

Ett större kompetensutvecklingsprojekt bör i detta perspektiv inte vara en tidsbegränsad "intervention" i ett system som sedan återgår till det vanliga. Istället måste projektet skapa nya professionella organisationer och kulturer som består och utvecklas av egen kraft efter det att själva projektet avslutats. Utvecklandet av *inquiry groups och teaching academies* som föreslås i John Glenn kommissionens rapport skulle även kunna vara en viktig beståndsdel i ett svenskt projekt. För en närmare principanalys av vilka kunskaper en lärare som undervisar i matematik behöver, se avsnitt 2.9 i denna rapport.

2.6. Praktiska råd till anordnare

Även om forskningen kring kompetensutvecklingsprojekt inte är särskilt utvecklad, så finns en omfattande samlad erfarenhet om vad som visat sig fungera. En intressant sammanställning med betoning på praktisk erfarenhet görs av Clarke (1994). Clarke har i sin tur extraherat erfarenheterna från omfattande studier av olika kompetensutvecklingsprogram, se Clarke (1991). De tio råden som syftar till att *förvandla principer till handling* är:

1. Låt de frågeställningar som är angelägna formuleras (huvudsakligen, men inte enbart) av lärarna själva, och lägg in möjligheter till olika val från deltagarna.
2. Involvera grupper av lärare snarare än enstaka individer från ett antal skolor, och engagera skol- och distriktadministration samt elever, föräldrar och en bredare skolsamfällighet.
3. Uppmärksamma och ta itu med de många hinder för lärares utveckling som finns på individ-, skol- och distriktsnivå.
4. Använd lärare som deltagare i klassrumsaktiviteter eller elever i verkliga situationer. Modellera de önskvärda klassrumsansatserna under skolbaserade sessioner för att ge klarare bilder av de önskade förändringarna.
5. Se till att lärare medvetet och aktivt engagerar sig i de professionella utvecklingssessionerna och genomför erforderliga studier och klassrumsuppgifter anpassade till deras egna klassrum.
6. Uppmärksamma att förändringar i lärares föreställningar om undervisning och lärande härleds huvudsakligen från klassrumspraktik. Det är först när det är möjligt att utvärdera projektverksamheten och det visar sig att elever faktiskt lär bättre, som man kan förvänta sig att lärare förändrar sina föreställningar.
7. Ge tid och möjlighet för planering, reflektion och feedback för att kunna rapportera framgång och misslyckanden till gruppen, för att kunna dela "praktikens visdomar", och för att kunna diskutera problem och lösningar med avseende på enskilda elever och nya undervisningsansatser.
8. Möjliggör för deltagande lärare att få ett avsevärt inflytande genom att de involveras i beslutsfattande och ses som sanna partners i förändringsprocessen.
9. Uppmärksamma att förändring sker gradvis och att den är en svår och ofta smärtsam process, och ta i beräkningen möjligheter för fortlöpande stöd från kollegor och kritiska vänner.
10. Uppmuntra deltagarna att sätta upp ytterligare mål för sin professionella tillväxt.

Särskild uppmärksamhet ger Clarke punkt 3 gällande hinder för lärares utveckling. Ett kompetensutvecklingsprojekt som inte tar itu med dessa hinder har små möjligheter att lyckas. Hindren indelar Clarke i fyra kategorier:

1. Hinder utanför skolan: en inadekvat teori för implementering, brist på stöd från central ledning, brist på pengar och uppföljning, oförmåga att förstå enskilda skolors specifika situation.
2. Hinder relaterade till skolorganisation och skolsamfällighet: brist på tid för enskilt läsande och reflektion, brist på gemensam planering med andra lärare, brist på gemensamt arbete i klassrum, bedömningar av elever och lärare som inte är i harmoni med de föreslagna förändringarna, avvikande föreställningar hos elever, föräldrar, rektor, skolstyrelse vad gäller väsentligt innehåll, passande pedagogik och bedömning.
3. Hinder relaterat till lärarnas föreställningar, kunskap och praktik: brist på engagemang och delaktighet vad gäller föreslagna förändringar, lärares krav på omedelbar "praktiserbarhet" för att något ska bejakas, lärares inadekvata kunnande i matematik och pedagogik.
4. Hinder relaterat till anordnarnas genomförande: brist på samband mellan teori och praktik, att sätta fokus på att korrigera brister istället för att uppmuntra professionell tillväxt, oförmåga att inkorporera kunnande om undervisning och lärande i utvecklingsprogrammets innehåll.

Flera av punkterna gäller att lärare tidigt engageras och får delaktighet i projektet, så att det inte får karaktären av förmedling. Av särskilt intresse är också att det yttersta kvalitetskravet för läraren då det gäller en förändring, är att eleverna faktiskt lyckas bättre, och att detta låter sig utvärderas. Möjligheten att arbeta i grupp och få tid för reflektion tillsammans med kollegor är också en viktig punkt.

Vi kan också se en *systemisk* betoning av skolan som helhet, och att denna helhet i sin tur påverkas av en mängd övriga externa faktorer, vilka måste uppmärksammas och hanteras. Clarkes sammanställning av praktiska erfarenheter verkar vara konsistent med aktuell teoribildning och den ansats som finns i *Principles and Standards* och *Before It's Too Late*.

I den mån som aktuell teoribildning vad gäller undervisning och lärande är relevant, så är inte denna överensstämmelse särskilt överraskande, men ett exempel på ett lyckat möte mellan samlad beprövad erfarenhet och aktuell forskning.

2.7. Gemensamma förändringssträvanden

Trots stora skillnader vad gäller kulturell och organisatorisk kontext så kan man hitta många gemensamma drag i större kompetensutvecklingsprojekt under nittio-talet. Detta kan dels bero på att aktuell forskning har ett internationellt genomslag, men kan också bero på att praktisk beprövad erfarenhet från olika länder och miljöer uppvisar vissa generella drag, som vi sett exempel på ovan.

