

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 Göteborg

Beställning:
Fax: 031 786 22 00
e-post: bestallning@ncm.gu.se
webb: ncm.gu.se/bestallning

ncm.gu.se/forskningsrapporter

ISBN: 978-91-85143-26-9

© 2010 NCM och UFM

Innehåll

Förord	1
Inledning	3
Kvalitetsgranskningens syfte	3
Delrapportens syfte	3
Bakgrund och ramverk	5
Sambandet mellan styrdokumentet och elevernas lärande	5
Aspekter av sambandet som studerats	5
Mål och styrdokument	6
Kompetensmålsreformen	7
Specifisering av kompetensmålen	8
Implementeringssvårigheter	10
Hur lärare kan påverkas av kursplanen	11
Lärandemiljön	14
Frågeställningar	15
Frågeområden	15
Metoder för datainsamling och analys	17
Lektionsobservationer	17
Intervjuer	19
Enkäter	21
Jämförande och sammanfattande analys	22
Analys	23
1a. Vad anser lärarna att lärandemålen är?	23
1b. Hur tolkar lärarna budskapet i kursplanen?	26
1c. Hur har lärarna arbetat för att tolka budskapet i kursplanen?	29
2. De nationella matematikprovns påverkan på lärarnas undervisning	33
3. Undervisningens innehåll och form.	34
Resultat	43
Hur ändamålsenlig är undervisningen?	43
Varför erbjuds eleverna denna undervisning?	45
Diskussion	51
Implikationer	51
Fortsatt forskning och avslutning	54
Referenser	57

Förord

Forskare från Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik (UFM) har sedan 2008 samarbetat i forskningsprojektet "Nationella matematikprov som katalysator för implementering av utbildningsreformer". Målet med projektet är att förstå vilken roll de svenska nationella matematikproven har i skolans försök att implementera styrdokumentens kompetensmål. Införandet av dessa mål kan ses som en omfattande reform som dock har visat sig svår att genomföra.

Eftersom forskningsprojektets frågeställningar till stora delar sammanfaller med inriktningen på Skolinspektionens kvalitetsgranskning av matematikundervisningen i grundskolan har ett nära samarbete utvecklats mellan Skolinspektionen, NCM och UFM. Med utgångspunkt i Skolinspektionens direktiv har forskare vid NCM och UFM genomfört den undersökning som redovisas i föreliggande rapport. De har också ansvarat för teorianknytning, metodutveckling, datainsamling samt analys av insamlad data. Resultat från undersökningen har utgjort ett delunderlag för Skolinspektionens granskning. Insamlad data kommer även att ligga till grund för fördjupad forskning och kommer att kompletteras med befintlig data inom ramen för det pågående forskningsprojektet.

Vi vill tacka alla kollegor vid Skolinspektionen, särskilt Tomas Erlandsson, Monica Gillenius, Alf Johansson och Agneta Wennberg i ledningsgruppen för gott och stimulerande samarbete. Ett varmt tack också till Johan Häggström, NCM som tillsammans med författarna varit ute på skolorna och genomfört intervjuer och klassrumsobservationer. Stort tack till Karin Wallby och Lars Mouwitz vars kritiska läsning av rapporten minskat antalet språkliga och logiska fel. De kvarvarande bristerna är helt och hållet författarnas ansvar. Vi vill tacka Bengt Johansson för goda råd, ständig beredskap och outtröttlig uppmuntran.

Till sist vill vi varmt tacka alla elever, lärare och rektorer vid de besökta skolorna.

Författarna genom

Jesper Boesen, NCM

Ola Helenius, NCM

Johan Lithner, UFM

Göteborg och Umeå den 18 oktober 2010

Inledning

Kvalitetsgranskningens syfte

Skolinspektionen ska på regeringens uppdrag, vid sidan av den regelbundna tillsynsverksamheten, genomföra tematiska kvalitetsgranskningar av skolväsendet samt av förskoleverksamheten och skolbarnsomsorgen. En av de tematiska granskningarna avser undervisningen i matematik. Granskningen inriktas mot undervisningens innehåll och ändamålsenlighet, bla med avseende på planering, genomförande och läromedel. I ett första steg granskas matematikundervisningen i grundskolan. Projektet genomförs i samarbete med forskare från *Nationellt centrum för matematikutbildning* (NCM) och *Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik* (UFM).

Syftet med denna kvalitetsgranskning är att bidra till ökad måluppfyllelse och förbättrade studieresultat i ämnet matematik i grundskolan. I ett mer kort-siktigt perspektiv förväntas granskningen medföra ökat fokus hos huvudmän och skolor på hur undervisningen i matematik planeras och genomförs samt med vilken lärarkompetens detta sker. Övergripande information om kvalitetsgranskningen finns på Skolinspektionens webbplats www.skolinspektionen.se/Kvalitetsgranskning/

De kommuner och skolor som har valts ut för kvalitetsgranskning grundar sig på ett i huvudsak representativt urval av storstäder, förortskommuner, glesbygdskommuner etc och antalet elever i respektive skola. Totalt har tjugo kommunala och tre fristående skolor i tio kommuner granskats. Sammantaget har intervjuer med 66 lärare, enkätresultat från 63 lärare samt observationer från 64 lektioner analyserats.

Resultatet av granskningen redovisas i tre olika typer av rapporter, denna forskarrapport, ett beslut med bedömningar för varje granskad skola samt en sammanvägd övergripande rapport.

Denna delrapports syfte

Den studie som behandlas i denna rapport utgör en del av granskningen och utgår från följande frågeställningar ur Skolinspektionens projektplan:

- Finns det en tydlig mål- och resultatstyrning i undervisningen av ämnet som bygger på lärarens medvetenhet och kunskap om både uppnåendemål och strävansmål?

- Påverkas lärarna och undervisningen av innehållet i de nationella proven?
- I vilken utsträckning är innehållet i skolans läromedel kopplade till läroplanen och kursplanen i matematik och hur används de i lärarens praktik?
- I vilken utsträckning är lärares praktik kopplade till läroplanens och kursplanernas mål och riktlinjer?

I nästa avsnitt kommer dessa frågor att preciseras genom att relateras till de teoretiska och begreppsliga ramverken som används i studien. Sedan beskrivs kortfattat metoder för datainsamling och analys, följt av ett avsnitt med exempel och sammanfattningar av själva analysen. Därefter presenteras studiens resultat och slutligen en diskussion kring resultatens reliabilitet, räckvidd, vikt och implikationer.

Bakgrund och ramverk

Denna studie behandlar hur ändamålsenlig undervisningen är beträffande elevernas möjlighet att utveckla sin matematiska kompetens, samt orsaker till varför eleverna erbjuds just den undervisning de får. I detta avsnitt behandlas relationen mellan styrdokument, undervisning och elevers lärande. Dessutom presenteras de i studien underliggande ramverken som behandlar hur lärandemål kan formuleras, hur styrdokument kan påverka lärare samt karakteriseringar av relaterade nyckelbegrepp. Avsnittet innehåller en kortfattad sammanfattning av de centrala delarna i studiens olika ramverk.

Sambandet mellan styrdokumentet och elevernas lärande

Vi vet att elever vanligtvis bara uppnår en del av de kunskapsmål som finns i styrdokumentet. Vi vet även att det finns många orsaker och att de kan uppstå i flera led i kedjan av processer från styrdokumentets mål till elevernas lärande. Det finns i litteraturen flera sätt att strukturera denna kedja, ett exempel är distinktionen mellan 1) den avsedda kursplanen, 2) den i klassrummet implementerade kursplanen och 3) den av eleverna uppnådda (lärd) kursplanen (Robitaille & Garden, 1989).

Denna kedja kan även delas in i mindre delar på flera olika sätt, och det kan finnas många olika slags mer eller mindre komplexa diskrepanser mellan dessa delar. Det är inte säkert att det som står i kursplanen faktiskt är det som var avsett. En annan möjlighet är att kursplanen kan tolkas på olika sätt, även sådana som inte var avsedda. Det kan också vara skillnad mellan den tolkning som läraren gör, och den undervisning som läraren arrangerar. Detta kan i sin tur ha flera orsaker, tex kan läraren sakna adekvata yttre förutsättningar (tid, lokaler, material, etc) eller relevant kompetens. Dessa kortfattade exempel indikerar att kedjan 1-2-3 är komplex. I det följande klargör vi vilka aspekter som fokuseras och vilka som inte fokuseras i denna studie.

Aspekter av sambandet som studeras

Denna studie fokuserar lärarnas uppfattningar och kunskaper om kursplanen, speciellt de moment i kursplanen som behandlar kompetenser eller förmågor. Vi fokuserar således kursplanens kompetensmål (se nedan för en förklaring av detta begrepp), hur dessa mål framträder via aktiviteter i undervisningen samt relationen mellan lärarnas uppfattning om denna typ av mål och deras undervisning.

Hur väl en kursplans mål uppfylls bör värderas i termer av elevernas faktiska utveckling med avseende på kunskaper (och i förekommande fall även värdegrund). I denna studie kommer dock vägen till måluppfyllelsen att studeras genom klassrumsaktiviteter, av två skäl:

- Kursplanen påverkar inte eleverna direkt utan framför allt via de aktiviteter inklusive deras innehåll som organiseras i lärandemiljön. Eftersom matematiklärande är oerhört komplext (Niss, 1999) är det dock mycket svårt att avgöra vilken aktivitet som leder till ett visst lärande, och att försöka skulle förskjuta fokus från sambandet mellan lärarnas medvetenhet/kunskap och undervisningen till den komplicerade frågan om hur lärande sker.
- Det är möjligt att på goda grunder uttala sig om vad elever kan komma att lära sig via att studera vad de ges möjlighet att lära sig (Hiebert, 2003).

Mål och styrdokument

De styrdokument som antogs i början av nittio-talet innebar en helt ny typ av läroplaner (Lundgren, 1999). ”De mål som läroplaner och kursplaner anger uttrycks mindre i stoff och mer i termer av begrepp, sammanhang och i kunskap som instrument för lärande.” (s 39) Vad gäller matematikutbildningen sammanfaller denna förändring med en internationell trend när det gäller att beskriva kunskaper i matematik och förändringen kan ses som en av de större reformer som initierats. Den tar sin utgångspunkt i att det är otillräckligt att formulera målen med matematikutbildningen enbart som *innehållsmål*, vilket man tidigare gjort på både övergripande nivå (tex aritmetik, algebra, geometri, statistik) och detaljerad nivå (tex multiplikationstabeller, ekvationslösning, areaberäkning, medelvärde). Det är nödvändigt att även formulera mål som berör den process det innebär att utöva matematik och de förmågor som behövs i denna process, dvs vilka kompetenser som behövs för att framgångsrikt kunna använda matematik (tex problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga). Denna typ av lärandemål benämns ofta just processmål, förmågemål eller kompetensmål. I denna text använder vi företrädesvis termen *kompetensmål* och benämningen *kompetensmålsreformen* används för den förändring i hur matematikundervisningens mål formuleras som beskrivits ovan. Även om delar av dessa senare mål varit möjliga att tolka in i tidigare styrdokument, har de fått betydligt mer framträdande roller i kursplanerna från 90-talet (Wyndhamn, Riesbeck & Schoultz, 2000).

Ett reformbudskap kan påverka utbildningssystemet genom tre huvudsakliga kanaler: *styrdokument, prov och ansvarsskyldighet* samt *lärarutbildning* (Weiss,

Knapp, Hollweg & Burril, 2001). De har möjlighet att påverka lärares och läroboksförfattares föreställningar och de aktiviteter som dessa genomför. Denna studie fokuserar i första hand hur kursplanen och i andra hand de nationella proven kan fungera som bärare av kompetensmålsreformen. För att ytterligare kunna precisera denna fråga beskrivs nedan först kompetensmålsreformen och sedan det specifika kompetensmålsramverk som används i denna studie.

Kompetensmålsreformen

Kompetensmålsreformen sammanfattar väl vad den samlade internationella matematikdidaktiska forskningen - och många andra utvecklingsaktörer - anser vara de mest angelägna inslagen i att förändra skolmatematiken. Detta eftersom kompetensmålen beskriver och fångar de mest betydelsefulla lärandemålen. Den internationellt sett mest inflytelserika och mest genomarbetade beskrivningen ges av NCTM Principles and standards (NCTM, 2000) i det som kallas processmål (problemlösning, resonemang, kommunikation, samband, representation). De ställningstaganden som görs i detta ramverk, och dess föregångare, är forskningsbaserade och har varit utgångspunkt för en stor mängd empiriska studier av både traditionella och alternativa undervisnings- och lärandesituationer (Kilpatrick, Martin, Schifter & National Council of Teachers of Mathematics, 2003). Samma typ av målbeskrivning finns också i det danska KOM-projektet (Niss & Jensen, 2002), i "Adding it up" (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) och används även i de stora internationella jämförelserna TIMSS och PISA (Mullis m fl, 2003; OECD, 1999). Många av de grundläggande principerna i den svenska kursplanen i matematik från 1994 (Skolverket, 2000) har sitt ursprung i arbetsseminarier där tongivande personer från arbetet med NCTM Principles and standards deltog (Emanuelsson, Johansson & Lingefjärd, 1992) samt i erfarenheter från andra internationella seminarier under åren 1987 - 1994 om bl a de då helt nya engelska kursplanerna och om problemlösning (se t ex Nämnaren 100, s 24-25).

De grundläggande idéerna i kompetensmålsreformen finns representerade i gällande kursplaner, men de är inte strukturerade och explicitgjorda i samma grad som i de ramverk vi nämner ovan. Att principen bakom kompetensmålen ändå är tillämpningsbar även för svenska styrdokument visas av Palm, Eriksson, Bergqvist, Hellström & Haggström (2004), som utifrån på denna princip identifierar problemlösnings-, algoritm-, begrepps-, modellerings-, resonemangs- och kommunikationskompetenser som mål i kursplanerna och exemplifierar dessa med uppgifter från de nationella proven.

I denna rapport formulerar vi två fundamentala principer som karakteriserar kompetensmål.

Principen om kompetenser som en dimension av kunnande. Kompetenserna representerar en karakterisering av vad utövande av matematik innebär (Niss, 2004) och en dimension av matematikkunnande som till stor del är oberoende av vilket matematiskt innehåll kompetenserna tillämpas på.

Principen om kompetenser som målstyrning. Att utveckla matematisk kompetens är ett av målen för elevernas lärande och ska därför också påverka undervisningen.

Den första principen förklarar att ett givet kompetensramverk är *ett särskilt val* av beskrivningar av matematiskt arbete. Detta förklarar att olika ramverk kan ha olika beskrivningar av sina kompetenser. Men principen säger också att kompetenserna sammantaget ska beskriva matematiskt arbete som helhet. Slutligen innebär den första principen att varje matematisk kompetens kan tillämpas på olika typer av matematiskt innehåll, både när det gäller nivå och när det gäller matematiskt område. Att kommunicera matematik kan göras av ett barn som tar de första stegen i sin antalsuppfattning liksom av en forskande matematiker som på ett föredrag beskriver beviset för en ny sats inom den algebraiska geometrin.

Den andra principen säger att kompetenserna inte bara är en karakterisering av matematiskt arbete och en beskrivning av en viss typ av matematiskt kunnande utan att just denna typ av kunnande också formuleras som explicita lärandemål och därmed ska påverka undervisningens inriktning (Niss & Jensen, 2002).

Specificering av kompetensmålen

Det vore önskvärt att kunna specificera och strukturera analysen och karakteriseringen av empiriska data (lärarintervjuer, enkätsvar och lektionsobservationer) utgående från målbeskrivningarna i den svenska kursplanen. I den här studien gör vi inte det av följande skäl:

- De svenska kursplanerna är mycket kortfattat skrivna och innehåller huvudsakligen inga explicita och tydliga specificeringar eller tolkningar av vad kompetensmålen (eller andra motsvarande lärandemål) egentligen består av.
- De svenska kursplanerna saknar den för denna studie relevanta strukturen (som de ovan nämnda internationella ramverken har), dvs:
 - 1) det finns ingen tydlig skillnad mellan innehållsmål och kompetensmål.
 - 2) kompetensmålen är inte tydligt strukturerade under ett fåtal huvudmål.

