Matematiken – var finns den?

Ola Helenius & Lars Mouwitz

Nationellt centrum för matematikutbildning

GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Layout: Anders Wallby

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 Göteborg

Beställning:
Fax: 031 786 22 00
e-post: bestallning@ncm.gu.se
webb: ncm.gu.se/bestallning

ISBN: 978-91-85143-15-3
Upplaga: 1:1
Tryck: Livréna AB, Göteborg, 2009

Innehåll

Förord

I föreliggande text närmar vi oss den djupa filosofiska frågan om de matematiska objektens natur och förhållande till den empiriska verkligheten. Denna frågeställning har fått ny aktualitet och är nu inte enbart en forskningsfråga för filosofer. Tvärtom har frågeställningen fått en alltmer tvärvetenskaplig karaktär och engagerar många vitt skilda forskningsområden. Vi har i denna lilla skrift inga anspråk på att vara heltäckande, men vi vill ge några typiska exempel på hur den ovan nämnda forskningsfrågan problematiseras och belyses ur olika perspektiv. Fokus i vår framställning är alltså i första hand den *ontologiska* frågan om de matematiska objektens natur: Finns de matematiska objekten, och i så fall hur?

Denna översikt är framtagen av Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) vid Göteborgs universitet med stöd av Myndigheten för skolutveckling (MSU:Dnr:2007:478).

Att läsa denna text

Eftersom vi i denna text gör nedslag i många olika områden, beskriver en stor mängd olika filosofiska strömningar och andra perspektiv på matematik och matematikanvändning finns det ganska många lösa trådar i texten. Ett möjligt sätt att närma sig texten är att börja med att läsa det sista avsnittet *Diskussion och avslutning*. Där knyts många trådar ihop och vi gör också vissa försök att koppla de frågor vi undersökt till frågor om lärande och undervisning i matematik.

Avgränsningar

Det finns också en livaktig och omfattande språkfilosofisk och lingvistisk forskning kring matematik och matematiklärande som vi inte beaktar i denna översikt. Vi har inte heller inkluderat olika karakteriseringar av vad det innebär att arbeta matematiskt, t ex i termer av matematiska kompetenser eller hur olika syn på matematikens natur påverkar och påverkas av undervisningen. Slutligen går vi inte heller in på frågan om vad som egentligen skall karakteriseras som matematiskt arbete när det gäller en viss individ (som t ex utför en specifik handling inom ramen för sitt yrke). Alla dessa områden är intressanta, men kräver särskilda översikter enligt vår bedömning.

Det perspektiv vi har valt handlar inte heller om hur man bäst lär sig matematik, utan om matematiken själv. Även om vissa frågor tangerar de didaktiska så har vi inte ambitionen att belysa frågan ur ett didaktiskt perspektiv.

Den övervägande delen av diskussionen runt matematikens filosofi förs snarare i böcker än i referee-granskade tidskrifter. Detta gäller speciellt de författare som har ambitioner att ta ett mer holistiskt perspektiv och beskriva en sammanhängande teori. De flesta av de centrala referenserna i denna översikt är välkända för den som har viss inblick i den moderna debatten om matematikens natur. I många fall förs dock debatten parallellt, men något mer snuttifierat, även i vetenskapliga tidskrifter och i sådana fall har vi även uppmärksammat några sådana referenser.

Göteborg den 15 september 2009

Ola Helenius och Lars Mouwitz

Introduktion

Vi inleder denna text med en motivbild till de frågor vi kommer behandla. Först beskrivs kort vilka vetenskapsområden som berörs. Därefter betraktar vi kursplaner från några olika länder för att se hur matematikens natur framställs i skolsammanhang. Avsnittet avslutas med att vi ur såväl ett matematikdidaktiskt som ett filosofiskt perspektiv presenterar de centrala frågeställningar som genomsyrar översikten som helhet.

Vad är matematik?