Att många förändringssträvanden har generella drag beskrivs av Jaworski och Wood (1999) med utgångspunkt från projekt under nittio-talet i USA, Sydafrika, Libanon, Portugal, Israel, Canada och Nya Zeeland. Gemensamt för dessa länders situation är en förhärskande tradition av "kunskapstransmission" som upplevs som föråldrad och ineffektiv, och ett starkt behov av förändring mot ett mer konstruktivistiskt och kommunikativt förhållningssätt. Försöken att genomföra denna förändring sammanfattar Jaworski och Wood under fem huvudpunkter:

1. *Lärare som arbetar med matematik i fortbildningsprogrammet*

Lärare inviteras att själva lösa icke-standardproblem och att modellera verkliga situationer. De kan arbeta med problem som de sedan kan erbjuda sina elever och lärarna engageras i matematiska processer och strategier som de vill att eleverna ska använda. Lärare kan också engageras i elevliknande situationer för att öka känsligheten för elevens tänkande och uppmärksamma elevers behov i lärandet. Lärarna ges möjlighet att känna igen och värdesätta högre former av matematiskt tänkande och hur detta kan förstärkas i klassrumspraktiken, samt uppmärksamma och utveckla abstraktionsprocesser i matematiken. Jaworski och Wood sammanfattar angående ovanstående former av utbildning i matematik:

It raised exciting possibilities for mathematical learning of which teachers had previously been unaware. However, the promise of such euphoria is lost if teachers are not supported in translating their new visions into classroom practice.

(s 131)

Här formuleras behovet av fortlöpande stöd för matematikfortbildade lärare som återvänder till en skola med traditionell undervisningskultur. Kollegor, läromedel och elever får ofta tolkningsföreträde vad gäller synen på vad "matematik" ska vara i skolmiljö.

2. *Lärare som fortbildas i miljöer utanför skolan eller i skolan*

Jaworski och Wood menar att mycket tyder på att kurser utanför skolan för enstaka lärare är problematiska, även de kurser som har längre varaktighet. Även om lärarna blir entusiastiska under kursen så blir mötet

med kollegor och vardagen i det egna klassrummet ofta svårt. Att åstadkomma en verklig förändring i klassrummet ter sig omöjligt.

Det finns en kraftfull potential i att introducera lärare till alternativa ansatser i matematik och dess lärande, det ger visioner och en stark vilja till förändring. Å andra sidan finns det en risk att visionerna förblir orealiserade om lärarna inte förmår implementera dem i det egna klassrummet och i skolkulturen. En sådan implementering är snårig och skapar dilemman för läraren, som därför behöver *fortlöpande stöd*. En skolbaserad fortbildning som omfattar en hel grupp med matematiklärare har betydligt större genomslag.

3. Korta program som fokuserar på alternativ undervisning

Olika kurser och program kan göra lärarna medvetna om alternativa undervisningssätt, men erfarenheten visar alltså att det är svårt för lärarna att sedan översätta detta till sina egna klassrum, speciellt om programmen är korta:

The implications are that, however good short programs are at developing an awareness for teachers, ongoing forms of inservice education are necessary for any lasting or effective change to be realized in classrooms.

(s 135)

I program som fokuserar alternativa undervisningsmetoder kan man se tre olika ansatser att hjälpa lärare utveckla sin undervisning:

- anordnare utformar konkret klassrumsmaterial som sedan i workshops tillsammans med lärare demonstrerar hur materialet kan användas i klassrummet.
- beskrivningar av klassrumssituationer som en utgångspunkt för lärardiskussioner och analys, vilket uppmuntrar lärarna att senare göra liknande analyser av sin egen klassrumssituation.
- modelleringar av aktiviteter där lärarutbildaren gör en direkt insats genom att demonstrera den teknik och de strategier som lärare sedan kan använda i klassrummet.

Slutsatsen blir här att fortlöpande, eller i alla fall fleråriga, program är de enda som har möjlighet att bli framgångsrika.

4. Lärare-som-forskare

Denna typ av program brukar vara över en längre tid och omfatta ett mindre antal lärare. Det som kan göra ett sådant program effektivt kan sammanfattas i följande punkter:

- en *utsträckt tid* då lärare arbetar med specifik inriktning mot att utveckla undervisningen.
- uttryckligen önskade *reflekterande aktiviteter* som härstammar från klassrumsundersökningar.
- *gemensamma* aktiviteter med andra lärare och kursledare
- utrustning och tid att *föra journaler* över aktiviteter och reflektioner, och att beskriva erfarenheter av lärande.

Jaworski och Wood menar att denna typ av program verkar ge en lyckad kompetensutveckling för vissa lärare, på grund av programmens mångdimensionella karaktär och deras utsträckthet i tiden.

5. Lärarutbildarens lärande och utveckling i ett politiskt perspektiv

Att utforma utvecklingsprogram är problematiskt ur många aspekter. Erfarenheten från många projekt visar att även lärarutbildarna måste reflektera över sin verksamhet för att lära och utvecklas. Förutom en mängd praktiska problem med organisation, tid, omfattning och resurser så finns också en mer övergripande problematik med både teoretiska och politiska dimensioner.

Många kompetensutvecklingsprogram har en explicit formulerad konstruktivistisk utgångspunkt. Synen på matematiklärande i klassrummet har förändrats under åttio- och nittioalet i konstruktivistisk riktning och så även synen på hur lärare lär. Tidigare former av projekt där kunskap skulle förmedlas från lärarutbildare till lärare har ersatts av nya former där lärare konstruerar kunskap utifrån sin egen praktik i samarbete och diskussion med lärarutbildare och forskare. Hur detta ska gå till är emellertid inte självklart, konstruktivism är ett sätt att *se på kunskap och lärande* och leder inte direkt till en bestämd praktik i klassrum eller i kompetensutveckling.