Ytterligare ett argument att frånga gällande målbeskrivningar som utgångspunkt för analysen är att en analys som utgår från de svenska kursplanernas innehåll och struktur blir svår att jämföra med resultat från internationell forskning.

Inte heller de internationella målramverken ovan fungerar direkt eftersom de inte är framtagna för att analysera empiriska data, utan främst för att kommunicera lärandemål samt argumentera för dessa. Det medför att målen i dessa ramverk ofta är överlappande (Niss & Jensen, 2002), medan det för en analys är önskvärt med kategorier som är så åtskilda som möjligt. Dessutom saknas oftast den precision i måldefinitionerna som är önskvärd i analyser av data.

Med detta som bakgrund konstrueras ett ramverk speciellt för denna studie, som

1. utgår från en tydlig skillnad mellan innehållsmål och kompetensmål,
2. är strukturerat i ett fåtal (sex) huvudmål (kompetensmål),
3. är inspirerat av de internationella kompetensmålsramverken, i meningen att det baseras på en syntes och modifiering av målen i dessa ramverk,
4. så långt det är möjligt har kompetensmål som är tydligt specificerade och så lite överlappande som möjligt,
5. kan användas för analys av svenska kursplaner, nationella prov, läromedel och undervisning.

Matematisk kompetens kan generellt ses som förmågan att förstå och använda matematik i olika situationer: "*Mathematical competence* then means the ability to understand, judge, do, and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role." (Niss, 2003) De sex mer specifika kompetensdefinitionerna som används i denna studie (kortfattat sammanfattade nedan) är inspirerade av de internationella ramverken. Några delar är identiska, några är modifierade versioner och några har andra ursprung. I linje med (Niss, 2003) så kan alla kompetenser nedan beaktas ur aspekterna att I) tolka, II) använda och III) värdera.

- Med *Problemlösningskompetens* menas att kunna lösa uppgifter där uppgiftslösaren inte har någon färdig lösningsmetod tillgänglig innan uppgiftslösningen börjar (NCTM, 2000; Niss & Jensen, 2002; Schoenfeld, 1985). Att tex beräkna hur många procent 60 kr är av 130 kr är inget problem för den som redan känner till metoden att dela 60 med 130 och multiplicera med 100.
- *Resonemangskompetensen* är förmågan att kunna motivera val och slutsatser genom att argumentera på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder, och inkluderar även undersökande verksamheter som att hitta mönster, formulera, förbättra och undersöka hypoteser (NCTM, 2000; Niss, 2003; Niss & Jensen, 2002; Pólya, 1954).

- *Procedurhanteringskompetens* innebär att kunna identifiera vilken procedur (normalt i form av en algoritm) som lämpar sig för en viss uppgiftstyp samt att kunna genomföra proceduren (Kilpatrick, Swafford, Findell & Mathematics learning study committee center for education division of behavioral and social sciences and education, 2001; Mullis mfl, 2003; Vinner, 1997).
- *Representationskompetens* innebär förmåga att ersätta en matematisk företeelse med en annan. Exempelvis att representera en abstrakt företeelse (tex begreppet sfär) med ett konkret materiellt (tex en boll) eller mentalt objekt (tex tanken att alla punkter på ytan befinner sig på samma avstånd från centrum). Eller att representera en konkret företeelse (tex 12 äpplen) med ett tal (NCTM, 2000; Niss & Jensen, 2002).
- *Sambandskompetens* är förmåga att länka samman matematiska företeelser (inklusive representationer av dem). Tex att se att multiplikation med heltal kan ses som upprepad addition (NCTM, 2000).
- Med *Kommunikationskompetens* avses förmågan att kunna kommunicera, att utbyta information, om matematiska idéer och tankegångar bland annat i muntlig och i skriftlig form (NCTM, 2000; Niss & Jensen, 2002).

Det kan vid en första anblick vara svårare att se att representations- och sambandskompetenserna är centrala, än att de andra fyra är det. Man skulle kunna argumentera för att en "förståelsekompetens" vore mer närliggande. Att förstå matematik brukar ofta, i kursplaner och i andra sammanhang, ses som den kanske mest centrala kompetensen. Trots att ordet "förstå" ofta används i diskussioner om matematikutbildningens mål så verkar ingen hittills ha lyckats framföra en specifik och användbar definition av termen "förstå". Sierpiska, (1994) visar att termen är svårhanterlig. De definitioner av "förstå" som både är någorlunda enkla och samtidigt specifika relaterar på ett eller annat sätt till förmågan att se samband, och ibland till representationer. Detta är i denna studie (och troligen i de internationella ramverken) orsaken till att de mindre svårhanterliga begreppen representation och samband används istället för förstå.

Implementeringssvårigheter

Trots att kompetensmålsreformen pågått under flera år verkar konsekvenserna för lärandemiljön vara begränsade, både nationellt (Lithner, 2000, 2004; Palm, Boesen & Lithner, 2006) och i stor utsträckning internationellt (Hiebert, 2003).

Det är rimligt att Skolinspektionen i sina granskningar beaktar flera typer av mål, men kompetensmålen är för närvarande av särskild vikt av tre skäl:

1. Införandet av denna typ av mål, som ett komplement till innehållsmålen (aritmetik, algebra, statistik, etc), kan ses som ett av de viktigaste verktygen för att stödja och styra utvecklingen av matematikutbildningen och motverka lärandesvårigheter av olika slag. Denna förändring är grundad i de ramverk som på olika sätt beskriver och argumenterar för denna typ av reform (Kilpatrick, Swafford, Findell m fl, 2001; NCTM, 2000; Niss & Jensen, 2002), och i den forskning som till stor del underbygger dessa ramverk.
2. Det verkar som om kompetensmål är betydligt svårare att beskriva och tolka än motsvarande innehållsmål, och dessutom mindre väl förankrad i undervisningstraditionen. Detta kan vara två av skälen till att implementeringen inte fungerar särskilt väl ur flera centrala aspekter. Lite förenklat kan man säga att om det i kursplanen står "algebra" (ett innehållsmål) då verkar det med 100 procent säkerhet bli algebra i klassrummet, men om det står "problemlösning", "resonemang" eller "kommunikation" (kompetensmål) så verkar det betydligt oklarare vad konsekvenserna för undervisningen blir.
3. Kompetensmålen exemplifierar viktiga aspekter av kursplanen i matematik som helhet. Många av strävansmålen innehåller kompetensmål och har just den karaktär av innehållsoberoende som kompetensmålen har.

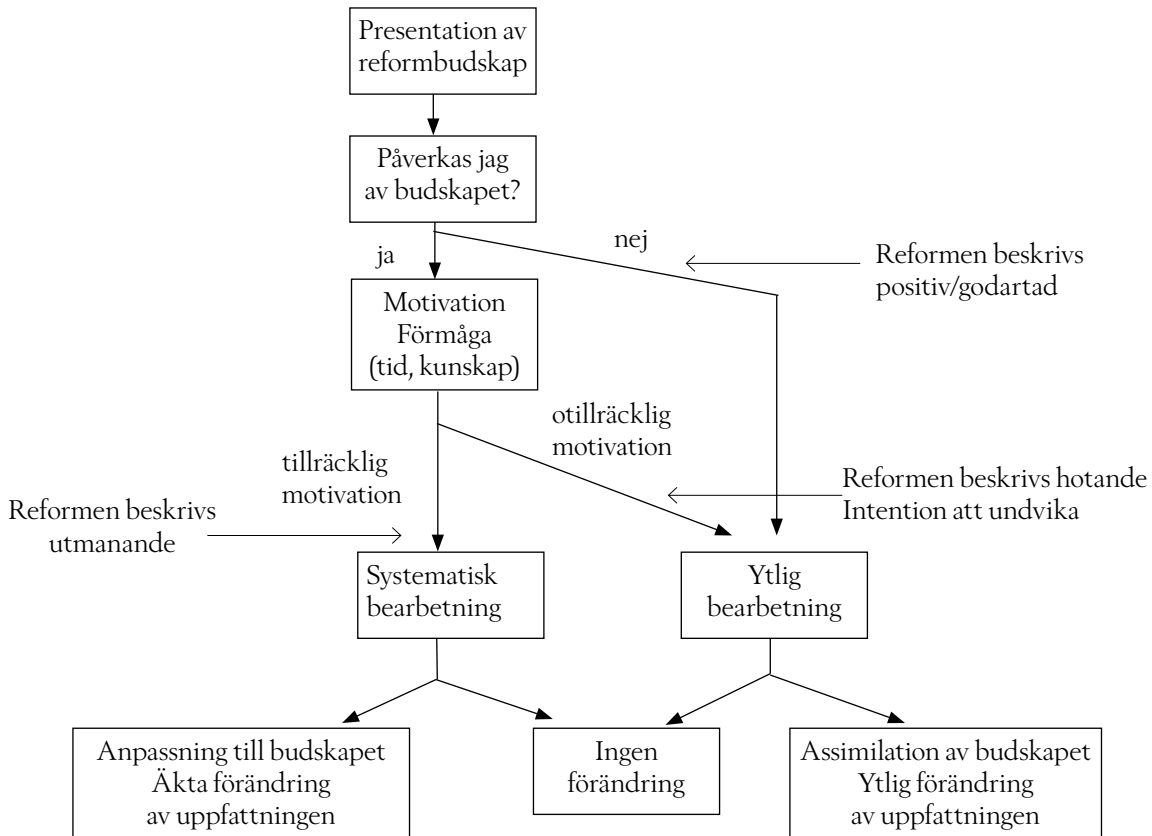
Påståendena under 2 ovan är medvetet uttryckta som att det "verkar" vara så, eftersom det finns starka indikationer men problematiken är långt ifrån utredd. Om det stämmer (vilket till stor del stärks av denna studies analyser av klassrumsaktiviteter) så uppstår följdfrågan: Varför är inte undervisningen i linje med kursplanen? Även om denna fråga inrymmer flera olika underfrågor, är frågan om och på vilket sätt lärare påverkas av kursplanen mycket central.

Hur lärare kan påverkas av kursplanen

Lärares medvetenhet om målen baseras bl a på lärarnas möjligheter att tolka målen (är målen tillräckligt tydligt formulerade?), lärarnas förmåga att tolka målen (har de getts rimlig kompetensutveckling?) och lärarnas incitament att tolka målen (är målen stödjande och styrande på ett sätt som gör att de är och upplevs vara relevanta?). Om dessa frågor vet vi lite och en studie av dem är värdefull för att bättre förstå och utveckla relationerna mellan mål och verksamhet.

Frågan om hur lärare påverkas av kursplanen är så komplex att den i denna studie struktureras via ett teoretiskt ramverk, en kognitiv-affektiv modell för förändring av uppfattning (Gregoire, 2003). Det är väl belagt att lärares föreställningar om matematik, undervisning och lärande påverkar implementering av reformer. Gregoires teori är en explicit modell för begreppsmässig förändring vid framförande och implementering av reformorienterade budskap (tex NCTM Standards). Modellen specificerar faktorer som påverkar möjligheterna för förändringar i lärares föreställningar (tex känslor som att budskapet är hotande för upplevelsen av sig själv som kompetent lärare och kontextuella faktorer som lärares resurser) och beskriver dessa faktors roll för förändringen av föreställningar. Via modellen (se figur 1) länkas följande fyra aspekter av påverkansprocessen samman:

- a. Lärares *tolkning* av innebörden i kompetensmålen undersöks. Denna jämförs även med hur kompetensmålen framträder i andra källor, i första hand de nationella matematikproven men även med till exempel läromedel, och hur lärare tolkar målbeskrivningarna. Det är naturligtvis avgörande hur lärarna egentligen uppfattar målen. Ett exempel är tolkning av termen ”problemlösning”, som är central i matematikkursplanen. Vissa tolkar ”problem” som en matematikuppgift där man inte på förhand vet vilken lösningsmetod som ska användas. Andra tolkar ”problem” som vilken matematikuppgift som helst. De två olika tolkningarna leder till radikalt olika undervisningsmål med avseende på problemlösning. Förmodligen avser kursplaneförfattarna den förra tolkningen, som är mer i linje med den matematikdidaktiska forskningslitteraturen, men det går inte att avgöra eftersom kursplanen inte förklarar termen.
- b. Lärares *värdering* av kompetensmålen. Denna värdering är viktig eftersom ett specifikt mål kan uppfattas tydligt av en lärare men inte ses som angeläget eller genomförbart, vilket skulle kunna leda till att läraren inte försöker implementera det (Bergqvist, 2006; Boesen, 2006).
- c. Utgående från de mål som lärare uppfattar och anser prioriterade, undersöks vilka *intentioner* de har vad gäller att förverkliga dessa mål och hur detta är tänkt att ske. Eftersom transpositionen från mål till undervisning ofta är svår, kan det hända att läraren har en tolkning och värdering av ett lärandemål, men en intention vad gäller konkretisering som passar mindre bra för att hjälpa eleven nå målet.
- d. Ovanstående aspekter kopplas till analyser av hur läraren *bearbetat* sin tolkning av kursplanen. En av poängerna i Gregoires teori är lite förenklat att även om läraren har en positiv inställning till ett komplext budskap, så krävs



Figur 1: En förenklad version av Gregoires kognitiva-affektiva modell för förändring av uppfattning (s 165, Gregoire, 2003).

normalt en djup och systematisk bearbetning av budskapet för att läraren faktiskt ska låta budskapet påverka sin uppfattning och därmed sin praktik. Det räcker inte heller att läraren via en ytlig tolkning tycker att målet verkar bra och att den egna undervisningspraktiken redan är i linje med målet, det leder till slutsatsen att inget behöver ändras. Ett kursplanebudskap som är komplext att tolka och/eller svårt att implementera har större sannolikhet att få avsedd effekt om läraren upplever budskapet som utmanande, och kanske även stressande. Bilden ovan är en förenklad illustration av Gregoires modell.

Noderna i figuren (där en pil delas upp i två) representerar tidpunkter där lärarens nuvarande värdering av budskapet vägs mot faktorer som har med den egna personen och situationen att göra varefter ett val görs. Om vi går nerifrån till vänster och uppåt i diagrammet ser vi att för att en äkta förändring av lärarens uppfattning till slut ska ske, måste budskapet bearbetas systematiskt. Eftersom detta är en arbetsam process måste läraren vara tillräckligt motiverad. Denna motivation påverkas av lärarens bedömning av chansen att lyckas, tex av om det finns tillräcklig tid och kunskap tillgänglig. För att från början ta beslutet att bearbetning kommer att krävas måste läraren inse att budskapet faktisk kräver en förändring av uppfattningen. Som vi beskriver ovan kan ett uttalande om att reformen är bra, positiv, i linje med lärarens arbete etc alltså leda till och vara tecken på att läraren undviker systematisk bearbetning och bara på ytan förändrar sin uppfattning. Det skulle tex kunna innebära att läraren kallar klassrumms aktiviteter där eleverna jobbar med uppgifter för problemlösning, även om de förutsättningar som eleverna ges gör att de kreativa tankegångar som är centrala i definitionen av problemlösningskompetensen inte behöver användas. Läraren kan då ha assimilerat budskapets språkliga uttryck utan att ha påverkats av innebörden.

En anledning till att Gregoires modell används i denna studie är att den illustrerar hur *olika* faktorer kan leda till att lärare anpassar eller inte anpassar sin undervisning till det budskap som kompetensmålsreformen innebär. Att utvärdera vilka vägar lärare kan ha gått i Gregoires modell kan därför ge värdefulla indikationer på möjliga åtgärder för att förbättra implementeringen av en kursplan dels när det gäller kursplanens utformning och presentation dels gällande lärares kompetensutveckling och möjligheter att bearbeta kursplanens budskap.

Lärandemiljön

Med lärandemiljön menas i denna studie den del som skolan organiserar (inte tex extraläsning hemma) och dess fyra huvudkomponenter är i denna studie lärarens undervisning, läromedel, elevers arbete och prov/bedömning. Denna studie behandlar valda delar av alla dessa fyra komponenter. Dessa studeras primärt med avseende på vilka aktiviteter eleverna engagerar sig i, eftersom det är genom dessa aktiviteter eleverna har möjlighet att lära, och då med ett särskilt fokus på aktiviteter som relaterar till kompetensmål. Se vidare specificeringar under avsnittet om datainsamling.