Vanligen har kompetensutvecklingsprojekt också en social eller politisk bakgrund. Jaworski och Wood kommenterar:

Across the EU countries, the Middle East, South Africa, Australia and North America, top-level reports have been issued which indicate that, globally, education is in a state of flux. Several significant reports have been written detailing the shift from traditional approaches to those who emphasise the changing nature of student roles, knowledge, and concomitantly teachers roles.... These documents chart a call for a shift from traditional teacher-as-authoritarian to those which reflect the responsibility for learning back to students – a goal which seems compatible with constructivist principles. The underlying assumption is that in order to for these nations to accomodate the dimensions of economic

and socio-political shifts taking place, students must be adaptable and flexible in their thinking.

(s141)

Förutom det politiska målet att skolan bör fostra ungdomar så att de kan verka i och driva på en snabbt föränderlig samhällsekonomi, så finns även demokratiska grundvärderingar ofta inbäddade i utvecklingsprojekten. Så betraktar tex Adler (1995):

(Constructivism) as driven by democratizing intent, with the twin goals of moving away from authoritarian approaches to teaching, learning and knowledge, and improving socially distributed access and success rates.

(s208)

Hon menar också att det kan finnas en spänning mellan dessa demokratimål och målet att utveckla matematisk kunskap, *the democracy-development tension*. Speciellt kan detta bli tydligt om politiska krav ställs på en snabb utbildning av en matematikkunnig kader.

Intressant är här NCTMs *Principles and Standards* betoning av att det inte finns någon motsättning mellan *equity och excellence* i klassrumsvisionen och vägen att nå dit. Utgångspunkten är att alla elever kan lära matematik, avgörande är höga förväntningar och möjlighet till extra stöd och resurser till elever med olika svårigheter. På motsvarande sätt behöver speciellt intresserade eller begåvade elever *enrichment programs* för att utmanas och engageras.

Den klassrumsvision och den miljö som presenteras i *Principles and Standards* är i sig ett exempel på klassrumsdemokrati, där alla får göra sig hörda och argument värderas utifrån sakligt innehåll istället för position och auktoritet. Frågan om hur mycket av samhällets resurser som ska satsas på att uppnå denna vision i förhållande till rekrytering för matematikintensiva utbildningar besvaras av NCTM på följande sätt:

All students should have a common foundation of challenging mathematics, whether those students will enter the workplace after high school or pursue further study in mathematics and science.

(s 368)

Man kan här se ett dubbelt demokratimål, dels den demokratiska miljön i själva klassrummet, dels att *alla* elever ska få möta denna rika matematiska miljö.

2.8. Utmaningar för framtida projekt

En intressant fråga är hur *föredömlig tillämpning* av aktuell forskning skulle kunna implementeras av anordnare i ett framtida kompetensutvecklingsprojekt. Ett exempel på en sådan möjlig implementering

ger Krainer (1999a) som uppmärksammar ett antal "utmaningar" för framtida kompetensutvecklingsprogram. Krainers utmaningar är alltså i högre grad än Clarkes "teoribemängda" i den meningen att de explicit kopplas till anordnares *föredömliga tillämpning*. Konstruktivistiska idéer, samarbete och reflektion finns explicit uttryckta. Ett annat påtagligt inslag är olika former av *action research*. De områden som måste beaktas sammanfattar Krainer i tolv punkter:

1. Initiera och stödja lärares reflektion och nätverksarbete (*networking*), speciellt utveckla lärares undersökningar av sitt eget arbete. Ta särskild hänsyn till att involvera så många matematiklärare som möjligt på skolan och regionalt, liksom beslutsfattare, föräldrar och inte minst elever som ofta är utmärkta experter på att utvärdera lärares undervisning. Bygg nätverk av "kritiska vänner".
2. Göra goda arbeten av elever och lärare synliga på olika sätt, tex genom utställningar på skolan, dokumentation i skolrapporter, fallstudier till tidskrifter med mera. Detta för att skapa lärandemiljöer för andra lärare så att de genomför sina egna idéer. Bygga på styrka, inte på svaghet.
3. Motivera och stödja lärare att skriva ned sina erfarenheter. Detta har minst två förtjänster, dels innebär själva skrivandet reflektion och berikande av kunskap, dels kan resultaten läsas och användas av andra i ett steg mot nätarbete.
4. Initiera och stödja skolbaserad professionell utveckling genom att arbeta med grupper av lärare i en skola eller en region och också innefatta beslutsfattare, lärarutbildare, föräldrar och elever.
5. Stödja ämnesrelaterade skolutvecklingsprojekt, tex att stödja grupper som utvecklar skolans "matematiska profil", och på så sätt stödja klassrumsutveckling.
6. Initiera diskussioner bland lärare angående utveckling av organisationer och utbildningssystem. Diskutera vad som kännetecknar en "god" skola, kursplaner, utvärderingssystem, vilken roll lärande, utbildning och vetenskap har i samhället, kvaliteten hos matematikundervisning i landet jämfört med andra länder och andra frågor av intresse.
7. Nya vägar för att mediera mellan teori och praktik, speciellt att skapa en kultur av samarbete där man tar hänsyn till teoretikers och praktikers olika styrka och intresse innefattande ömsesidig respekt och hög grad av öppenhet. Att bygga upp goda förbindelser med skolor som centrum för professionell utveckling och samarbetsplatser för forskning i matematikdidaktik.
8. Initiera professionella utvecklingsprogram för ämnesansvariga i matematik, rektorer med flera i blandade grupper.

9. Initiera och stödja skolbaserade, regionala och nationella nätverk av matematiklärare och forskare, åtföljt av intern värdering via lärarna själva och extern värdering via matematikdidaktiker. Detta genererar ny kunskap om professionell tillväxt hos lärarna och är till hjälp i nätarbetet.
10. Initiera och delta i offentliga diskussioner med betydelse för matematiken i samhället, i skolan och dess relevans för kulturell och ekonomisk tillväxt i landet.
11. Initiera diskussioner på skolorna, som involverar lärare, elever och föräldrar, och offentliga diskussioner om värdet av jämförande studier av resultat, utvärderingskultur i skolor och i olika regioner och länder, speciellt betydelsen av självutvärdering.
12. Konsekvent självtillämpa våra principer vid utbildning av matematiklärare: Om vi ser läraren som en guide och facilitator i den process som utgör elevens konstruktion av kunskap, så måste vi organisera miljöer för lärande vid kompetensutvecklingsprogram som har samma karaktär. Vi måste dessutom kritiskt undersöka och utvärdera hur vi lyckas med att skapa sådana miljöer.