Frågeställningar

Med terminologin i ramverket som presenterats ovan formuleras denna undersöknings frågeställningar:

- Hur ändamålsenlig är undervisningen vad gäller elevernas möjligheter att utveckla de sex matematiska kompetenserna, dvs vilka kompetensrelaterade aktiviteter arbetar eleverna med? Detta behandlas i huvudsak under frågeområde 3 nedan.
- Varför erbjuds eleverna denna undervisning? Vi försöker förklara starka och svaga sidor hos undervisningen och fokuserar i huvudsak vilka lärarnas mål är, speciellt om de är kompetensrelaterade samt hur lärarna och undervisningen påverkas av kursplanen (frågeområde 1) och till viss del de nationella matematikproven (frågeområde 2).

Frågeområden

Frågeområdena nedan är ytterligare preciseringar av studiens frågeställningar (dessa har ytterligare utvecklats i ett par hundra frågor som behandlats i intervju, enkät och observationer).

1a. Vad anser lärarna att lärandemålen är?

Detta frågeområde behandlar både hur lärarna karakteriserar sina mål med undervisningen och hur de värderar dem, utgående från följande underfrågor:

- Vad anser lärarna spontant att målen med undervisningen är?
- Vilken insikt/kunskap visar lärarna om kompetensrelaterade mål?
- Hur värderar lärarna mål av den typ som de sex kompetensmålen representerar?

1b. Hur tolkar och värderar lärarna budskapet i kursplanen?

Detta frågeområde undersöker lärarnas tolkning av kursplanen, och ger underlag för att jämföra om och på vilka sätt denna är i linje med 1A.

- Hur tolkar lärarna centrala delar (framförallt kompetensmålen) av kursplanen? Hur väl insatta är lärarna i kursplanen och hur väl förstår lärarna kursplanen?
- Anser lärarna att kursplanen påverkar deras undervisning?

1c. Hur har lärarna arbetat för att tolka budskapet i kursplanen?

Frågeområdet beaktar hur lärarna upplever behov av och genomför en djupare bearbetning för att tolka budskapet i kursplanen, vilket, enligt ramverket ovan, kan vara en avgörande faktor för genomslaget hos ett komplext budskap.

- I vilken utsträckning och på vilket sätt används kursplanens olika delar?
- Anser lärarna att kursplanen är svår att tolka och förstå?
- Hur starkt anser lärarna att andra faktorer än kursplanen påverkar de mål som explicit eller implicit sätts för undervisningen?
- Hur har lärarna bearbetat budskapet i kursplanen?

2. De nationella matematikprovens påverkan på lärarnas undervisning

Frågeområdet undersöker de intryck lärarna får av de nationella proven och om dessa påverkar deras undervisning. Frågeområdet behandlar alltså inte provens roll som underlag för betygsättning utan om de påverkar lärarnas mål.

- Vilka kunskaper och kompetenser anser lärarna att de nationella proven testar? I vilken utsträckning och på vilka sätt uttrycker lärarna att nationella proven testar kompetenser?
- Anser lärarna att de nationella proven påverkar deras undervisning?

3. Undervisningens innehåll och form

Dessa frågor behandlar den faktiska undervisningen, i huvudsak utgående från lektionsobservationer och analyser av de undervisningsmaterial som använts under lektionerna.

- Hur och på vilka grunder sker urvalet av läromedel?
- Hur arbetar lärarna för att hjälpa eleverna att nå lärarnas undervisningsmål?
- Anser lärarna att kompetensmålen återspeglas i undervisningen? Anser lärarna att det är svårt att arbeta med kompetensmålen i undervisningen?
- Anser lärarna att eleverna når lärarnas mål? Anser lärarna att eleverna når kompetensmålen?
- Anser lärarna att de skulle ha andra mål om de hade andra förutsättningar?
- På vilka sätt återspeglas kompetensmålen i läromedel och undervisningens övriga komponenter/aktiviteter?

Metoder för datainsamling och analys

Tre typer av data har samlats in för denna delstudie: observationer av lektioner (inklusive analyser av undervisningsmaterial), intervjuer med lärare och lärarenkäter. Metoder för datainsamling och analys summeras kortfattat nedan.

Lektionsobservationer

Lektioner har observerats hos 64 av de 68 lärare som djupintervjuats (se nedan). Bortfallet på 4 lektioner orsakades av olika tekniska och praktiska problem. De data som relaterar till lektionsobservationerna och som analyserats i denna studie är alla aktiviteter som lärarna leder i helklass eller storgrupp (tex presentationer eller dialoger) samt de matematikuppgifter som eleverna arbetar med under lektionen. Lektionerna var normalt 40–60 minuter men endast de delar som har anknytning till matematikundervisning analyserades (och endast dessa delar behandlas i analysen och i texten nedan). I några få fall förekom ytterligare bortfall när eleverna arbetade med många olika saker samtidigt och det inte var möjligt att få in data för alla delaktiviteter. Totalt från alla lektioner sammantaget analyserades 2 698 minuter vilket motsvarar cirka 42 minuter per lektion i genomsnitt.

Syftet var att samla in och analysera data som klargör på vilka sätt lärandemiljön tillhandahåller eller saknar aktiviteter som ger eleverna möjligheter att utveckla kompetenser enligt ovan. "Aktiviteter" kan beskrivas på många olika sätt. NCTM (2000) visar ett för denna studie lämpligt sätt eftersom dess *processer* både kan ses som *kompetenser* som eleverna ska förvärva och som *aktiviteter* som lärandemiljön ska innehålla för att eleverna ska få tillfälle att utveckla motsvarande kompetenser. Denna del av studien analyserar vilka *kompetensaktiviteter* som förekommer i lärandemiljön:

- *Lärares undervisning*. Här observeras hur läraren leder undervisningen, vilket oftast sker via presentationer vid tavlan och via lärarens dialog i helklass eller storgrupp. Lärares dialog med enskilda elever eller små grupper analyseras inte systematiskt i denna delstudie, eftersom det kräver en typ av datainsamling (individuell ljud- eller videoinspelning) som inte var möjlig vid inspektionsbesöken.
- *Läromedel*. Svensk matematikundervisning är starkt påverkad av läroböckerna (Mullis mfl, 2005; Skolverket, 2003), och svenska elever arbetar ofta

50-100 procent av sin studietid med lärobokens uppgifter. Läroböckerna analyseras med avseende på texten (inklusive exempel på uppgiftslösningar) och övningsuppgifterna. Vad gäller de matematikuppgifter som eleverna arbetar med vidareutvecklas existerande analysverktyg för de problemlösnings-, resonemangs- och procedurhanteringsprocesser som krävs av eleverna för att lösa uppgifterna (Lithner, 2004; J. Lithner, 2008), till att även beakta vad som krävs av eleverna med avseende på de övriga tre kompetenserna. Elevers arbete med matematikuppgifter individuellt eller i smågrupp analyseras inte i denna studie eftersom det kräver individuell videoinspelning.

Kompetensaktiviteter i relation till följande olika arbetsformer analyseras:

- A. Läraren presenterar någon slags matematikrelaterad information som inte är direkt relaterad till de arbetsuppgifter som eleverna har under lektionen, t ex bedömningsanvisningarna inför ett kommande nationellt matematikprov.
- B. Läraren presenterar information som är tänkt att användas senare under lektionen när eleverna arbetar individuellt eller i små grupper med matematikuppgifter, exempelvis hur man kan lösa en linjär ekvation.
- C. Läraren leder en situation där elever och lärare tillsammans i helklass eller storgrupp löser matematikuppgifter. Denna aktivitet analyseras på olika sätt beroende på om det är läraren (benämns C-) eller eleverna (benämns C+) som gör huvuddelen av lösningsarbetet.
- D. Eleverna arbetar med matematikuppgifter individuellt eller i smågrupper.

Kortfattat och förenklat beskrivet analyserades varje lektionsmoment enligt en i förväg skriftligt specificerad procedur. Analysen består av en kvantitativ del där varje lektionsmoment delas in i situationer. Exempel på situationer kan vara en lärargenomgång med ett visst fokus eller ett antal matematikuppgifter som eleverna arbetar med. För varje situation definieras arbetsformen (A-D), varefter närvaro respektive frånvaro av tre olika kompetensrelaterade aktiviteter – tolka (I), använda (II) och värdera (III) – markeras för var och en av de sex kompetenserna. Eftersom de situationer som en lektion delades in i var av olika längd fick varje situation en viktning som motsvarade den tid som situationen tog. Sammanlagt motsvarar summan av alla situationers viktningar hela lektionens längd. Detta kompletteras med en kvalitativ del som för varje lektion (och för varje ingående arbetsform A-D) sammanfattar nyckelkaraktistika för lektionsmomentet. Analysen hanterades i Excel-filer och en indikation om

omfattningen av datahanteringen ges av att sammanställningen av de hanterade analysenheterna från alla observerade lektioner utgjorde ett Excel-blad på 40x234 celler, varav cirka 20 procent innehöll kvalitativ information i form av text.

Intervjuer

Varje intervju tog cirka 90 minuter och genomfördes som en strukturerad intervju med 44 frågor (plus ett femtiotal underfrågor). Dessa utgick från frågeområdena 1–3 ovan. Intervjun bestod av tre delar. Den första delen behandlade lärarnas mål och påverkanskällor, utan att intervjun styrts in på frågan om kompetensmål. I den andra delen fick lärarna tolka 6 utdrag ur kursplanen samt bedöma vad eleverna behövde kunna för att lösa fyra uppgifter från ett nationellt matematikprov årskurs 5. Både kursplaneutdragen och matematikuppgifterna hade tidigare (av oss) bedömts vara några av de som tydligast framförde respektive testade de sex kompetenserna (men dessa nämndes dock inte i del ett eller två av intervjun). I del tre presenterades definitioner av de sex kompetenserna tillsammans med exempel från samma kursplaneutdrag och provuppgifter som använts i del två, kompletterade med våra motiveringar varför de framförde respektive testade kompetenser. Därefter tillfrågades lärarna om deras syn på dessa målbeskrivningar. Strukturen byggde alltså på att först se vilka mål som lärarna spontant framhöll, därefter be dem tolka kursplanecitat och uppgifter som behandlade kompetenser och först i del tre leda in intervjun specifikt mot de sex kompetenserna.

Kortfattat och förenklat beskrivet analyserades varje intervju enligt en i förväg skriftligt specificerad procedur, där första steget var en transkribering av de för intervjufrågorna informationsbärande avsnitten. Därefter klassificerades svaret på varje fråga bl a med avseende på om den innehöll kompetensindikatorer, dvs information relaterat till något av de sex kompetensmålen (analysen och motiven till detta beskrivs nedan). Utöver detta analyserades data som gav information om variablerna *Lärarnas spontana mål*, *Måltolkning*, *Målvärdering* och *Målbearbetning* som relaterar till olika faktorer i det ramverk för hur lärare kan reagera på reformbudskap som hämtats från Gregoire (2003), se ovan. Analysen hanterades i Excel-filer. Sammanställningen av de hanterade analysenheterna för var och en av de 66 lärarna utgjorde sju Excel-blad på sammanlagt 20x300 celler, varav cirka 100 innehöll kvalitativ information i form av text. Därefter gjordes övergripande analyser med utgångspunkt från ett raster av underfrågor som härletts från de ursprungliga frågeställningarna. Till detta hämtades data från de tidigare analyserade och sammanställda variablerna ovan, men också direkt från relevanta kluster av frågor i de transkriberade intervjudata.

Bedömning av lärarnas kompetensmålskunskap

Eftersom kompetensmålsreformen är komplex och kunskap om den är svårbedömd presenteras hur analyserna görs samt motiven för analysmetoderna. Intervjun är som tidigare beskrivits strukturerad så att den efterhand blir allt mer fokuserad på kompetensmålen. Analysen av lärarnas kompetensmålskunskap tar dock sin utgångspunkt i intervjun som helhet snarare än i svaret på enskilda frågor. Ett system med *kompetensindikationer* används för att notera varje läraruttalande som skulle kunna indikera att läraren syftar på något som relaterar till kompetensmålen. Grundprincip bakom kompetensindikationerna var att inte enbart fokusera på om läraren vid intervjun använde en speciell terminologi, till exempel orden problemlösning, resonemang eller kommunikation, utan att fånga själva innebörden i kompetensmålen. Eftersom kompetensramverket innebär ett val av ord och terminologi bland många möjliga så värderades exempelvis inte ett läraruttalande om problemlösning högre än motsvarande uttalande via synonymer. Båda formerna bokfördes som kompetensindikationer, se tabell 1 nedan för exempel på olika former.

Direkta explicita kopplingar:	Direkta synonyma kopplingar:
problem, problemlösning	kluringar, knep och knåp (eller liknande)
resonemang	argumentera, förklara, motivera
procedurer	metoder, algoritmer, regler
kommunikation	uttrycka sig, förklara, muntligt, mattespråket, prata matte
samband	kopplingar, sammanhang, generalisera
representationer	symbolisera, konkretisera, mattespråket, prata matte, abstrahera

Tabell 1. Kompetensindikationer.

Varje kompetensindikation klassificerades sedan med avseende på tre kriterier som relaterar till olika aspekter av kompetensmålets grundläggande principer (se bakgrunden ovan) samt två kriterier som bedömde uttalandets tydlighet och spontanitet (dvs om det var läraren eller intervjuaren som ledde diskussionen mot kompetensmålet. De fem kriterierna beskrivs nedan.

Först noterades om läraren talade om kompetensmål på ett globalt, mer övergripande, sätt ("det är viktigt att eleverna lär sig resonera, argumentera och diskutera matematik") eller på ett lokalt, mer specifikt, sätt ("eleverna måste kunna

förklara hur de löser en ekvation”). Avsikten med detta var att få information om huruvida lärarna å ena sidan förstod principen om kompetenserna som dimension av kunnande (globala indikationer) och å andra sidan att de också kunde ge konkreta exempel på hur kompetenserna yttrade sig på något specifikt matematiskt innehåll (lokala indikationer).

Därefter noterades om lärarnas uttalanden rörde en aktivitet (något som eleverna/läraren ska göra eller har gjort) eller ett mål (en förmåga/kompetens som eleverna ska utveckla). Ett uttalande om mål som sedan exemplifieras med en aktivitet noterades som båda. Avsikten med detta var att få information om huruvida lärarna å ena sidan förstod principen om kompetensernas målstyrning (mål) och å andra sidan kunde ge exempel på hur dessa mål konkret påverkade undervisningen (aktivitet). Både för lokal/global och för aktivitet/mål eftersöktes alltså i intervjun som helhet. Slutligen bedömdes också om kompetensindikationerna var spontana eller en följd av vägledning från intervjuaren, samt om uttalandena var tydliga eller om de var vaga. Detta bildade sedan underlag för en övergripande bedömning av lärarens *kompetensmålskunskap*.

Enkäten

Efter intervjun ombads lärarna att fylla i en webbenkät, vilket 63 av de 82 intervjuade lärarna gjorde. Syftet med denna enkät var att komplettera intervjudata med mer information om lärarnas tankar och föreställningar om matematikundervisningen, särskilt i relation till kursplanen och till de nationella proven. Denna information är tänkt att kunna bidra till förståelsen av lärandemiljöns utformning med avseende på ovan beskrivna kompetenser, och också tillhandahålla indikationer på i vilken utsträckning som utformningen av lärandemiljön bygger på en medvetenhet och kunskap om kursplanens olika delar samt faktorer som är viktiga för en målstyrning av undervisningen. Lärarna informerades om att resultaten från enkäten endast skulle presenteras som en sammanslagning av de deltagande lärarnas svar, vilket betyder att det inte kommer att ske någon redovisning av hur enskilda lärare, skolor eller kommuner har svarat på enkäten.

Enkäten innehöll 84 frågor som i huvudsak handlar om lärarnas tolkningar, uppfattningar och åsikter. De flesta frågorna lyder ”I vilken utsträckning...”, och svarsalternativen är numrerade från 1 till 6 där 1 = *mycket liten utsträckning* och 6 = *mycket stor utsträckning* eller motsvarande. Efter var tionde fråga fick lärarna möjlighet att kommentera de tidigare frågorna. De flesta frågorna var kopplade till ett antal frågeområden. Exempel på sådana frågeområden var lärarnas motivation och förutsättningar för tolkning och analys av kursplaner och nationella prov. Andra frågeområden rörde i vilken utsträckning lärarna känt sig

säkra på vilken användning det är tänkt att man som lärare ska ha av det som står i olika delar av kursplanen, och i vilken utsträckning de upplevt kursplanens formuleringar som förståeliga. Grupper av frågor behandlade också lärarnas tro på sin förmåga att hjälpa sina elever att utveckla de sex kompetenserna, känslor inför kursplanen och nationella prov, intresse för matematik och kunskapssyn. Exempel på intervjufrågor finns senare i analysdelen av denna rapport.