Som synes finns en genomgående systemisk ansats, där förutom administratörer och politiker även föräldrar och elever finns med som aktörer i ett projekt. Dessutom måste matematikens roll och värde tydliggöras i offentliga debatter och massmedia. En grannliga uppgift är som tidigare nämnts att beforska ett framtida kompetensutvecklingsprogram. Detta kräver att mål och kvalitetskrav uttrycks explicit och att instrument utvecklas för att avgöra i vilken mån målen har uppnåtts. Ett omfattande program kan innebära att anordnare beforskar sin egen verksamhet och också att extern forskning utifrån en uppsättning bedömningsgrunder fortlöpande utvärderar projektet och kopplar detta till elevers kunskande på längre sikt.

Jämfört med Clarkes praktiska råd, så finns hos Krainer en starkare betoning av nätverk och att offentliggöra matematiken i media och debatter. Dessutom betonar Krainer vikten av elevmedverkan, det goda exemplet, makt, läraren som en forskande praktiker och mediering mellan praktik och teori.

2.9. Kunskande för undervisning i matematik

2.9.1. Inledning

Som vi sett i Dawsons historik så var det vanligt att matematiklärare under sextioalet ansåg att kunskap om matematik som vetenskap medförde att man också "kunde" skolmatematiken. Detta förhållningssätt yttrade sig även metodiskt på så sätt att det mest vetenskapligt stringenta

framställningssättet också ansågs vara det mest pedagogiska för barn i alla åldrar. Denna föreställning, driven till sin spets, fick sitt uttryck i "The New Math", som även spred sig till Sverige bland annat i form av mängdläran. Sedan dess har mycket hänt, i alla fall i ungdomsskolan, vad gäller synen på undervisning, lärande och lärarens ansvar i undervisningssituationen. Frågan blir då: *Vad ska en lärare kunna för att undervisa effektivt i skolämnet matematik?*

Svaret på denna fråga är naturligtvis central för ett kompetensutvecklingsprojekt, men även för grundutbildning av lärare. I detta avsnitt ges en översikt av några svar på frågan, men ett uttömmande svar med vetenskapliga anspråk ligger utanför denna rapports syfte och utgångspunkter. De exempel på svar som nedan presenteras från NCTMs *Principles and Standards*, John Glenn kommissionens *Before It's Too Late* och kommittén Mathematics Learning Study's *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, Kilpatrick et al (2001), representerar dock omfattande internationella erfarenheter både från praktik och forskning, och har därmed en avsevärd tyngd.

2.9.2. *Principles and Standards om effektiv undervisning*

I NCTMs *Principles and Standards* (2000) betonas att matematikundervisning är ett komplext företag, och att inga enkla recept finns för att uppnå en effektiv undervisning. Det finns inte *ett enda bästa sätt att undervisa*. För att vara effektiv måste man på ett djupt sätt förstå den matematik man undervisar om och kunna utnyttja denna kunskap på ett flexibelt sätt. Läraren måste också förstå och bry sig om sina elever som både matematiklärande och som mänskliga individer, och läraren måste på ett skickligt sätt kunna välja mellan olika strategier vad gäller pedagogik och bedömning. Effektiv undervisning innebär också reflektion och fortlöpande ansträngningar att söka förbättra undervisningen. Lärare måste ha återkommande och rika möjligheter och resurser för att utveckla och fräscha upp sina kunskaper. NCTMs beskrivning av vad läraren måste kunna är både holistisk och dynamisk:

Teachers need to know and use "mathematics for teaching" that combines mathematical knowledge and pedagogical knowledge. They must be information providers, planners, consultants, and explorers of uncharted mathematical territory. They must adjust their practices and extend their knowledge to reflect changing curricula and technologies and to incorporate new knowledge about how students learn mathematics. They also must be able to describe and explain why they are aiming for particular goals.

(s 370)

Det kunnande som en lärare behöver delas in i två huvudtyper, matematisk kunskap och pedagogisk kunskap, vilka i sin tur indelas i olika kategorier:

Matematisk kunskap:

- kunskap om hela matematikområdet
- djup och flexibel kunskap om kursernas mål och om viktiga idéer som är centrala för det aktuella undervisningsstadiet
- kunskap om utmaningar och problematik som elever troligtvis upplever då dessa idéer ska läras
- kunskap om hur dessa idéer kan representeras på ett effektivt sätt för eleverna
- kunskap om hur elevernas kunnande ska kunna bedömas.

Denna typ av kunskap hjälper läraren att fatta beslut gällande kursens utformning, ger möjlighet till att besvara elevernas frågor och planera utifrån utveckling av centrala begrepp.

Pedagogisk kunskap:

- kunskap om hur elever lär
- kunskap om en uppsättning undervisningstekniker och material
- kunskap om hur man kan organisera och leda verksamheten i klassrummet.

Denna kunskapstyp utvecklas i hög grad genom undervisningspraktik, framhålls i dokumentet.

Lärare måste förstå *the big ideas of mathematics* och framställa matematiken som en koherent och sammanhängande verksamhet, se Schifter (1999) och Ma (1999). Läraren måste också veta vilka olika representationer en idé kan ha, och styrkan och svagheten med dessa, samt hur representationerna är relaterade till varandra, se Wilson, Shulman och Richert (1987). Dessutom måste läraren känna till vilka idéer elever brukar ha svårigheter med och olika vägar att överbrygga vanliga begreppsliga missförstånd.

Eftersom elever lär genom att anknyta nya idéer till tidigare kunskap måste läraren förstå vad eleven redan kan. Effektiva lärare vet hur man ställer frågor och planerar lektioner som uppenbarar elevernas tidigare kunskaper, och de kan sedan utforma lektioner och metoder som svarar mot och bygger vidare på sådan kunskap. Läraren måste också ha förmåga att improvisera, fatta beslut om och hantera de oplanerade svårigheter och problem som kan uppstå under lektionen så att undervisningen medvetet inriktas på de avsedda målen.