Enkätsvaren har sammanställts och andelen lärare som svarat med respektive svarsalternativ har beräknats. Samband, i form av korrelationer, mellan lärarnas svar på de olika enkätfrågorna har också beräknats.

Jämförande och sammanfattande analys

Resultat från var och en av de tre delarna ovan kan ge värdefulla insikter om lärares föreställningar, tolkningar och värdering av det kompetensbudskap som förs fram i kursplaner och i nationella prov. Tillsammans ger de också möjlighet att identifiera och förstå orsaker till den påverkan kursplaner och nationella prov har på lärares praktik. Data från analyserna av de olika enheterna ger möjligheter att se likheter och skillnader samt relationer mellan dem. Intervjuerna om lärarnas föreställningar samt om deras tolkning och värdering av proven och också om deras intentioner för praktiken kan ge oss förklaringar och förståelse för hur kursplaner och nationella prov kan ha påverkat dessa likheter och skillnader. Kring flera av dessa aspekter råder stor brist på forskningsstudier som inkluderar klassrumsobservationer. Djupintervjuer kan ge information om lärares uppfattningar, men intervjuer som även är kopplade till observationer ger bättre möjligheter att sätta både tankar och handlingar i ett sammanhang. Det kan ge information, inte bara om lärares förståelse för hur undervisning ska gå till, utan också om hur denna förståelse överförs till handling i klassrummet. Sammantaget ger detta en koppling mellan styrdokumentens mål, de nationella provens innehåll, lärarnas intryck från kursplanerna och proven samt lärarnas praktik.

Analys

I detta avsnitt presenteras analysen av intervjuerna, observationerna och enkäten. Analysen av intervjuerna var den mest omfattande, och den största delen av det som presenteras under denna rubrik har sitt ursprung där. Under vissa av frågorna kommer datamaterialet från enkäten eller från observationerna och i dessa fall nämns det explicit i det avsnittet.

1a. Vad anser lärarna att lärandemålen är?

Detta frågeområde behandlar både hur lärarna karakteriserar målen och hur de värderar dem. Analysen utgår från intervjufrågor som behandlar lärarnas spontant uttryckta mål samt deras kunskap om och värdering av kompetensmålen.

Vad anser lärarna spontant att målen med undervisningen är?

När lärarna spontant får ange sina mål varierar svaren över ett ganska brett spektrum. De vanligaste svaren kan grovt sett delas in i fyra kategorier: innehållsmål, affektiva mål, konkretionsmål och kompetensmål.

Innehållsmål är mål som direkt berör det matematiska innehållet och ofta kopplar lärarna dem till kursplanens Mål att uppnå eller till exempel till att eleverna ska klara matematiken i senare delar av utbildningssystemet. Vanliga uttryck är baskunskaper, kunna grunderna, och kunna de fyra räknesätten. Ungefär en fjärdedel av de intervjuade lärarna nämner innehållsmål i någon form. Några lärare beskriver explicit procedurkunskap eller någon grundläggande matematisk kunskap som förutsättning för att det ska vara möjligt att arbeta med och tillgodogöra sig andra mål av mer kreativ karaktär tex problemlösning.

Kategorin affektiva mål karakteriseras av att lärarna ser det som viktigt att utveckla elevernas lust till lärande, motivation, självförtroende och trygghet. De lärare som i intervjun utvecklar motivet till varför de framhåller de affektiva målen, menar att dessa mål är förutsättningar för ett effektivt matematiklärande i allmänhet: "Det allra viktigaste, om jag får plocka bort det som är grundförutsättningen, så är det att påverka inställningen och bibringa dem en tilltro till sin egen förmåga. Utan det kommer man ingenstans". Drygt hälften av alla lärare nämner affektiva mål.

Den tredje kategorin innehåller olika varianter på att lärarna ser det som viktigt att på olika sätt koppla matematiken till olika konkreta företeelser. Lärarna kan benämna mål inom denna kategori på lite olika sätt, till exempel med ord som verklighetsanknytning, tillämpning, konkretisering eller vardagsanknytning. Lärarnas formuleringar och i förekommande fall uttalade underliggande

argument för denna verklighetsanknytning kan delas upp i tre typer. För de två första typerna handlar det om att konkretiseringen kopplas till matematikens användbarhet. För vissa lärare är motivet helt enkelt att de ser det som skolmatematikens syfte att förbereda eleverna för att kunna hantera nödvändig matematik i sina dagliga liv. För andra lärare hänger syftet med att visa upp matematikens användbarhet ihop med ett av de affektiva målen, nämligen att användbarheten ses som en motivationshöjare. Den tredje typen av argument kommer från lärare som ser konkretiseringen som ett direkt medel för att förstå (den abstrakta) matematiken. Ungefär en tredjedel av de intervjuade lärarna tar upp någon typ av konkretionsmål.

Den fjärde kategorin är mål som skulle kunna räknas som kompetensmål och har med utövande av matematik att göra. Omkring hälften av de intervjuade lärarna berör något eller några kompetensmål, och då oftast via termer som "prata matematik", "få matematisk förståelse", "logiskt tänkande" eller andra allmänna ordalag. Det är mycket få lärare som visar en omfattande kunskap om kompetensmål i sina spontant angivna mål. Med omfattande menar vi här att den ska innehålla en rimligt heltäckande beskrivning av olika delkompetenser som tillsammans kan utgöra en samlad matematisk kompetens. Dessutom ska det vara tydligt att kompetenserna är något som läraren har som mål med sin undervisning och inte bara ser som möjliga karakteriseringar av matematisk aktivitet (detta definieras närmare i nästa delavsnitt).

En övergripande analys av svaren på den här frågan ger att de allra flesta lärare uttrycker ett eller flera mål som är i linje med kursplanen, men som (för respektive lärare) bara motsvarar ett fåtal aspekter av den.

Vilken insikt/kunskap visar lärarna om kompetensrelaterade mål?

Det är naturligtvis svårt att via data från ett antal intervjufrågor göra en bedömning av något så komplicerat och svårtestat som lärares kunskaper om kompetensrelaterade mål, bla eftersom dessa mål är svåra att beskriva och kan uttryckas på så många olika sätt. Det vi bedömer är dessutom egentligen inte lärarnas kunskap, utan de indikationer på kunskap som framträder i intervjun. Det är också viktigt att poängtera att det sätt att beskriva mål och kunskaper i matematik i termer av kompetenser som vi valt att fokusera på i den här intervjun inte är det enda sättet att förstå matematikkunnande. Därför är det möjligt att vissa lärare ger ett osäkert intryck när det gäller kompetenser även om de har en god kunskap till exempel om kursplanens intentioner.

En sjättedel av lärarna (elva stycken) uppvisar indikationer på *omfattande kompetensmålskunskap* under intervjun. Det innebär att de vid många tillfällen under intervjun lyckas förmedla förståelse för och insikt i de flesta av kompetenserna, både som uttalade mål för elevernas lärande och som möjliga klass-

rumsaktiviteter. Bland övriga lärare visar en stor grupp (46 stycken) *begränsad kompetensmålskunskap*. Många av dessa lärare uttrycker sig relativt tydligt om vissa av kompetenserna, ofta kommunikation eller problemlösning, och beskriver dessa kompetenser inte bara som en viktig del av matematiskt arbete, utan har dem också som explicita mål för elevernas lärande. Dessa lärare visar dock inte lika tydligt som den första gruppen av lärare medvetenhet om bredden av kompetensmål. En del lärare med begränsad kompetensmålskunskap har visserligen en bred insikt i kompetenserna men visar inte tydligt under intervjun på djup förståelse för dess roll som mål. En sista grupp (nio lärare) bedöms ha uppvisat *obefintlig kompetensmålskunskap*. Denna bedömning vilar på att dessa lärare vid intervjun uppvisar få kompetensindikationer, att de undviker att tala om kompetenserna även när de får en direkt fråga samt att de inte beskriver det vi kallar kompetensernas globala karaktär eller deras funktion som mål (se avsnitt Mål och styrdokument).

Värt att notera är också att kompetensen att hantera procedurer inte har en speciellt framträdande plats i lärarnas svar, trots att matematikundervisningen ibland kritiserats för att vara alltför inriktad på att träna eleverna i procedurhantering. Detta kan ställas i relation till att analysen av klassrumsobservationerna visade ett stort fokus på procedurhantering (även om andra kompetenser också var tydligt närvarande).

Många av lärarna menar att kompetensmålen ligger i linje med deras egna mål, även om att de inte själva nämnde något om kompetensmål när de spontant fick ange målen för elevernas lärande. Lärarna uttrycker till exempel att "de stämmer bra med mina egna mål", att kompetenserna är ett medel för att de ska nå sina egna mål eller att "kompetenserna finns i all matematik". I allmänhet är dessa tolkningar fullt rimliga att göra men ofta förefaller kopplingarna mellan kompetenserna och de personliga målen endast göras på en ytlig nivå (se begreppet *filtrering* i avsnittet Resultat). Ett exempel på en mycket vag beskrivning av relationen mellan kompetensmålen och lärarnas egna mål för elevernas lärande är: "När vi har pratat här så tycker jag att jag följer dem. Sånt som automatiskt kommer in, utan att direkt se det, så finns det där." Ibland är det också oklart om lärarna ser kompetenserna som mål eller medel (klassrumsaktiviteter som kan göra att eleverna når målen).

Ett intressant resultat från analysen är också att många av lärarna som inledningsvis visar osäkerhet beträffande tolkningarna av kompetenserna, till exempel i form av vaga tolkningar av kompetensbegreppen i kursplaneutdragen, ganska väl kan relatera till kompetenserna när de fått dem förklarade för sig i en senare del av intervjun. I många fall görs detta på en relativt ytlig nivå, men det finns också flera lärare som mycket väl kan relatera sina egna mål till de nya begrepp som kompetenserna representerar.

Hur värderar lärarna kompetensbudskapet?

Nästan alla lärare (61 av 66 stycken) menar att de kompetenser vi presenterar är bra och viktiga. Flera ser kompetenserna som kärnan i matematiken och flera uttryckte uppskattning av denna typ av strukturerade presentation av något de redan sett förekomma inom matematikämnet. I huvudsak är dock lärarnas argument för varför kompetenserna är viktiga av övergripande och relativt ytlig karaktär, till exempel "När man kan förklara har man förstått" om resonemangs-kompetensen. Att lärarna dessutom ser kompetenserna som ett rimligt sätt att tolka kursplanen tar sig till exempel uttryck i en önskan att få veta mer om dem eller rent av en besvikelse över att aldrig ha hört talas om dem förut.

Ibland är det dock svårt att avgöra om lärarna, på den korta tid som ägnas åt presentation av kompetenserna, hinner få ett tillräckligt bra grepp om dem, eller om de tolkar kompetensmålen i termer av sina egna mål (se begreppet filtrering i avsnittet Resultat nedan) när de gör denna bedömning. En möjlig förklaring till att lärarna ser kompetenser i sina egna mål när inte vi gör det, är att lärarna i inledningen av intervjun inte kom ihåg att nämna alla de mål de har med sin undervisning och råkade utelämna just kompetensmålen. Det är visserligen troligt att lärare som har mål av kompetenstyp som några av sina primära mål spontant hade nämnt något annat än rena innehållsmål, men eventuell frånvaro av kompetenser i lärarnas beskrivningar av sina egna mål behöver inte innebära att de är negativa till kompetensmålen.

1b. Hur tolkar lärarna budskapet i kursplanen?

Hur tolkar lärarna centrala delar (framförallt kompetensmålen) av kursplanen?
Hur väl insatta är lärarna i kursplanen och hur väl förstår lärarna kursplanen?

Data för den här delen kommer från två delar i intervjun, dels ett avsnitt där läraren ombads tolka olika utdrag ur kursplanen, dels ett avsnitt där frågor om hur läraren uppfattar och använder olika delar ur kursplanen behandlades. De citat ur kursplanen som lärarna fick i uppgift att tolka är visserligen, i enlighet med undersökningens huvudfokus, valda för att illustrera kompetenserna, men de innehåller givetvis även många andra aspekter och ger möjlighet till att göra andra kopplingar än bara till kompetenser. Många av dessa identifieras av lärarna, vilket innebär att även om lärarna inte identifierar just kompetensmål, så gör de ofta andra, fullt rimliga och insiktsfulla tolkningar som inte fokuseras i vår studie. I delen där lärarna skulle tolka kursplanecitaten ombads de även (efter att ha tolkat citatet som tex behandlade resonemang, utan att vi nämnt att det var resonemang citatet behandlade) att berätta vad de lade för innebörd i *ordet* resonemang.

Huvudresultatet är att lärarnas tolkningar i stort ryms inom kompetensdimensionen. Även om lärarna inte alltid använde samma ordval som i kompetensramverket så tolkade de citaten i huvudsak i dess andemening. Till skillnad från den passage i intervjun, som kommer att behandlas senare, där lärarna ombads beskriva vad eleverna behöver kunna för att lösa en matematikuppgift, så handlar tolkningarna här mer om allmänna förmågor än om specifikt matematiskt innehåll. Detta fokus mot mer allmänna förmågor till trots så är lärarnas tolkningar av kursplanen inom denna dimension mycket varierande. Variationen gäller hur tydligt lärarna kan uttrycka sina tolkningar men också tolkningarnas innehåll.

Lärarnas tolkningar av kursplanen varierar i tydlighet från delvis tydliga till vaga både över lärare och över citat. Många lärare hade särskilt svårt att tolka följande utdrag ur avsnittet Ämnets karaktär och uppbyggnad:

"All matematik innehåller någon form av abstraktion. Likheter mellan olika företeelser observeras och dessa beskrivs med matematiska objekt. Redan ett naturligt tal är en sådan abstraktion."

Flera lärare gav upp sina försök att göra en tolkning och flera gjorde tolkningar som var väldigt vaga, till exempel att "Det är väl det vi håller på med hela tiden." Andra lärare gjorde tydligare tolkningar, till exempel "Men det här (...) det låter så fint, men eftersom allt är en abstraktion så kan ju en företeelse vara ganska enkel och objektet kan ju vara till exempel en geometrisk ... en rätvinklig triangel, det är ju ett geometriskt objekt. Vi behöver inte komplicera saker så mycket." Lärarens kommentar gör en direkt koppling, utan att använda själva ordet, till begreppet *representation* som är centralt för representationskompetensen, vilket ses som en kompetensindikation. Spridningen mellan lärarnas vana att läsa och tolka kursplanen kom också fram särskilt tydligt i samband med detta citat, då två olika lärare uttryckte sig på följande sätt: "Ingick det här i kursplanen? Det har jag nog hoppat över." och "Den första meningen är en av mina favoritmeningar i kursplanen. Den hjälper oss lärare att tänka matematik, för vi glömmmer ibland hur abstrakt det faktiskt är."

Lärarnas tolkningar är dessutom innehållsmässigt sinsemellan klart olika. Det gäller både innebörden i centrala termer och innebörden i längre textutdrag. Ett exempel är den i kursplanen centrala termen problem (liksom begreppet problemlösning) som tolkades på många olika sätt, från att vara vilken uppgift som helst till att vara en uppgift med speciella egenskaper som att den är ett dilemma, den kräver att man redovisar sina tankegångar eller att det är en uppgift där man inte ser svaret/lösningsmetoden direkt (det är förmodligen den senaste innebörden som avses i kursplanen, men det går inte att fastställa).

Andra lärare menade att ett problem är "ett lästal" eller "en flerstegsuppgift". På motsvarande sätt tolkades längre textavsnitt mycket olika.

Värt att notera är att få lärare spontant relaterar till att problem och problemlösning skulle karakteriseras av att de kräver en viss kreativ insats från eleven. Visserligen står det inte exakt angivet i kursplanen att problemlösning betyder att det krävs kreativitet men att kreativitet är en viktig del av matematiskt arbete finns ändå tydligt beskrivet i kursplanen (Skolverket, 2000) och det är rimligt att anta att det ligger i kursplanens intentioner att problemlösning innefattar denna kreativa sida (Emanuelsson, mfl, 1992). En lärare nämner explicit kreativitet och beskriver att det arbetas för lite med detta och att det är svårt att göra det i praktiken.

Det händer även att lärarnas tolkningar riktas, filtreras, avgränsas och möjligen ibland modifieras via lärarens egna målfokuseringar. Det kan handla om att läraren ser problemlösning som det mest centrala i matematikämnet och i samband med det ständigt tolkar kursplanen eller diskussionen av kompetenser i termer av problemlösning. Andra lärare fokuserar genomgående på vardagsanknytning, eller på målet att eleverna ska få självförtroende, även om kursplanecitatet som ska tolkas har ett mycket bredare innehåll. Denna typ av filtreringar/avgränsningar indikerar att en del lärare bara tar till sig vissa delar eller aspekter av det som beskrivs i kursplanen som helhet. Detta fenomen behandlas utförligare nedan.

Några av de intervjuade lärarna visar tydligt att de är insatta i kursplanen, och att de har kunskap om dess olika delar. Detta visar sig till exempel genom att de kan relatera kursplanens olika delar till varandra, förklara förhållandet mellan uppnående- och strävansmål eller förklara förhållandet mellan formulerade mål och bedömningens inriktning och betygskriterierna. I motsats till denna grupp uppvisar många av lärarna stor osäkerhet när det gäller syftet med de olika delarna i kursplanen (förutom uppnåendemålen) och deras roll i undervisningen.

Anser lärarna att kursplanen påverkar deras undervisning?

Majoriteten av lärarna anser att kursplanen påverkar deras undervisning även om många har svårt för att precisera hur denna påverkan ser ut, liksom om det är hela, vissa delar av eller vissa aspekter av kursplanen som påverkar dem. Några nämner strävansmål och läser inntill ur det exemplar av kursplanen de fick vid intervjutillfället. Flera tar upp uppnåendemål och exemplifierar ibland med något av dem. Lärare på skolor som har lokala kursplaner nämner ofta dem som ett mer centralt dokument för deras arbete. Flera lärare har svårt att uttrycka sig när de försöker svara på frågan huruvida kursplanen påverkar deras undervisning, vilket kan indikera att de inte i någon egentlig utsträckning har funderat över den tidigare. Att lärarna i stor utsträckning faktiskt tolkar, eller i alla fall

försöker tolka, kursplanen kan hållas för troligt. Det är dock oklart, ofta även för lärarna själva, vad detta konkret resulterar i när det gäller deras undervisning.

1c. Hur har lärarna arbetat för att tolka budskapet i kursplanen?

I vilken utsträckning och på vilket sätt används kursplanens olika delar?

Lärarna verkar ha god tillgång till kursplanen men det är inte alla som menar att de läser den. Det är överlag svårt att få veta på vilket sätt lärarna använder kursplanernas olika delar, annat än i svepande ordalag. Hos vissa lärare finns starka indikationer på att det beror på att de inte använder delarna särskilt mycket, till exempel menar några att de lutar på att läroboken tolkar kursplanen på ett rimligt sätt och andra konstaterar att de inte har tittat i den sedan de gick sin lärarutbildning. De flesta lärarna pekar dock ut hela eller delar av kursplanen som något de läser och arbetar med. Många har särskilt fokus på Mål att uppnå och de betygsättande lärarna nämner ofta Bedömning i ämnet matematik. Ibland används avsnitten som checklistor. Många lärare tar även hänsyn till Mål att sträva mot i olika utsträckning, men det är inte ovanligt att de har svårt att säga något om hur denna påverkan tar sig uttryck eller att intervjun i övrigt visar, för samma lärare, att de inte har kunskap om de kompetensmål som i stor utsträckning ingår i strävansmålen. Vissa lärare nämner specifika delar eller begrepp, till exempel avsnittet om problemlösning eller formuleringar kring "pratmatte" eller matematik i vardagen, som de menar att de ofta utgår från.

Anser lärarna att kursplanen är svår att tolka och förstå?

Många lärare svarar i enkäten att de tycker att kursplanen i stor utsträckning är går att förstå. Men det finns också en relativt stor grupp av lärarna som upplever att kursplanen är svår att förstå, vilket i enkäten visar sig på två sätt. Dels anger dessa lärare att de endast i låg utsträckning känner sig säkra på vilken användning det är tänkt att de som lärare ska ha av det som står i olika delar av kursplanen, och dels anger de att formuleringar i olika delar av kursplanen endast är förståeliga i liten utsträckning. Till exempel kryssar 25 procent av lärarna i något av svarsalternativen 1–3 på den 6–gradiga skalan när det gäller i vilken utsträckning de känner sig säkra på vilken användning det är tänkt att de ska ha av det som står i kursplanen under Mål att sträva mot (1=i mycket liten utsträckning och 6=i mycket stor utsträckning). En liknande stor andel (26 procent) anger något av de 3 lägsta svarsalternativen på frågan i vilken utsträckning de tycker att formuleringarna under Mål att sträva mot är förståeliga (motsvarande andelar

Anser lärarna att de nationella proven påverkar deras undervisning?

Ungefär 70 procent av de lärare som någon gång har genomfört nationella prov (54 stycken) menar att de påverkas på något sätt och i varierande grad av de nationella proven. Denna påverkan gäller oftast att läraren sett olika typer av kompetensmål (problemlösning, kommunikation, resonemang, förmågan att lösa öppna uppgifter och att formulera generella lösningar) framträda i uppgifterna i de nationella proven. I mindre utsträckning nämns dock påverkan av de nationella provens innehållsmål, till exempel genom att läraren måste behandla stoff i annan takt än boken anger. Många lärare uttrycker en medvetenhet om att de nationella proven på något sätt skiljer sig från uppgifterna i läroboken, men kan inte alltid sätta fingret på och/eller verbalisera vad det är de noterat. En lärare beskriver väldigt tydligt att han ser att de nationella proven är konstruerade av personer som tänker på ett annat sätt jämfört med hur han arbetar i klassrummet. Intervjun som helhet indikerar att denna lärare syftar på vad kallar kompetenser.

Anser lärarna att det är svårt att bedöma vad de nationella proven testar?

På frågan om det är lätt eller svårt att på förhand avgöra vad en uppgift testar varierar svaren mycket. Det framträder här (utan ingående korrelationsanalys) ingen uppenbar indikation på korrelation till de övriga intervju svaren. Vissa lärare tycker att det är lättare att göra en sådan bedömning när det gäller uppgifter från de nationella proven än för uppgifter från läroboken, medan andra upplever den omvända relationen. Några enstaka lärare nämner skillnader mellan läroboksuppgifter och NP-uppgifter, till exempel att NP-uppgifter kräver mer eget tänkande, att de oftare är öppna eller att de testar flera mål samtidigt. Flera lärare nämner att det generellt kan vara svårt att förutse vad en uppgift testar, eftersom man aldrig vet "vad en femma eller sexa tänker. De kanske löser på ett sätt som jag aldrig hade kunnat tänka ut."

3. Undervisningens innehåll och form

Hur och på vilka grunder sker urvalet av läromedel?

Den övervägande delen av de intervjuade lärarna säger att läroboken väljs efter diskussion mellan kollegorna. Ibland finns en särskild grupp med ansvar för denna fråga vilket också kan vara en förklaring till att en del lärare inte vet hur valet görs. De kriterier för val av läroböcker som lärarna nämner är mycket varierande. Många nämner att ekonomin spelar roll, men det framkommer inte att detta ses som ett stort problem utan snarare att ekonomiska frågor är en aspekt

av många att ta hänsyn till vid valet. Andra faktorer som nämns är att läromedlet ska täcka vad som anses vara de viktigaste grundkunskaperna, att läromedlet ska överensstämma med den lokala kursplanen, att det ska vara enkelt för eleverna att arbeta i själva. Det finns också lärare som säger att de valt ett visst läromedel för att det tydligt anger mål i samband med varje kapitel och lärare som väljer läromedel som upplevs stämma bättre ned nationella prov.

Bland de besökta skolorna finns både exempel på att alla elever i samma åldersgrupp arbetat med samma läromedel och exempel på där samma skola använder olika läromedel för en och samma årskurs. I vissa fall har en enskild lärare valt ett annat läromedel än vad som förekommer på skolan i övrigt för att läraren upplever att det passar med dennes mål och arbetssätt. Det finns även exempel på att olika elever i samma klass arbetar med böcker från olika förlag. Endast i enstaka fall beskrevs ett missnöje med hur läroböcker valts och det antyds att det inte har varit pedagogiska hänsyn som styrts valet.

Hur arbetar lärarna för att hjälpa eleverna att nå lärarnas egna mål?

Lärarna ger mycket olika typer av svar på frågan om hur de arbetar för att hjälpa eleverna att nå målen, både i fråga om längden på svaren och i fråga om svarens detaljnivå. De nämner sammanlagt en stor mängd olika metoder, till exempel att de låter sig vägledas av läroboken och litar på att den ska göra att eleverna når sina mål, att de arbetar verklighetsnära, laborativt, varierat eller lustfyllt, att de diskuterar mycket med eleverna, att de har olika aktiviteter med kroppen, att de låter eleverna göra fel och sedan utgår från felet eller att de är tydliga med målen. Många lärare nämner läroboken som viktigt stöd även om en del av dem gör det på ett lite ursäktande sätt, som om de upplever eller tror att det inte är riktigt accepterat. En mindre andel lärare har en tydlig bild av vilken roll läroboken spelar för dem, till exempel att boken ger dem organisatoriskt eller planeringsmässigt stöd eller håller elever sysselsatta på egen hand så att läraren får tid att ägna sig åt enskilda elever eller mindre grupper.

Några av lärarna följer upp det de sa om sina mål för elevernas lärande med det de nu säger om sitt arbetssätt (och i en del fall återspeglas detta även på den besökta lektionen). Men många lärare förmedlar under intervjun också ett intryck av att inte ha reflekterat över relationen mellan mål och arbetssätt, bland annat genom att inte beskriva hur deras arbetssätt koppar till deras mål. En möjlig slutsats är att lärarna inte utförligt reflekterat över relationen mellan mål och undervisningsaktiviteter. Detta kan sättas i relation till att flera lärare verkar se kompetenserna som medel i, snarare än som mål för, verksamheten. En annan, kanske i detta sammanhang lika trolig slutsats, är att det skulle behövas betydligt mer tid och fler uppföljningsfrågor i intervjun för att ge lärarna möjlighet att utveckla sina tankar kring detta.

Anser lärarna att kompetensmålen återspeglas i undervisningen? Anser lärarna att det är svårt att arbeta med kompetensmålen i undervisningen?

När lärarna ombeds att berätta om den tidigare besökta lektionen innehöll något som kunde kopplas till kompetensmålen så blir svaren mycket varierande. En del lärare har svårt att överhuvudtaget svara på frågan. Andra nämner en eller flera kompetenser men beskriver inte hur undervisningsaktiviteten i fråga relaterar till kompetensen, vilket kan tyda på att de gör en ytlig tolkning av vad kompetensmålen innebär. Det finns dock flera lärare som ger tydliga svar. Till exempel angående resonemang: "Jag krävde ju att de skulle motivera varför de gjorde på ett visst sätt".

De flesta lärare säger att det inte är svårt, eller inte borde vara svårt, att arbeta mot kompetensmålen i undervisningen, men många av dessa är samtidigt mycket otydliga när de beskriver kompetensrelaterade aktiviteter i sin egen lektion vilket gör det svårt att veta hur de egentligen tolkar frågan. Både bland lärare som anser att det är lätt och bland de som anser att det är svårt att arbeta med kompetensmålen i undervisningen är det ovanligt att ange något skäl. Av de som anger sådant skäl nämner en del att det är lätt för att "det är inbakat" i lärarens vanliga undervisning eller att det är svårt för att man måste lämna läroboken och för att det är svårt att ändra gamla tankesätt.

Det finns exempel på att lärare som enligt vår bedömning har förhållandevis god kompetenskunskap också ger tydligare beskrivningar av svårigheter med att jobba med kompetenserna. Här nämns relationen till läroboken och till gamla invanda mönster i undervisningen, men även lärarens egen kompetens. Dessutom nämns som en orsak att kursplanen har tydligare beskrivningar av mål att uppnå (vilka fokuserar innehållsmål) samt att eventuella lokala kursplanedokument har stort fokus på mål av innehållskaraktär, vilket leder fokuseringen mot innehållsmålen snarare än mot kompetensmålen.

Anser lärarna att eleverna når lärarnas mål? Anser lärarna att eleverna når kompetensmålen?

De flesta av de intervjuade lärarna (52 av 66) menar att eleverna når målen eller att de flesta eleverna når målen. En intressant observation är att trots att frågan är formulerad så att den relaterar till lärarens egna mål som vi frågat om precis innan, så beskriver en del lärare istället huruvida eleverna når mål att uppnå i kursplanen vilket kan ses som en indikation på att det finns ett fokus på att eleverna når kursplanens Mål att uppnå.

När det gäller motsvarande fråga om kompetensmålen svarar de flesta lärarna antingen att eleverna huvudsakligen når dessa mål eller att de flesta eleverna når dem. En lärare anser att eleverna når kompetensmålen, under förutsättning

att eleverna utsätts för dem. För många lärare får dock uttalandet betraktas som osäkert med tanke på hur otydligt de relaterar till kompetenserna i intervjun som helhet. Det finns också exempel på lärare som uttrycker sig tydligt, men som uppvisar en tolkning av kompetensmålsreformen och av intentionerna i kursplanen som strider mot den grundläggande tanken (andra principen, avsnitt Mål och styrdokument) att alla kompetenserna kan och bör få utvecklas oavsett nivå på eleverna eller på det matematiska innehållet:

"I min sju är fokus på att välja räknesätt och procedurhantering. De klarar inte problemlösning än. Fokus där är begreppsförståelse, procedurer och en del resonemang. I min åtta fokuserar vi mer på problemlösningförmågan."

Även när det gäller frågan om elevernas kompetensmåluppfyllelse finns det tendenser till att lärare som bedöms ha hög kompetenskunskap utvecklar svaret på frågan bättre än andra lärare. Deras svar kan tex handla om att det är lättare att nå vissa kompetensmål än andra.

Anser lärarna att de skulle ha andra mål om de hade andra förutsättningar?

Även om det finns lärare som menar att ändrade förutsättningar, till exempel mer tid, mindre elevgrupper eller mer homogena elevgrupper, skulle påverka deras mål så menar de flesta att det snarare skulle påverka måluppfyllelsen eller möjligen deras arbetsmetoder: "Jag skulle ha samma mål, men jag skulle sikta på att eleverna ska nå längre" och "Målen skulle vara desamma men man kanske skulle jobba på andra sätt". Det finns lärare som uttrycker att de antagligen skulle undervisa annorlunda om de hade mer kunskaper i matematik. Svaren på denna fråga indikerar dock att frånvaro av kompetensaktiviteter inte beror på att lärarna anser sig begränsade av yttre förutsättningar.

På vilka sätt återspeglas kompetensmålen i läromedel och undervisningens övriga komponenter/aktiviteter?

Arbetsformer och läromedel

En översiktlig bild av undervisningen är att 2 procent av tiden upptogs av arbetsform A (matematikrelaterad information), 8 procent av arbetsform B (lärläro- genomgångar inför uppgiftslösning), 21 procent av arbetsform C- (lärarens arbete med matematikuppgifter i storgrupp eller helklass), 10 procent av arbetsform C+ (elevernas arbete med matematikuppgifter i storgrupp eller helklass) samt 59 procent av arbetsform D (arbete med matematikuppgifter enskilt eller i små grupper). Till exempel skulle en lektion på 50 minuter innehålla cirka 45 minuter matematikrelaterade aktiviteter. En sådan lektion skulle då i genomsnitt innehålla 5 minuter genomgång (arbetsform A och B), 9 minuter lärarledd

uppgiftslösning (C-), 5 minuter uppgiftslösning i stor grupp (C+) och 26 minuter individuellt arbete med matematikuppgifter (D).