Effektiv undervisning innebär också att läraren har förmåga att skapa en *miljö*, i vid mening, som uppmuntrar matematiska aktiviteter och sätter fokus på väsentligheter:

The teacher is responsible for creating an intellectual environment where serious mathematical thinking is the norm. More than just a physical setting with desks, bulletin boards, and posters, the classroom environment communicates subtle messages about what is valued in learning and doing mathematics. Are students discussion and collaboration encouraged? Are students expected to justify their thinking? If the students are to learn to make conjectures, experiment with various approaches to solving problems, construct mathematical arguments and respond to others arguments, then creating an environment that fosters these kind of activities is essential.

(s 18)

Effektiv undervisning innebär även en ständig vilja till förbättring och professionellt växande. NCTM lyfter här fram samarbete med kollegor för reflektion, analys och diskussion som en väsentlig väg, liksom så kallade *lesson studies*, se Stigler och Hiebert (1999) samt Yoshida (1999). Intressant i detta sammanhang är att det verkar råda stor överensstämmelse bland matematikdidaktiker, vad gäller beskrivningen av den effektiva matematikläraren. Som exempel kan tas Ivanov (2000) som konstaterar att trots kulturella skillnader så är synen på den "ideale matematikläraren" likartad bland didaktiker världen över, det som gäller i New York gäller också i St. Petersburg. Detta förhållande, menar Ivanov, bör göra det möjligt att utforma ett gemensamt program vad gäller principer för utbildning av matematiklärare.

Trots att kursplaner i skolmatematik och läroplaner är kulturellt och politiskt–nationellt färgade, så finns sannolikt mycket att hämta även vad gäller matematiskt och pedagogiskt innehåll i de olika projekt som det senaste decenniet utvecklas runt om i världen.

2.9.3. John Glenn-kommissionen om *high-quality teaching*

I John Glenn-kommissionens rapport *Before It's Too Late* (2000) diskuteras innebörden av *high-quality teaching*. Först görs en jämförelse med japansk undervisning via *TIMSS videostudies* och man drar slutsatsen att amerikansk undervisning är ytlig och traditionell, den bygger enbart på osammanhängande instruktion och ytlig inläring. Mot detta ställs idealet *high-quality teaching* (HQT), som diskuteras i tio punkter:

1. En huvudfråga är att HQT är *något som kan läras*, det är inte en medfödd förmåga som somliga har och andra saknar. Skickligheten uppnås genom träning, mentorskap, samarbete med kollegor och praktik.

2. HQT kräver att lärarna har *djup ämneskunskap*, här finns inga möjliga substitut.
3. I HQT så är *undersökning* själva kärnan i lärarens arbete. Undersökningar innebär användande av hands-on material, elevaktivt lärande, övningar och vardagssituationer. Den lär inte bara eleven vad som ska läras utan hur man ska lära.
4. HQT uppmuntrar inte bara elever till att lära, det *insisterar* att de ska lära.
5. HQT uppmuntrar elever att försöka *nya möjligheter*, att våga sig på nya möjliga förklaringar och att utreda dessas *logiska konsekvenser*.
6. HQT fostrar till en hälsosam *skepticism*. Den uppmuntrar elever att utsätta sina arbeten för kamraternas ifrågasättande, att analysera och sätta samman, och att reflektera över hur man nått fram till sina slutsatser.
7. HQT beaktar, lyfter fram och utgår från *skillnader i lärandestilar och förmågor* hos eleverna. Den har den djupaste respekt för eleven som person, och den tar fasta på styrka istället för att peka ut svagheter.
8. HQT grundas på ett *omsorgsfullt och grundligt* anordnande av kursen, av bedömning och höga kvalitetskrav på elevers lärande.
9. För att behålla sin skärpa måste HQT *ständigt omskapas* av de institutionella strukturer som stöder den genom kompetensutveckling, fortsatt utbildning, effektivt användande av teknologi samt uppmärksammande och belöningar.
10. Till sist så har HQT den karaktären att dess grad av effektivitet utvärderas via de färdigheter och det kunnande som de *elever* har som mottar undervisningen.

Som vi ser så finns här tydliga paralleller med NCTMs *effektiv undervisning*. Särskilt värt att notera är kanske den första punkten, som gör upp med föreställningen att god undervisningsförmåga är något vissa lärare fått "av naturen" medan andra saknar den och inte heller kan utveckla den. Punkterna 6 och 7 anknyter till den demokratiska klassrumsmiljö, som finns i NCTMs vision. Värt att notera är också den sista punkten som pekar på att till sist är det elevens resultat som avgör graden av *high quality teaching*, inte att läraren uppfört sig "korrekt". Huruvida ett kompetensutvecklingsprojekt varit lyckosamt måste ytterst relateras till om elevernas kunnande ökat, inte till att särskilda institutioner förverkligats eller att lärarna uppnått vissa kompetenser. Som framgår av punkt 9, så betraktas HQT dynamiskt; innebörden av begreppet undervisningskvalitet kan fortlöpande utvecklas och förfinas, och punkterna bör inte uppfattas som statiskt givna.

2.9.4. *Mathematics Learning Study Committee om professionalism*

Rapporten *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, Kilpatrick et al (2001), är en omfattande kritisk sammanställning av kunskan- det inom *mathematics education*. Dess yttersta syfte är att bidra till för- bättrade matematikkunskaper med fokus på *pre-kindergarten* till *eighth grade*.

Kommittén bakom rapporten, *Mathematics Learning Study Commit- tee*, hade uppdraget att syntetisera forskningen kring matematiklärande, erbjuda forskningsbaserade rekommendationer för undervisning, lärar- utbildning och kursutformning samt ge råd och vägledning till utbildare, forskare, förläggare, opinionsbildare och föräldrar.