Elevernas arbete med matematikuppgifter, enskilt eller i liten grupp, fördelas på 57 procent arbete i den egna läroboken och 43 procent arbete med annat material (lösblad, uppgifter på OH eller liknande). Här ser vi en stor skillnad i förekomst av kompetensaktiviteter, se utförligare beskrivning nedan.

Förekomst av kompetensrelaterade aktiviteter

Tabell 2 nedan ska tolkas på följande sätt: Varje rad anger arbetsform, A-D eller Alla (dvs totalt). För var och en av de sex kompetensaktiviteterna finns en kolumn för tolkning (I), användning (II) och värdering (III). Varje cell anger i procent förekomst av en kompetensaktivitet, i termer av den andel tid (av den totala tiden för en viss arbetsform) som upptogs av situationer där kompetensaktiviteten ingick (se metodavsnittet). Till exempel förekom användning av problemlösning inom situationer som i sin tur upptog totalt 29 procent av de 2698 minuter lektionstid som analyserats (rad "Alla", kolumn "Problemlösning II"). För enkelhetens skull kommer detta i den fortsatta texten att betecknas som att "användning av problemlösning ingick i 29 procent av situationerna". Ett annat exempel ur tabellen blir då att värdering av problemlösning förekom i 10 procent av situationerna med arbetsform B, vilket kan utläsas i rad "B", kolumn "Problemlösning III".

typ	Problem-lösning			Resonemang			Procedur-hantering			Representa-tion			Samband			Kommunika-tion		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
A	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	17	0	0	0	0	13	0	0
B	23	18	10	35	24	4	70	62	9	70	50	4	51	44	0	54	13	0
C-	13	39	18	25	52	23	33	69	12	49	46	16	43	58	20	28	67	11
C+	33	33	31	30	38	34	30	37	12	34	35	4	39	43	16	50	45	9
D	28	28	5	10	25	6	30	79	4	26	29	4	22	24	6	26	24	1
Alla	25	29	11	17	32	12	33	70	7	35	34	6	30	34	9	30	34	4

Tabell 2. Kompetensaktiviteter (förekomst i procent).

Arbetsform A (läraren framför information som är relaterad till matematik men inte till de uppgifter som eleverna ska arbeta med under lektionen) förekom endast i situationer som omfattade 60 minuter av totalt 2698 minuter (2 procent). Dessa var dessutom av mycket varierande slag, tex information om bedömningsanvisningar för nationella prov, en diskussion om självförtroende

eller en genomgång av centrala matematiktermer som läraren ansåg var svåra. Denna arbetsform kommer inte att behandlas vidare i analysen, utöver en notering att kompetensrelaterade aktiviteter förekom väsentligen inte (tabell 2, rad "A").

De övriga arbetsformerna var relativt homogena med avseende på förekomst av kompetensrelaterade aktiviteter. Att tolka och att använda kompetenser (kompetensaktiviteter av typ I och II) förekommer i cirka 1/3 av alla situationer, med klart högre värde för proceduranvändning (69 procent) och något lägre värden för tolkning av problemlösning och resonemang (20 respektive 17 procent). Värdering (kompetensaktiviteter av typ III) förekommer i mindre utsträckning, cirka 10 procent, med något högre värden för Problemlösning och Resonemang.

Jämförelse mellan kompetensrelaterade aktiviteter och skolår

I en jämförelse av hur kompetensaktiviteterna förekommer i olika skolår framgår att det förekommer fler kompetensaktiviteter i skolår 1–3 och 7–9 jämfört med skolår 4–6. Ett exempel är att problemlösning typ II (att utföra problemlösning) förekommer i 22 procent av situationerna i år 4–6 vilket ska jämföras med 37 procent i år 1–3 och 33 procent i år 7–9. En (del)orsak verkar vara att matematiken i skolår 4–6 i stor utsträckning handlar om algoritmisk träning inom aritmetik, och till detta enkla tillämpningar, vilket inte innefattar så omfattande kompetensaktiviteter utöver procedurhantering.

Många lärare talar om att kommunikation är central i matematikundervisningen. Att "prata matte" och "att använda mattespråket" nämns av flera lärare i intervjuerna som en viktig aspekt av undervisningen. En tendens som kan utläsas när det gäller kommunikationskompetensen är att närvaron av att använda kommunikation (kommunikation typ II) minskar när man går från skolår 1–3 (44 procent), via skolår 4–6 (36 procent) och upp till skolår 7–9 (28 procent). Samtidigt ökar kommunikation typ I (att tolka information). Där är procentsatserna 22 procent, 26 procent respektive 41 procent. En tolkning är att i lägre skolår talar eleverna själva i större utsträckning, medan de i högre skolår ägnar en större andel av kommunikationstiden till att lyssna till läraren.

Det procedurfokus som kan utläsas ur tabell 2 finns också i skolår 4–9. I skolår 1–3 är däremot detta fokus något mindre, särskilt för arbetsform D, elevers arbete med matematikuppgifter individuellt eller i smågrupper. I denna arbetsform i skolår 1–3 förekommer procedurhantering typ II (att använda procedurer) i 47 procent av uppgifterna, att jämföra med 87 procent respektive 86 procent i skolår 4–6 och 7–9.

Jämförelse mellan kompetensrelaterade aktiviteter och arbetsformer

Arbetsformerna A, B och C- utgör tillsammans de lärarledda delarna av matematikundervisningen, dvs gemensamma genomgångar eller arbete med matematikuppgifter där läraren ansvarar för huvuddelen av lösandet av uppgifterna. De arbetsformer där eleverna står för huvuddelen av arbetet är då C+ och D, dvs arbete med matematikuppgifter i helklass eller stor grupp respektive arbete med matematikuppgifter individuellt eller i smågrupper.

Vid en jämförelse mellan lärarledda och elevstyrda arbetsformer ser vi en något högre andel kompetensrelaterade aktiviteter i de lärarledda arbetsformerna, förutom när det gäller problemlösning, som är av samma storleksordning i båda arbetsformerna, och procedurhantering, som är någon mer frekvent i de elevstyrda arbetsformerna. Det senare framkommer inte direkt ur tabell 2, men när hänsyn tas till tidsfaktorn (framför allt att arbetsform D är vanligast) så visar analysen att procedurhantering typ II (att utföra procedurer) förekommer i 73 procent av observationerna av arbetsformerna C+ och D, att jämföras med 63 procent av observationerna av arbetsformerna A, B och C-.

I tabell 2 framgår att det förekommer en relativt låg andel procedurhantering (37 procent) vid lärarledd uppgiftslösning där eleverna står för huvuddelen av lösningsarbetet (arbetsform C+). Väsentligen inga av dessa uppgifter kommer från läroboken, och en möjlig förklaring kan vara att när lärare initierar uppgiftslösning i stor grupp är ändamålet något annat än träning i procedurhantering (som finns i boken i stor utsträckning).

Bortser man från ovanstående observationer (och några få till) så förekommer kompetensaktiviteterna i en relativt jämn fördelning i förhållande till arbetsformerna.

Som nämnts ovan förekommer värdering (III) i liten omfattning i alla situationer och särskilt i den tidsmässigt dominerande arbetsformen D där det finns med som inslag i 1–7 procent av situationerna. I arbete med läroboksuppgifter förekommer inte värdering i någon större utsträckning.

En central aspekt av de lärarledda arbetsformerna är i viken utsträckning lärarna explicit synliggör och reflekterar kring de olika kompetensaktiviteterna. Att lärarna för någon form av diskussion med eleverna om någon av de sex kompetenserna förekommer endast inom 0,3 procent av de analyserade situationerna. Att lärarna överhuvudtaget nämner något som relaterar till kompetenserna (text "det är viktigt att ni motiverar era svar" eller "nu ska vi arbeta med problemlösning") förekommer (och då som mycket korta delar) inom mindre än 5 procent av alla kompetensaktiviteter. Vi kan se en något högre andel i skolår 4–6 och 7–9, medan det i princip är obefintligt i skolår 1–3.

Jämförelse mellan kompetensrelaterade aktiviteter och läromedel

Enskilt arbete (eller arbete i liten grupp) med matematikuppgifter är den vanligaste arbetsformen i de klassrum som har observerats (cirka 59 procent av tiden). Detta arbete fördelar sig på arbete med uppgifter i den egna läroboken (cirka 3/5) och arbete med matematikuppgifter som eleverna får av läraren (cirka 2/5). Det innebär att eleverna i de observerade situationerna arbetar i genomsnitt 1/3 av tiden med läroboksuppgifter (11 procent för skolår 1–3, 31 procent för skolår 4–6 och 47 procent för skolår 7–9). Här finns en markant skillnad när det gäller kompetensrelaterade aktiviteter. Vid arbete i den egna läroboken förekommer procedurhantering typ II (att utföra procedurer) vid 90 procent av situationerna och övriga kompetenser i mellan 9 procent och 14 procent av situationerna. När uppgifterna kommer från andra källor (lösblad, uppgifter på tavlan eller på OH etc.) förekommer procedurhantering i 64 procent av situationerna och övriga kompetenser i mellan 40 procent och 47 procent. Den stora skillnaden beror på att den klart vanligaste uppgiftstypen i läromedlen är att utgående från en given regel och/eller ett löst exempel använda en algoritm utan att behöva aktivera/träna några kompetenser utöver procedurhanteringen. Att ytterligare klargöra orsakerna till skillnaden kräver fördjupade studier av bland annat läromedlens innehåll, själva konstruktionsprocessen samt hur lärare väljer och hanterar läromedel.

Vi ser också skillnader mellan skolår. De uppgifter som eleverna arbetar med i skolår 1–3 innehåller generellt sett fler kompetensaktiviteter än i högre skolår. I vissa fall är det en markant skillnad, t ex när det gäller att utföra resonemang (resonemangsaktivitet II). Detta handlar ofta om att eleverna måste motivera sina svar eller argumentera för en viss lösning. Detta förekommer i 47 procent av uppgifterna i skolår 1–3, 15 procent i skolår 4–6 och 24 procent i skolår 7–9. Av analyserna framkommer att lärarnas instruktioner till eleverna inte skiljer sig åt nämnvärt när det gäller formuleringar. Däremot är det betydligt vanligare att läraren påpekar vikten av att skriva fullständiga lösningar och att argumentera för sina svar i skolår 1–3.

Relationer mellan kompetensaktiviteter

Det finns en relativt stark teoretisk relation mellan de två kompetenserna problemlösning och resonemang: om man ska lösa en uppgift där man själv måste ta fram lösningsmetoden (dvs ett problem) så bör det (om man inte enbart ska gissa) understödjas av någon form av argumentation kring varför strategivalet är rimligt, samt ibland även en verifierande argumentation. Därför kan man förvänta sig en stark koppling mellan förekomsterna av de två kompetensaktiviteterna. Detta visar sig också tydligt i analysen. I de situationer där problemlösning

typ II (att utföra problemlösning) förekommer visar det sig att resonemang typ II (att utföra resonemang) är närvarande i 72 procent av situationerna, jämfört med 32 procent av alla situationer. Mindre väntat var möjligen att de tre kompetenserna representationer, samband och kommunikation också fördubblar sin närvaro. Det visar sig att vi får en stark positiv korrelation mellan alla kompetenserna, förutom procedurhantering som har en negativ korrelation till de övriga fem kompetenserna. En teoretisk (del)förklaring är att det är i problemlösning som man verkligen behöver beakta betydelsen hos samband och representationer. Eller annorlunda uttryckt: i problemlösning behöver man förstå matematiken, vilket man inte behöver i ren procedurhantering.

Den negativa korrelationen utgående från procedurhantering är dock relativt svag när det gäller representationer och samband. I situationer som inte innehåller procedurhantering till någon del är både problemlösning, resonemang och kommunikation tydligt mer framträdande än genomsnittet. När procedurhantering inte ingår alls i en situation så ökar (jämfört med om det ingår) problemlösning från 29 procent till 56 procent, resonemang från 32 procent till 48 procent samt kommunikation från 34 procent till 48 procent. Ökningen för samband och representationer är mindre.

Resultat

Detta avsnitt sammanfattar resultaten och besvarar rapportens två huvudfrågor: *Hur ändamålsenlig är undervisningen vad gäller elevernas möjligheter att utveckla de sex matematiska kompetenserna ovan via att arbeta med kompetensrelaterade aktiviteter?* och *Varför erbjuds eleverna denna undervisning?* Frågeområden 1–3 används för att precisera studiens frågeställningar och under respektive huvudfråga redovisas analysresultaten utifrån dessa områden.

Hur ändamålsenlig är undervisningen vad gäller elevernas möjligheter att utveckla de sex matematiska kompetenserna ovan via att arbeta med kompetensrelaterade aktiviteter?

Som beskrivits i bakgrunden till denna rapport är en av utgångspunkterna att en elev måste få möjlighet att arbeta med kompetensrelaterade aktiviteter för att kunna utveckla motsvarande kompetenser. För att bedöma undervisningens ändamålsenlighet ur detta perspektiv är det därför nödvändigt att undersöka om och hur eleverna och lärarna arbetar med denna typ av kompetensrelaterade klassrumsaktiviteter. Detta genomförs genom en mängd lektionsanalyser men också genom analys av lärarnas egna uttalanden om sin praktik och lärarnas syn på kopplingen mellan deras egna klassrumsaktiviteter och olika typer av mål (frågeområde 3).

Det tydligaste resultatet från analysen av klassrumsobservationerna är att procedurhantering är den klart vanligaste kompetensaktiviteten, särskilt i arbete med läroboksuppgifter. Den är också vanligare i skolår 4–9 än i skolår 1–3. Det finns en stark positiv korrelation mellan användning av läroboken och procedurhantering, samt en stark negativ korrelation mellan användning av läroboken och övriga kompetenser. Det är en stor skillnad jämfört med andra uppgiftskällor, där det finns en jämnare fördelning mellan kompetensaktiviteterna. Det finns en positiv korrelation mellan problemlösning och övriga kompetenser. Detta påvisar att när fokus läggs på procedurhantering utan problemlösning är risken stor att eleverna inte heller ges möjlighet att utveckla andra centrala kompetenser.

Kompetensaktiviteter I och II (tolka och använda) förekommer för varje kompetens inom cirka 30 procent av situationerna (utom procedurhantering som är högre). Detta kan ses som relativt omfattande. Samtidigt bör det noteras att det inte betyder att varje kompetens förekommer i 30 procent av

undervisningstiden, utan att tidsomfattningen för de analysenheter där kompetensen överhuvudtaget förekommer upptar cirka 30 procent av den lektionstid som analyserats. Det betyder att den faktiska tid som ägnas åt en viss kompetensaktivitet är lägre, men att analysmetodvalet inte gett möjlighet till en mer detaljerad analys. Kompetensaktivitet III (värdering) förekommer i anmärkningsvärt liten omfattning, särskilt inom den dominerande arbetsformen D. Även klassrumsdiskussioner *om* kompetensmålen förekommer påfallande lite under de observerade lektionerna.

Arbetsformen (A-D, se avsnitt Lektionsobservationer) påverkar inte (med några få undantag) särskilt starkt förekomsten av kompetensaktiviteter, de skillnader som finns är att kompetensaktiviteterna är mer omfattande i läroplaner för undervisning och mindre omfattande i arbete med läroboksuppgifter. Däremot finns det vissa skillnader mellan olika skolår, men inte heller ur den aspekten är det speciellt stora skillnader. En observation är att med ökad ålder på eleverna så minskar förekomsten av matematiska resonemang samtidigt som fokus på procedurhantering ökar.

Intervjuanalysen visar att lärarna sammantaget nämner många olika undervisningsupplägg, men analysen ger också få indikationer på att enskilda lärare utförligt har reflekterat över relationen mellan mål och undervisningsaktiviteter. Detta exemplifieras av att många lärare främst förefaller tolka kompetenserna i termer av aktiviteter snarare än som mål för elevernas lärande (mål som i sin tur kan styra klassrumsaktiviteterna). En sådan tolkning gör att kursplanens målstyrande budskap när det gäller kompetenserna riskerar att inte beaktas. Ett exempel är att en lärare kan anse att problemlösning är något man kan arbeta med i klassrummet för att eleverna ska ha roligt men inte explicit med målet att eleverna ska bli kompetenta problemlösare. Det finns även indikationer i materialet på att en del lärare förefaller kunna identifiera att elever utvecklar vissa kompetenser, dvs att de känner igen och kan karakterisera dessa typer av kunskap, men ändå inte ser dem som uttalade mål som skall/kan/bör styra undervisningen. Lärare som tycker det är lätt att arbeta med kompetensmål förefaller ofta ha assimilerat kursplanens kompetensbudskap (Gregoire 2003, se avsnittet bakgrund i denna rapport), dvs anpassat sig på ytan utan att ha tagit hänsyn till de grundläggande principerna som vi nämner i bakgrunden. Det finns också lärare som tycker att det är lätt eftersom kompetensmålen redan finns inbyggda i lärarens existerande mål och metoder. Detta kan också vara resultatet av assimilation, men även till begreppet filtrering som vi introducerar nedan. Vid filtreringen blir vissa kompetensmål avgränsade och omtolkade i termer av andra (för läraren viktiga) mål, vilket kan få konsekvensen att aspekter av kompetensmålen inte får genomslag i undervisningen.