Enligt rapporten är tre typer av kunskap avgörande för undervisning i skolmatematik:

Matematisk kunskap: att ha kunskap om matematiska fakta, begrepp, procedurer och relationerna mellan dem; att ha kunskap om hur matematiska idéer kan representeras; att ha kunskap om matematik som disciplin, hur kunskap produceras och kunskap om normer och standard för argumentation och bevisföring; att ha kunskap om de begreppsliga grunder som bygger upp skolmatematiken så att man kan utveckla idéer som ligger bortom vardagslivet; att ha matematisk känslighet så att man kan vägleda och tolka elevernas matematiska ansträngningar.

Kunskap om eleverna: att ha kunskap om hur olika matematiska idéer utvecklas över tid hos barn; att ha kunskap om hur man bestämmer barns utvecklingsnivå; att ha kunskap om de vanliga svårigheter som elever har med olika matematiska begrepp och procedurer; att ha kunskap om hur elevers tänkande och lärande påverkas av erfarenheter, material och olika ansatser i undervisningen.

Kunskap om undervisningspraktik: att ha kunskap om kursen i vid mening; att ha kunskap om uppgifter och verktyg för att lära viktiga matematiska idéer; att ha kunskap om klassrumsnormer som stöder utveckling av matematisk förmåga; dessutom behövs den praktiska förmågan att i handling kunna använda uppgifter i klassrummet och att kunna använda normer konstruktivt i olikartade klasser.

Rapporten beskriver *effective teaching* på följande sätt:

The effectiveness of mathematics teaching and learning is a function of teachers' knowledge and use of mathematics content, of teachers attention to and work with students, and of students' engagement in and use of mathematical tasks. Effectiveness depends on enactment, on the mutual and interdependent interaction of the three elements – mathematical content,

teacher, students – as instruction unfolds. The quality of instruction depends, for example, on whether teachers select cognitively demanding tasks, plan the lesson by elaborating the mathematics that the students are to learn through the tasks, and allocate sufficient time for the students to engage in and spend time on the tasks. Effective teachers have high expectations for their students, motivate them to value learning activities, can interact with students with different abilities and backgrounds, and can establish communities of learners.

(s 9)

Vidare framhålls betydelsen av att man knyter samman elevens informella kunskaper och erfarenheter med matematiska abstraktioner, tex genom att använda olika manipulativa material. Användande av miniräknare kan här förstärka elevens begreppsförståelse och övning i att använda detta hjälpmedel hjälper eleven att automatisera sådana procedurer som de redan förstått.

Att utveckla *proficiency in teaching mathematics* innebär enligt rapporten att man stärker följande samverkande komponenter:

Conceptual understanding: att ha genuin kunskap om den matematik, de elever och den undervisningspraktik som behövs för undervisningen.

Procedural fluency: att kunna genomföra grundläggande undervisningsrutiner.

Strategic competence: att kunna planera effektiv undervisning och lösa de problem som uppstår under undervisningens gång.

Adaptive reasoning: att kunna berättiga och förklara ens praktik och att kunna reflektera över den.

Productive disposition: att uppfatta matematik, undervisning, lärande och förbättring av praktiken som meningsfulla och värdefulla samt att ha tilltro till ens egen uthållighet och effektivitet i arbetet.

De fem sammanlänkade kunskapskomponenter som nämns ovan används också tidigare i rapporten för att beskriva mathematical proficiency, dvs den matematiska förmåga som det är önskvärt att eleverna uppnår. Det holistiska och dynamiska synsätt som finns vad gäller att beskriva elevens kunnande återkommer alltså vid beskrivning av lärarens kunnande. Vad gäller grundutbildning och kompetensutveckling ger rapporten följande sammanfattning:

Effective programs of teacher preparation and professional development help teachers to understand the mathematics they teach, how their students learn that mathematics, and how to facilitate that learning. In these programs, teachers are not given prescriptions

for practice or readymade solutions to teaching problems. Instead, they adapt what they are learning to deal with problems that arise in their own teaching.

(s 10)

Som synes finns många paralleller med NCTMs och John Glenn kommissionens analys. Vikten av djupa och relevanta matematikkunskaper betonas, liksom breda pedagogiska kunskaper. Dessutom fokuseras klassrummet, där kunskap om eleverna och praktisk förmåga att genomföra undervisningen och hantera olika situationer lyfts fram. Alla tre dokumenten genomsyras också av ett holistiskt och dynamiskt synsätt: kunnande i matematikundervisning är ett komplext samspel mellan ämnet, eleven och ett pedagogiskt kunnande, dessutom inbegripes en vilja och potential till anpassning, förändring och utveckling av metoder och idéer.

2.9.5. *Vilken kunskap behöver matematikläraren?*

Bakom NCTMs, John Glenn kommissionens och Mathematics Learning Study kommitténs analyser finns en omfattande forskning i *mathematics education* som stöder framställningarna. Så kan tex den uppdelning som görs i matematikkunnande och pedagogiskt kunnande återfinnas hos flera välkända matematikdidaktiker. Av stor betydelse är här Shulman (1987) som identifierar ett minimum av kunskapskategorier:

Content knowledge, dvs matematisk kunskap. Detta inbegriper inte bara matematikämnet i sig utan också de filosofier och paradigm som påverkar matematisk praktik. Cooney och Shealy (1997) fäster dessutom uppmärksamhet på vilken betydelse nya paradigm har för utvecklingen av matematisk kunskap och praktik. Dessa paradigm påverkar inte bara vilken matematik som lärs ut, utan också vår bild av hur människor lär matematik.

Pedagogical content knowledge, dvs kunnande i matematik för undervisning. Shulman avser här det speciella ämneskunnande som är angeläget för ämnets teachability. Effektiv undervisning fordrar förståelse för vilket matematikinnehåll som bäst gör matematikkursen tillgänglig för de lärande. Denna form av kunnande analyseras ytterligare i avsnitt 2.9.6.

General pedagogical knowledge, dvs allmän pedagogisk kunskap om lärande.

Curriculum knowledge, dvs kunnande om kursen i vid mening.