Läroboken nämns av många lärare som ett viktigt stöd och på de flesta skolor väljs läroboken relativt fritt av lärarna efter diskussion mellan kollegorna. Kriterierna för valet varierar stort men de flesta innefattar ett visst urval av innehållsmål, uttolkade ur till exempel de nationella proven eller lokala eller nationella kursplaner. Kriterierna berör däremot sällan kompetensliknande mål. Lärarna uttalar sig i huvudsak positivt om sina elevers måloppfyllelse. När det gäller kompetensmålen menar de flesta lärare att de flesta elever når dem helt eller huvudsakligen. För flera lärare får dock uttalandet betraktas som osäkert med tanke på hur otydligt de relaterar till kompetenserna i intervjun som helhet. Trots att frågan om huruvida eleverna når målen eller ej är formulerad så att den relaterar till lärarens egna mål som vi just frågat om innan, beskriver en del lärare huruvida eleverna når mål att uppnå från kursplanen. Detta kan vara en indikation på att det finns ett starkt fokus på att eleverna når kursplanens Mål att uppnå men skulle också kunna förklaras av att lärarna har en otydlig syn på relationen mellan sina mål med undervisningen och målen för eleverna.

Sammantaget kan lärarnas fokusering på kursplanens mål att uppnå, tillsammans med det fokus på procedurhantering som finns i klassrumsaktiviteterna, tolkas som att den kompetens som eleverna ges största möjligheten att utveckla är hantering av procedurer för att lösa olika typer av relativt kända uppgifter. Detta kan också förstärkas av att lärarna inte ser kompetenserna som mål för undervisningen, något som också framkommer i och med att kompetensmålen nästan aldrig nämns eller diskuteras i klassrummet. Svaret på den första huvudfrågan blir då att undervisningen i stort ger eleverna begränsade möjligheter att utveckla fem av de sex kompetenserna.

Varför erbjuds eleverna denna undervisning?

För att kunna förstå varför undervisningen ser ut som den gör sammanfattas här resultat rörande lärarnas mål för elevernas lärande, om och i vilken utsträckning dessa mål innehåller kompetensrelaterade aspekter, men även hur lärarna och undervisningen påverkas av kursplanen (frågeområde 1) och till viss del de nationella matematikproven (frågeområde 2). Dessa båda frågeområden innehåller ett antal underfrågor (se avsnitt Frågeställningar ovan) som först besvaras.

1a. Vilka anser lärarna att lärandemålen är?

Kursplanen i matematik är ett kortfattat men ändå komplicerat dokument bestående av olika delar där målen för elevernas lärande uttrycks på olika sätt och med varierande tydlighet. Målen är också av olika karaktär, en del beskriver övergripande aspekter hos ämnet, en del beskriver vilket matematiskt innehåll

som elever i vissa skolor förväntas ha lärt sig, en del beskriver olika förhållnings-sätt till ämnet, till arbete med ämnet och till dess användning och historia som eleven förväntas utveckla. En del beskriver mål som rör generella kompetenser som behövs för att arbeta med ämnet, det som vi i denna rapport kallar kompetensmål. Sammantaget framträder alltså ett brett spektrum av olika typer av mål, där varje enskild måltyp dessutom innehåller en mängd olika mål.

Analysen visar att lärarna när de får en öppen fråga om vilka deras mål för elevernas lärande är ger mycket varierande svar både gällande innehåll och gällande hur tydligt de uttrycks. Sammantaget nämner lärarna många olika sorters mål men genomgående är deras enskilda beskrivningar begränsade jämfört med det spektrum av olika mål som uttrycks i kursplanen. I de flesta fall består detta intryck under hela intervjun, dvs även när lärarna bereds möjligheter att uppmärksamma typer av mål som de kanske inte nämnt från början. När det gäller de kompetensmål som är huvudfokus i denna studie finner vi att ungefär hälften av lärarna spontant nämner mål av kompetenstyp men bara ett fåtal lärare visar tydliga tecken på omfattande kunskap om kompetensernas innebörd och roll. De flesta lärarna nämner spontant endast ett fåtal av de olika kompetenserna, dvs de kompetenser som lärarna uttrycker täcker endast en mindre del av det totala kompetensbegreppet. Många lärare som visar begränsad kunskap om kompetensmålen, till exempel som beskrivningar av kunskaper som eleverna kan ha, förefaller ändå inte se dem som mål som kan styra undervisningen.

Det är vanligt att lärare genom hela intervjun använder sig av något som här ges benämningen *filtrering*. Detta karakteriseras av att läraren tolkar och beskriver olika mål, metoder och aktiviteter genom ett raster bestående av ett eller några få personliga grundmål och ibland kanske till och med undviker samtal om vissa mål genom att föra tillbaka frågan till ett eget *grundmål*. Sådana grundmål kan vara affektiva mål (tex trygghet, självförtroende), kompetensmål (tex problemlösning, kommunikation) eller någon annan typ av mål (tex att matematiken ska vara vardagsnära). Trots att dessa grundmål i allmänhet går att hitta i kursplanen är intrycket att lärarna ofta inte själva ser dessa som ett resultat av bearbetning av kursplanen, utan snarare ser det som att det är kursplanen som ligger i linje med deras grundmål. Denna filtrering är ett yttre (verbalt) tecken som kan observeras under intervjun och som kan ha ett antal möjliga konsekvenser, både positiva och negativa, när det gäller att förstå och använda kursplanens kompetensmål. En möjlig positiv konsekvens är att en lärare som har ett grundmål av kompetenstyp, kan mycket väl ha förstått den grundläggande idén med att ha kompetenser som mål och att man systematiskt kan arbeta för att eleverna ska nå dessa mål med hjälp av klassrumsaktiviteter. Denna grundläggande princip/idé kan vara till stor hjälp om och när dessa lärare vidgar sin syn på kompetenser och ska omvandla andra kompetensmål till handling i praktiken. Eftersom

många av de olika mål som lyfts fram i kursplanen på många olika sätt relaterar till varandra, så finns det också chans att en undervisning som är genomtänkt och väl genomförd med avseende på en viss kompetensaspekt (eller möjligtvis någon annan aspekt) faktiskt också ökar chansen för att eleverna ges möjlighet att utveckla andra kvaliteter. Filtreringen kan också vara tecken på ett tankesätt som kan få negativa konsekvenser för undervisningen. När ett visst mål tolkas utifrån lärarens grundmål, alltså filtreras, kan det hända att vissa aspekter av det målet går förlorade. En lärare som till exempel filtrerar resonemangskompetens genom sitt grundmål "att prata matematik" riskerar att se kommunikation och resonemang som mer eller mindre identiska och därmed missa poängen med resonemangskompetens som uttryckligen har med att argumentera och motivera att göra. Därför finns det risk att lärarens fokusering på sitt grundmål gör att arbetet med närliggande men inte sammanfallande mål begränsas. Dessutom finns det risk för att filtreringen gör att läraren inte stimuleras att bearbeta viktiga delar av kursplanen eftersom de upplevs vara i linje med de tankesätt som läraren redan har. Denna sista möjliga konsekvens relaterar till begreppet *ytlig assimilation* (Gregoire, 2003) som beskrivs i avsnittet bakgrund och visar att filtrering kan vara ett möjligt tecken på ytlig assimilation (även om det kan finnas andra tecken på sådan assimilation, liksom filtrering kan ske av andra skäl).

Slutsatsen av detta resonemang är att lärare som uppvisar starka tendenser till filtrering antagligen inte gjort en djup bearbetning av kursplanens budskap. Skälen till detta kan, enligt Gregoires modell, vara flera. Det kan bero på att budskapet initialt inte utmanat dessa lärare tillräckligt mycket, till exempel genom att verka "lättsmält" eller självklart, eller att lärarna helt enkelt inte trott på budskapet tillräckligt mycket. En annan möjlighet är att läraren har bedömt att olika ramfaktorer som tid eller egen förmåga inte räcker till för att motivera till den djupa bearbetning av budskapet som behövs för att läraren skall låta kursplanen på djupet ska kunna påverka lärarens inställning och praktik (Gregoire, 2003).

Nästan alla lärare menar att kompetensmålen (när de väl uttryckligen presenterats) är viktiga, men många lärare har svårt att precisera på vilket sätt de relaterar till deras egna mål. Ofta filtreras kompetensmålen genom lärarens grundmål, vilket enligt resonemanget ovan tyder på att kompetensmålen inte har bearbetats och inte påverkat lärarens praktik. Det finns dock flertalet fall när läraren, trots att läraren i intervjuens inledande delar inte har relaterat till kompetenser, efter genomgången av kompetenserna på ett tydligt och trovärdigt sätt kan relatera det som tidigare uttryckts i intervjun till kompetensbegreppet. Det förefaller som om kompetensbegreppet för dessa lärare blir ett språk som underlättar för dem när de skall tala om sin undervisning. Dessa lärare uttrycker sig ofta också positivt om kompetensmålen betraktat som en målstruktur. Det finns exempel på lärare som uttrycker sig tydligt om kompetensmålen, men menar att eleverna

först måste uppnå innehållsmålen innan de har möjlighet att utveckla kompetenser. Detta strider mot den andra grundläggande principen, att ha elevernas utvecklande av kompetenserna som ett mål som ska styra undervisningen (se avsnitt Mål och styrdokument ovan).

Ib. Hur tolkar lärarna budskapet i kursplanen?

Lärarnas tolkningar av kursplanen är mycket varierande, både gällande tydlighet och gällande innehåll. Lärarnas tolkningar av kompetensrelaterade nyckelord, till exempel *resonemang* och *problem*, varierar över ett stort spann av olika innebörder, och det finns dessutom en tendens hos många lärare att verbalt filtrera innehållet via sina egna mål. Några av lärarna visar tydligt att de är insatta i kursplanen och att de har kunskap om dess olika delar, till exempel genom att de kan relatera kursplanens olika delar till varandra. De flesta lärare visar dock stor osäkerhet när det gäller syftet med de olika delarna i kursplanen, deras roll i undervisningen och deras relation till varandra. Många lärare anser att kursplanen påverkar deras undervisning men kan inte precisera vad i dokumentet som påverkar och hur denna påverkan sker. Detta är problematiskt men samtidigt inte förvånande med tanke på kursplanens komplexitet och dess otydlighet, och en möjlighet är att situationen försvåras ytterligare av att lärarna fokuserar på vissa (och möjligen olika) aspekter eller delar av innehållet.

Sammantaget ger detta en stark indikation på att när det gäller kompetensmålen verkar kursplanen ha en svag eller obefintlig styrning/vägledning för lärare som grupp, även om det finns undantag. Detta även om de flesta lärare personligen anser sig påverkas av kursplanen.

Ic. Hur har lärarna arbetat för att tolka budskapet i kursplanen?

De flesta lärarna pekar ut hela, delar eller specifika aspekter av kursplanen som något de läser eller arbetar med, även om de flesta även nämner andra faktorer som de påverkas av i sin undervisning. Lärarna har olika uppfattningar om hur lätt eller svårt det är att arbeta med och tolka kursplanen. En stor grupp av lärarna, dock ej i majoritet, säger att kursplanen är svår att förstå. Dessa lärare anger att de endast i låg utsträckning känner sig säkra på vilken användning det är tänkt att de som lärare ska ha av det som står i olika delar av kursplanen, dessutom anger de att formuleringar i olika delar av kursplanen endast är förståeliga i liten utsträckning.

De lärare som i huvudsak vägleds av läroboken och i huvudsak använder kursplanen för att checka av att man tagit upp alla innehållsmål verkar ha mindre behov av att bearbeta kursplanens budskap och har i väsentligt avseende

inte förändrat sin syn på kursplanens budskap över tid. Den bearbetning av kompetensmålen i kursplanen som vissa lärare verkar ha genomfört har bestått av att de har läst dokumenten och sedan diskuterat med kollegor, till exempel vid konstruktion av lokala styrdokument, vid fortbildning eller vid vanligt kollegialt samarbete. Flera lärare som på detta sätt bearbetat målen verkar ha förskjutit fokus från innehållsmål mot kompetensmål och det finns indikationer på att dessa lärare har nått djupare insikter i kursplanernas kompetensmål än andra. Många av lärarna menar också att de inte har lagt ner tillräcklig tid på kursplanetolkning och hälften av lärarna tycker inte att de har fått tillräckligt med fortbildning om kursplanetolkning.

2. De nationella matematikprovns påverkan på lärarnas undervisning

Vilken kunskap lärarna bedömde att NP-uppgifterna mätte varierade mycket. De flesta lärarna pekade på innehållsmål men många nämnde dessutom olika kompetensrelaterade mål. Vissa lärare menade att NP-uppgifterna skiljer sig från läroböckernas uppgifter, till exempel genom att NP-uppgifter kräver mer eget tänkande, att de oftare är öppna eller att de testar flera mål samtidigt. Många lärare menar att de påverkas av de nationella proven och trots att intervju-situationen gav lärarna begränsade förutsättningar för djupare reflektioner kunde några dessutom specificera på vilket sätt. Denna påverkan gällde i många fall vilka innehållsmål som mäts i proven, men flera lärare konstaterade att de har påverkats av att de nationella proven mäter vissa kompetenser, till exempel att kommunikationskompetens mäts i den muntliga delen eller att resoneringskompetens mäts då eleverna måste förklara hur de har tänkt för att få poäng enligt bedömningsanvisningarna. Denna påverkan har i sin tur lett till att läraren låter eleverna träna motsvarande kompetenser i klassrummet.

Många lärare har menar att de nationella proven gör en något annorlunda tolkning av kursplanens mål än till exempel den lärobok de använder. NP-uppgifterna mäter dock många olika typer av mål och lärare som grupp verkar inte fokusera samma urval av dessa. Detta kan delvis vara kopplat till fenomenet filtrering (se ovan). Sammantaget indikerar resultaten att de nationella proven visserligen konkretiserar flera av kompetensmålen och att detta till viss del uppfattas av lärarna, men också att provens vägledande roll när det gäller kompetensmål inte förefaller särskilt stor. Man kan notera att påståendet "proven styr undervisning och lärande", vilket ofta ses som vedertaget, inte tycks gälla för kompetensmålen.

Summering

Sammantaget framkommer att i den undervisning som erbjuds varierar närvaron av kompetensrelaterade aktiviteter och därmed även elevernas möjligheter att utveckla motsvarande kompetenser. Denna variation kan delvis förklaras med att lärarna visar mycket varierande medvetenhet om kompetensmålen och kopplingen mellan kompetensmål och klassrumsaktiviteter. Kursplanen är ett komplext dokument och det tar tid och energi att förstå och bearbeta det budskap som förs fram. Konkreta uppdrag, till exempel i form av att konstruera lokala kursplaner eller omfattande fortbildning, och avsatt tid för att genomföra detta har gjort det möjligt att göra en sådan bearbetning för vissa lärare. Många lärare upplever dock inte att de har fått tillräckligt med tid och hjälp att utveckla tillräcklig kunskap om innebörden av formuleringar i kursplanen och om hur detta ska implementeras i undervisningen. Detta begränsar rimligen deras möjligheter till en målstyrning av undervisningen som bygger på medvetenhet och kunskap om både innehållsmål och kompetensmål.