Knowledge of learners, dvs kunskap om de lärande, och deras speciella svårigheter och möjligheter.

Knowledge of educational contexts, dvs kunskap om arbetsplaner, kursplaner, läroplaner och övriga utbildningskontexter.

Knowledge of educational ends, purposes and values, dvs kunskap om skolämnets syfte och övergripande mål och värderingar i kursplaner och läroplaner.

En vidareutveckling av Shulmans analys finns hos Borko & Livingston (1989) som lyfter fram fyra typer av *cognitive skills* en lärare behöver ha:

Pedagogical reasoning: den process som transformerar ämneskunnande till former som är pedagogiskt kraftfulla och också anpassningsbara till många olika typer av elever.

Pedagogical content knowledge: består av föreningen av ämnesinnehåll och pedagogik som ger förståelse för vilket matematikinnehåll som är pedagogiskt effektivt, se Shulmans definition ovan.

Schema: abstrakta kunskapsstrukturer som summerar många enskilda fall och sambandet mellan dem. Här återfinns alltså aktuell teoribildning om undervisning och lärande.

Improvvisational performance: förmågan att improvisera utifrån en generell och inte detaljstyrd plan.

Den sista formen av kunnande är väsentlig då undervisningen bedrivs utifrån ett konstruktivistiskt perspektiv och med utgångspunkt från ett undersökande arbetssätt, där man inte säkert kan förutsäga vad som kan komma att hända i klassrummet.

Cooney (1994) relaterar effektiv undervisning till *förmågan att lösa problem*. Läraren måste dels ha *mathematical power*, dvs förmågan att utnyttja alla slags matematisk kunskap för att lösa problem, dels ha *pedagogical power*, dvs förmåga att utnyttja all slags pedagogisk kunskap för att lösa problem i matematikundervisningen. Han föreslår vidare olika sätt att stärka denna pedagogiska förmåga:

- utveckla kunskap om matematik som möjliggör undervisning från ett konstruktivistiskt perspektiv.
- möjliggöra för lärare att reflektera över sina egna erfarenheter då de lärt matematik.
- erbjuda kontexter som visar på hinder i undervisningen och hur dessa kan identifieras, analyseras och hanteras.
- skapa kontexter där lärare får större erfarenhet i att utvärdera elevers förståelse i matematik.
- erbjuda möjligheter för lärare att översätta sin kunskap i matematik till genomförbara undervisningsstrategier.

Själva kunskapsbegreppet är i sig problematiskt, och någon generell definition finns varken hos filosofer eller didaktiker. Det ligger utanför denna rapports syfte och tidsram att mer i detalj försöka utreda kunskapsbegreppet som sådant. Det man emellertid tydligt kan urskilja både bland teoretiska överväganden och konkreta handlingsplaner är urskiljandet av två huvudtyper av kunskap, nämligen vad gäller matematikinnehåll och pedagogik. Dessutom återkommer hänvisningar till en särskild form av matematikkunnande som är pedagogiskt effektiv i den aktuella undervisningssituationen. Identifikation och hävdande av denna form av ämneskunnande har stor relevans både för framtida grundutbildning och för kompetensutveckling av matematiklärare.

2.9.6. Ämneskunskaper i matematik

Det finns en stor enighet bland matematikdidaktiker gällande behovet av *ämneskunskaper i matematik* för effektiv undervisning i skolmatematik. Då undervisningen byggs på ett undersökande arbetssätt som ska leda till förståelse och förtrogenhet ställs snarare *större krav* på lärarens ämneskunnande än vid en mer traditionell undervisningsstil. Bristen på ett sådant kunnande kan omöjliggöra en förändring av arbetssätt och hindra professionellt växande. Som exempel på argumentation för ämneskunskaper kan tas Irwin och Britt (1999) vilka hävdar, i det att de också citerar Paul Ernest (1991):

We argue that teachers who have a broad and integrated knowledge of mathematics in advance of the mathematics that they teach are also more likely to have a perception of the nature of mathematics as "fallible, changing, and like any other body of knowledge, the product of human invention" (Ernest, 1991, p. xi). We argue further that such teachers are more likely to be able to use teaching approaches that emphasize problem-solving so that students can construct appropriate knowledge...

(s 95)

Bakgrunden är ett utvecklingsprojekt i Nya Zeeland där ett antal lärare fick en tvåårig didaktisk utbildning. Projektet var lyckosamt på så sätt att de flesta lärare fick en ökad säkerhet i klassrummet och att de förändrade sina arbetsmetoder. Några lärare visade dock fortfarande stor osäkerhet och fortsatte med traditionella metoder. Vid en närmare undersökning visade sig att dessa hade bristande ämneskunskaper, speciellt vad gäller *pedagogical content knowledge*. Lärarna kunde inte utveckla ett undersökande och problemlösande arbetssätt på grund av att de själva saknade djupare kunskap om de matematiska områden som skulle behandlas.

En lärare med bristande ämneskunskaper förmedlar också en felaktig bild av matematikämnet och hur man bör förhålla sig till det. En

målande och obarmhärtig beskrivning av en sådan lärare från ett elevperspektiv finns hos King (1992):

But we saw unmistakable signs of his ignorance even as he taught us. Mostly they showed through his fumbling and fearful responses to elementary questions that he could not answer. Why is it really that the product of two negative numbers is positive? How do you know these two bisectors intersect inside the triangle? What is the next number after $1/2$?

His reaction to each exposure of his ignorance was always the same. First came the fumbling stage where he tried to talk the question away by saying whatever popped up into his head....When that failed, as it invariably did, and he saw that it had failed, he became fearful. And when we saw the fright flash in his eyes we knew that this subject – mathematics – terrified our teacher deep down exactly as it terrified us.

(s 17)

Hur ska våra elever kunna undvika matematikångest om läraren själv har matematikångest?