Analyserna ger starka indikationer på att när det gäller kompetensmålen verkar kursplanen ha en svag eller obefintlig styrning/vägledning för lärare som grupp. Detta trots att de flesta lärare personligen anser sig påverkas av kursplanen. Många lärare har observerat att de nationella proven gör en något annorlunda tolkning av kursplanens mål än till exempel den lärobok de använder. NP-uppgifterna mäter dock många olika typer av mål och lärare som grupp verkar inte fokusera samma urval av dessa. Detta kan delvis vara kopplat till begreppet filtrering. Sammantaget indikerar detta att de nationella proven visserligen konkretiserar flera av kompetensmålen och att detta till viss del uppfattas av lärarna, men också att provens vägledande roll när det gäller kompetensmål inte har slagit igenom fullt ut.

Trots att lärarna sällan uttryckligen betonar ett samband mellan klassrumsaktiviteter och lärandemål arbetar de på flera sätt med kompetensrelaterade aktiviteter i klassrummet. Detta kan vara en indikation på att lärarna kan och vill arbeta med kompetensaktiviteter, men att de inte får tillräckligt med resurser (i form av tid, kompetensutveckling och vägledning genom styrdokument) för att genomföra detta arbete målmedvetet och genomgående.

Diskussion

Detta avsnitt behandlar resultatens implikationer i förhållande till styrdokument, lärarutbildning och fortbildning, läromedel samt undervisning. Även behov av fortsatt inspektion/utvärdering och fortsatt forskning tas upp.

Implikationer

Som vi argumenterat för i avsnittet "Mål och styrdokument" så kan strävan att hjälpa elever att utveckla sina matematiska kompetenser ses som ett av matematikutbildningens viktigaste mål. Det är dessutom en typ av lärandemål som framför allt internationellt, men även nationellt, på många sätt anses vara allt viktigare som en vägledning för utvecklingen av matematikundervisningen. Kompetensmålets vikt är inte en fråga för denna studie, utan en i den internationella forskningslitteraturen förankrad utgångspunkt vars relevans inte kommer att diskuteras här. Med den utgångspunkten, och med kunskapen från internationell forskning att det inte är trivialt att organisera undervisning som erbjuder elever goda möjligheter att utveckla kompetenserna, är en grundläggande fråga för utvecklingen av svensk matematikutbildning om undervisningen redan idag är ändamålsenlig eller ej. Framför allt eftersom det påverkar riktningen för pågående och framtida utvecklingsbehov. Denna fråga är särskilt viktigt inom ett område som är så stort som undervisning. Samtidigt är undervisningsområdet i huvudsak påverkat av mer eller mindre välgrundade åsikter, jämfört med tex sjukvården vars behandlingsmetoder och många vägval påverkas av mer systematiska och vetenskapliga insikter. Denna studies ambition är att bidra till kunskapsutvecklingen beträffande svårigheter och möjligheter att implementera matematikutbildningens kompetensmål.

Studien visar att i stora drag (men med flera undantag och med viss variation) så är undervisningen otillräcklig när det gäller möjligheterna för eleverna att utveckla centrala matematiska kompetenser, utöver procedurhantering. Man kan tänka sig att inte ens procedurhanteringen utvecklas väl, eftersom alltför begränsad matematisk förståelse (som skulle kunna nåts via tex grundläggande resonemang, representationer och samband) utvecklas, vilket leder till att procedurerna lärs i huvudsak utantill. En potentiell implikation skulle kunna vara att det är någon form av fel på utbildningssystemet. En annat skulle kunna vara att utbildningssystemet fungerar så bra som man rimligen kan förvänta utifrån rådande förutsättningar, men att det finns en stor utvecklingspotential. Det ligger inte inom denna studies räckvidd att på ett systematiskt sätt klargöra hur det faktiskt förhåller sig, men några få reflektioner kring implikationer för

styrdokument, läromedel, lärarutbildning, prov och bedömning samt undervisning vill vi ändå ge.

Implikationer för styrdokument

Lärarna anser att kursplanen är viktig och att den påverkar dem och deras undervisning. Samtidigt så verkar lärarna i praktiken inte tagit så stort intryck av kompetensmålen som representerar några av kursplanens mer komplexa lärandemål. Det finns flera möjliga skäl till varför många lärare upplever att de inte har tillräcklig kunskap om kursplanerna. Ett skäl till att många inte upplever sig ha förstått dem kan vara att de är skrivna på ett sätt som är svårt att förstå och att den information som finns om de olika delarna inte är tillräcklig för att tydliggöra de olika delarnas tänkta användningsområde i den praktiska vardagen.

En möjlighet är alltså att kursplanen inte fungerar som vägledning och styrning vad gäller kompetensmålen vilket i sin tur kan bero på att kursplanen inte lyckas kommunicera dessa mål, dvs att den inte är tillräckligt tydlig. En indikation på detta är att lärarnas tolkningar av kursplanen är oftast både vaga och sinsemellan klart olika. Man kan även notera att det som de svenska styrdokumenterna (utan förklaringar och definitioner) försöker kommunicera på ett par sidor, ges mångdubbelt utrymme (flera hundra sidor) i de internationella ramverk som hänvisas till i avsnittet "Mål och styrdokument". Det senare indikerar att kompetensmålsbudskapet är såpass komplicerat att det kräver tydligare beskrivningar för att kunna kommuniceras. En implikation blir då att kursplanerna måste förtydligas med avseende på både hur enskilda delar är formulerade och hur olika delar av kursplanen hänger ihop och kan användas. Antagligen måste den också kompletteras med exempel, tex i form av omfattande kommentarmaterial där också handledning för tolkning kan ingå. En potentiell invändning mot ovanstående resonemang är att de sex kompetensmålen ovan inte är centrala kompetensmål och inte borde fokuseras i kursplanen eller i undervisningen. Men, förutom den argumentation för kompetensmålen relevans som finns i "Mål och styrdokument" så anser alla intervjuade lärare att de kompetensmål som presenterades i denna studie är bra beskrivningar av centrala mål.

Implikationer för lärarutbildning

Studien indikerar att en av orsakerna till att kompetensmålen inte fått mer genomslag i undervisningen är att många lärare inte har, och inte upplever sig ha, tillräcklig utbildning för att tolka och implementera denna typ av mål. Det finns några få exempel på lärare som erhållit omfattande fortbildning och därmed givits grund för att utveckla en djupare kompetensmålskunskap. Lärarutbildning

och fortbildning är särskilt relevant i ljuset av att kompetensmålen är komplicerade att implementera särskilt när kursplanerna inte ger tillräcklig vägledning. Dessutom finns indikationer på att kombinationen av målstyrd lärarfortbildning och en aktiv kollegial diskussion i lärarkollegiet kan leda till konstruktivt utvecklingsarbete.

Implikationer för läromedel

Studien visar att det är stor skillnad mellan matematikläroböckerna och övriga läromedel som används i klassrummet beträffande tillfällen till kompetensrelaterade aktiviteter för eleverna. Läroböckerna är skevt fokuserade på procedurhantering och inbjuder sällan till andra kompetensaktiviteter, vilket får ses som allvarligt då elevers arbete med läroboksuppgifter är omfattande. Det verkar rimligt att de dominerande procedurhanteringsuppgifterna i läromedlen i större utsträckning borde kompletteras med (inte nödvändigtvis ersättas av) andra uppgifter som ger eleverna bättre möjligheter att utveckla även andra kompetenser. En central fråga för utvecklingen av matematikutbildningen är varför inte läroböckerna kan tillhandahålla rikare matematikuppgifter när andra uppgiftskällor, t.ex. de lösblad med uppgifter som lärarna ibland använder, gör det? Det skulle kunna vara så att problemet inte beror på att undervisningen är läromedelsbunden, vilket ofta framförs, utan på att läromedlen i sig inte är bra ur kompetensmålsperspektiv. Kritiken mot matematikutbildningens läromedelsbundenhet framförs ofta i debatten, men det klargörs sällan vad denna egentligen består av beträffande vad eleverna faktiskt gör när de löser uppgifter. Dessutom finns nästan inga mer systematiska studier av denna typ som presenteras här.

Implikationer för undervisning

Den grundläggande implikationen är att eleverna bör erbjudas mer omfattande, bättre utvecklade och mer systematiska möjligheter att engagera sig i kompetensrelaterade aktiviteter som går utöver procedurhantering. Det verkar dock inte finnas någon enkel väg till detta, och förmodligen är det flera samverkande satsningar som måste till. För det första måste målen klargöras, utan vägledning är inte möjligt att fokusera utvecklingen. För det andra, om läroböckerna ska fortsätta att i så stor del styra undervisningen så måste även de utvecklas. Alternativet är att komplettera läroböckerna med andra läromedel. Men det räcker rimligen inte med att läromedlen är "alternativa" i någon otydlig mening, det bör finnas en tydligare koppling mellan mål och metoder än vad som framgår att lärarna i studien har.

Man kan även notera att kompetensaktiviteterna är mer omfattande i den lärarledda undervisningen än i vissa andra arbetsformer, särskilt jämfört med arbete med läroboksuppgifter. Det kan ses som ett argument mot det som kan kallas en trivialiserad individualisering: att eleverna hela lektionerna arbetar enskilt eller i smågrupper med läroboken. För övrigt är en slutsats att vilken arbetsform som väljs inte (med några få undantag) särskilt starkt påverkar förekomsten av kompetensaktiviteter. Det ska dock inte ses som ett argument mot varierande arbetsformer, snarare som att valet av en viss arbetsform (sett på en övergripande nivå) inte garanterar närvaro eller frånvaro av kompetensaktiviteter. En mer detaljerad analys skulle kunna ge information om det finns urskiljande samband mellan kompetensaktiviteter och det sätt en arbetsform genomförs.

Kompetensaktivitet III (värdering) förekommer i anmärkningsvärt liten omfattning, särskilt inom den dominerande arbetsformen där elever arbetar enskilt eller i smågrupp med uppgiftslösning. Det förekommer även anmärkningsvärt lite explicita diskussioner i klassrummet om kompetensmålen: vilka de är, varför de är centrala och hur man kan arbeta för att nå dem. Det är i och för sig inte oväntat, men samtidigt är dessa centrala aktiviteter som bör ges betydligt större utrymme.

Fortsatt forskning och avslutning

En relativt omfattande och komplex studie av det slag som vi redovisat här öppnar givetvis upp för många nya frågor. En del av dessa berör sådant som finns i våra data men inte analyserats och en del berör frågor som kräver nya undersökningar och analyser.

Under grundantagandet att strävan att hjälpa eleverna att utveckla sin matematiska kompetens är ett av matematikutbildningens viktigaste mål så följer det av denna rapport att det skulle behövas fortsatt forskning för att ta reda på vilka mekanismer som styr de olika stegen mellan styrdokumentens intentioner när det gäller kompetensmål och lärarnas undervisning. Denna studie har främst undersökt hur vissa intentioner i styrdokumentet relaterar till lärarnas syn på sin undervisning respektive den undervisning som faktiskt bedrivs.

Denna studie bygger på data från en enkät, från klassrumsobservationer och från en intervju. Resultat från de tre delarna relateras till varandra och slutsatser dras utifrån den helhetsbild som framträder. Men ännu har inte motsvarande relationer undersökts i detalj *per lärare*. Analyser av hur enskilda lärares svar på frågor i enkäten relaterar till deras intervjusvar och till resultaten från klassrumsstudierna skulle kunna kasta mer ljus över på vilket sätt lärarna förstår sin egen undervisningspraktik i relation till styrdokumentet och speciellt de kompetensmål som framträder där. En specifik fråga att undersöka vidare är

varför vissa lärare som till en början i intervjun endast visar sporadisk kunskap om kompetenserna, men efter det att kompetenserna presenterats direkt kan använda dem för att förklara olika aspekter i sin undervisningspraktik som tidigare beskrivits i vaga termer. För dessa lärare förefaller introduktionen av kompetensbegreppet snarast reducera den komplexitet som matematikkunskandet innebär, medan andra lärare verkar uppfatta att kompetensbegreppet tillför en ny komplex dimension att ta hänsyn till. En hypotes är att lärare som har ett *matematiskt sätt* att arbeta i klassrummet, har en förförståelse för vad matematiskt arbete innebär som underlättar förståelse av de olika kompetenserna.

Men den kanske viktigaste frågan är vilken hjälp de lärare som ännu inte förefaller följa kursplanens intentioner skulle behöva för att göra detta. Resultat från denna studie tillsammans med Gregoires (2003) modell och generella resultat från motivationsforskning visar att det antagligen behövs olika åtgärder för olika lärare. Kursplaner formulerade på olika sätt och olika typer av stimulans i form av tid, kompetensutveckling eller studier av kursplanen under sakkunnig ledning kan vara några sådana åtgärder. Försök, där olika sådana åtgärder genomförs och lärarnas reaktioner studeras med liknande metoder som använts i denna studie skulle kunna ge viktig sådan information.

En konsekvens av denna studies fokus är att vi främst belyser olika problem och brister, men som avslutning av denna rapport vill vi lyfta fram att vi främst mött kvalificerade lärare som är bekymrade över problem med elevernas måluppfyllelse och motivation, och som arbetar ambitiöst och engagerat för att på olika hitta lösningar på dessa problem. En förhoppning är att de resultat vi redovisar i förlängningen på något sätt kan hjälpa till att rikta all denna positiva energi så den på bästa sätt kommer elevernas matematiklärande till godo.

Referenser

- Bergqvist, E. (2006). *Mathematics and mathematics education: two sides of the same coin: some results on positive currents related to polynomial convexity and creative reasoning in university exams in mathematics*. Department of mathematics and mathematical statistics, Umeå universitet.
- Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. Department of mathematics and mathematical statistics, Umeå universitet.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik, Avdelningen för matematik, Göteborgs universitet.
- Gregoire, M. (2003). Is it a challenge or a threat? A dual-process model of teachers "cognition and appraisal processes during conceptual change. *Educational Psychology Review*, 15(2), 147–179.
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. I J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter & National Council of Teachers of Mathematics. (red), *A research companion to Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kilpatrick, J., Martin, W. G., Schifter, D. & National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *A research companion to Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & Mathematics learning study committee center for education division of behavioral and social sciences and education (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165–190.
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 405–427.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.
- Lundgren, U. P. (1999). Ramfaktorteori och praktisk utbildningsplanering. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 4(1), 31–41.

- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., International association for the development of educational achievement & trends in international mathematics and science study (2005). *IEA's TIMSS 2003 international report on achievement in the mathematics cognitive domains: findings from a developmental project*. Chestnut Hill: TIMSS & PIRLS International study center, Lynch school of education, Boston college.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J. m fl (2003). *TIMSS Assessment frameworks and specifications 2003*. Boston: International study center, Lynch school of education, Boston college.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*: Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematic*, 40(1), 1–24.
- Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. Paper presented at the Third mediterranean conference on mathematics education.
- Niss, M. (2004). The Danish "KOM" project and possible consequences for teacher education. I R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm & O. Helenius (red), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education: preparation of mathematics teachers for the future*. Stockholm: Kungl. Vetenskapsakademien.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr 18-2002). Köpenhamn: Undervisningsministeriets forlag.
- Nämnnaren (1991). Internationella seminarierien i matematikdidaktik. *Nämnnaren*, 18(3–4), 24–25.
- OECD (1999). *Measuring student knowledge and skills: a new framework for assessment*. Paris: Organisation for economic co-operation and development.
- Palm, T., Boesen, J. & Lithner, J. (2006). The requirements of mathematical reasoning in upper secondary level assessments. I J. Boesen (red.), *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact* (s 55–80). Department of mathematics and mathematical statistics, Umeå universitet.
- Palm, T., Eriksson, I., Bergqvist, E., Hellström, T. & Häggström, C.-M. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasie matematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*. Enheten för pedagogiska mätningar Umeå universitet.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press.
- Robitaille, D. F. & Garden, R. A. (1989). *The IEA study of mathematics 2: Contexts and outcomes of school mathematics*. Oxford: Pergamon Press.

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.
- Skolverket (2000). *Naturvetenskapsprogrammet. Programmål, kursplaner, betygskriterier och kommentarer* (2000:14). Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik Nationella kvalitetsgranskningar 2001–2002*. Stockholm: Statens skolverk.
- Weiss, I. R., Knapp, M. S., Hollweg, K. S. & Burril, G. (2001). *Investigating the influence of standards: a framework for research in mathematics, science, and technology education*. Washington, DC: National Academy Press.
- Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 97–129.
- Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik: studier av styrdokument och klassrumsverksamhet i matematik- och teknikundervisningen*. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.