Vad detta ämneskunnande i matematik ska innebära är dock långt ifrån självklart. Så säger tex Wittman (2000) följande angående kurser i matematik för lärarstudenter:

It is a simple matter of fact that around the world mathematical courses or even whole programmes often make only little or no sense for student teachers, for various reasons: either the relevant subject matter is not covered at all, or the mathematical substance is stifled by a formalistic stile of presentation or, even worse, there is no substance: mathematics is reduced to conceptual or procedural skeletons. Nevertheless, it would be wrong to conclude from meaningless courses that mathematical courses proper are of no use for student teachers in principle and that the necessary mathematics should be better integrated into courses in mathematics education. On the contrary, a specific understanding of subject matter is of a paramount importance for teachers...

(s 20)

Wittman hävdar att kurser i ren matematik är av största betydelse, men att de måste organiseras utifrån en specifik undervisningskontext:

To postulate a specific conception of mathematics in the educational context has implications for both contents and methods. Elementary topics which are closely related to the curriculum are far more important for teachers than advanced topics, and above all student teachers must experience mathematics as an activity.

(s 21)

Den undervisningskontext som Wittman förespråkar är så kallade SLEs, *substantial learning environments*. Dessa är fruktbara problemställningar som berör centralt matematiskt innehåll såväl inom skolkursen som bortom kursen. Wittman har påverkats av bl.a. japanska undervisningsmetoder via Jerry Becker. Som tidigare nämnts har även Deborah Schifter och Liping Ma spelat stor roll för diskussionen kring frågan vilket slags matematikkunnande som är väsentligt att ha för undervisning i skolmatematik. En liknande diskussion finns också hos Cheng (1999) som framhäver betydelsen av *pedagogical content knowledge* för att en lärare ska kunna erbjuda *generic examples*, dvs motiverande, representativa och utvecklingsbara uppgifter, i undervisningssituationen.

Även Kilpatrick et al (2001) problematiserar frågan om *vilket* matematikkunnande som är relevant för undervisning i skolmatematik:

The kinds of knowledge that make a difference in teaching practices and in students' learning are an elaborated, integrated knowledge of mathematics, knowledge of how students mathematical understanding develops, and a repertoire of pedagogical practices that take into account the mathematics being taught and how students learn it.... Unfortunately, most university teacher preparation programs offer separate courses in mathematics, psychology, and methods of teaching that are taught in different departments.

...

Teachers may know mathematics, and they may know their students and how they learn. But they also have to know how to use both kinds of knowledge effectively in the context of their work if they are to help their students develop mathematical proficiency.

Similary, many inservice workshops, presentations at professional meetings, publications for teachers, and other opportunities for teacher learning focus almost entirely on activities or methods of teaching and less often attempt to help teachers develop their own conceptual understanding of the underlying mathematical ideas, what students understand about those ideas, or how they learn them.

(kap 10 s 13)

Det är inte svårt att lära sig grundläggande matematik, det är inte heller svårt att lära sig grunderna om lärande. Att integrera dessa kunskaper och förvandla dem till framgångsrik undervisning i klasrummet är dock en svår konst. Följande citat från en kinesisk lärare hämtat från Ma (1999) beskriver detta väl:

One thing is to study whom you are teaching, the other thing is to study the knowledge you are teaching. If you can interweave the to things together nicely, you will succeed...

Believe me, it seems to be simple when I talk about it, but when you really do it, it is very complicated, subtle, and takes a lot of time. It is easy to be an elementary school teacher, but it is difficult to be a good elementary school teacher.

(s 136)

2.9.7. *Kompetenser i det engelska systemet*

Som nämnts tidigare så har det engelska skolsystemet snarast centraliserats det senaste decenniet. En konsekvens av detta har blivit en omfattande detaljreglering vad gäller vad lärare och elever ska kunna. Som exempel kan tas de 26 kompetenser som angivits som grundläggande för den professionelle läraren. Kompetenserna är indelade i fem huvudrubriker:

Subject Knowledge: att förstå ämnesinnehållet, att ha kunskap om och förståelse av National Curriculum och att ha kunskaper utöver själva kursens innehåll.

Subject Application: kunskap om lektionsplanering, kontinuitet och progression i undervisningen, förväntningar på elever, att använda en uppsättning undervisningsstrategier, en klar och stimulerande presentation, stödja språkutveckling och kommunikation, att använda passande resurser inklusive IT.

Class Management: elevgruppering, passande miljö, användande av belöningar och sanktioner, att upprätthålla elevers intresse och motivation.

Assessment and Recording of Pupils' Progress: bedöma utifrån National Curriculum, bedöma i förhållande till åldersrelaterade framsteg, bedöma enskilda elever, använda bedömning i undervisningen, betygsätta arbete och rapportera om framsteg.

Further Professional Development: skolan som institution, lärarens ansvar, professionella relationer, elever som individer, begåvade elever, speciella behov och inlärningssvårigheter, betydelsen av lärarens förväntningar.

Det centraliserade systemet med fokus på ett antal givna lärarkompetenser har kritiserats av vissa engelska didaktiker. Miller och Glover (2000) kommenterar på följande sätt:

It has been argued that too great an emphasis on the definition and achievement of pedagogic competences could lead to simplistic constructs of professional worth; the loss of critical and evaluative approaches to the assessment of professional capabilities; concentration on pass–fail outcomes rather than the process of professional development. It also raised questions about the source of

the information and knowledge of subject and pedagogy required for competence analysis.

(s 2)

Även om många av de fastslagna kompetenserna i sig är eftersträfvansvärda så kan en alltför snäv fokusering på lärarkompetenser hamna i motsättning till en kontextuell helhetssyn och till en dynamisk utveckling av kompetensbegreppet, speciellt i en centraliserad struktur. Intressant är här NCTMs betoning av klassrumsvisionen som ett övergripande mål, medan lärarkompetenser snarast uppfattas som föreslagna underordnade medel att nå målet. NCTMs systemiska ansats lyfter också fram ett antal andra faktorer som påverkar situationen i klassrummet förutom själva lärarkompetensen. Här finns en väsentlig problematik att ta ställning till:

I vilken grad ska ett projekt fokusera på lärarkompetenser och i vilken grad på mer systemiskt relaterade mål?