De senaste decennierna har en livaktig diskussion förts vad gäller frågan om vad matematik egentligen är för något. Denna diskussion har inte enbart förts mellan filosofer utan har aktiverat också matematiker, matematikdidaktiker, kognitionsvetare, psykologer, sociologer, språkforskare, idéhistoriker och andra humanister. De grundläggande frågeställningarna är således ofta tvärvetenskapliga och är även sammanlänkade med frågor kring matematiklärande, matematikutbildning och utformning av läroplaner och kursplaner i matematik på olika utbildningsnivåer. I föreliggande text har vi lagt fokus på ett urval av sådana grundläggande filosofiska frågor, men med utblickar mot andra vetenskaper, utbildningsverksamhet och matematikens roll i samhället. Syftet är att problematisera och skapa nyfikenhet kring frågor om matematikämnets natur och förhoppningen är att lärare och andra intresserade som läser texten inspireras att fundera på hur de själva ser på matematiken och vilken bild av ämnet de mer eller mindre medvetet förmedlar.

Matematikens natur – en internationell kursplaneutblick

Eftersom läroplaner och kursplaner är de dokument som ytterst styr vad lärare skall undervisa om finner många länders utbildningsansvariga det nödvändigt att inkludera en beskrivning av vad matematik är i kursplanerna. En sådan beskrivning finns till exempel i våra svenska kursplaner för matematik, (se t ex Ämnets karaktär och uppbyggnad, Skolverket 2000). De huvuddrag som där framträder handlar om matematikens abstrakta karaktär, problemlösningens centrala roll vid matematiskt arbete och om karaktären hos den process där matematik används för att beskriva och analysera diverse utommatematiska fenomen. Den sista punkten som kan sägas handla om matematikens användbarhet, skrivs fram även i andra länders kursplaner som vi studerat, men på lite olika sätt. I till exempel Nya Zeeland och Kina (grundskola och gymnasieskola) poängteras matematiken som en teori respektive en process för att analysera (vissa aspekter av) världen (New Zealand Ministry of education, 2007; Ministry of education of People's republic of China, 2004a, 2004b). Man kan säga att det är en relation mellan matematiken och världen som beskrivs.

I Storbritanniens kursplan å andra sidan, koncentrerar man sig istället på matematikens användbarhet utifrån individens perspektiv och skriver t ex att *Matematik utrustar människor med unika kraftfulla sätt för att beskriva, analysera och förändra världen och* [...] *tillhandahåller verktyg för att förstå naturvetenskap, ingenjörskonst, teknologi och ekonomi* (Qualifications and curriculum development agency, 2007, vår övers). I Singapore går man ett steg längre på denna skala och beskriver att matematiken inte bara tillhandahåller för individen användbara verktyg utan också att matematik är ett *utmärkt verktyg för att utveckla och förbättra en persons intellektuella kompetens i logiskt resonerande, rumslig visualisering, analys och abstrakt tänkande* (Ministry of education, Singapore, 2006, vår övers). Motsvarande skrivning finns också i kursplanen för htx-inriktningen i den danska gymnasieskolan (Undervisningsministeriet, 2008). Även i Kinas kursplan för gymnasieskolan lyfter man detta i skrivningen: *Matematiken är unik och har en outbytbar roll i formerandet av mänskligt resonerande och fostrar utvecklingen av den mänskliga intelligensen* (Ministry of education of People's republic of China, 2004b, vår övers). Med andra ord framhäver dessa kursplaner matematikens formalbildande roll, ett perspektiv som idag inte alls lyfts i de svenska kursplanerna, i alla fall inte explicit. Redan i olika länders kursplaner i matematik kan man således se att beskrivningar av vad matematik egentligen är kan variera betydligt.

Matematikämnets lobbyister

Matematikämnet så som det beskrivs vad gäller mål och syfte i skolans kursplaner är alltså inte fritt från värderingar, kulturella faktorer och politiska ideologier. Den beror på ett långt ifrån självklart urval från akademisk matematik, men ämnet innehåller också moment som inte direkt har motsvarigheter i den akademiska matematiken, t ex frågor om rumsuppfattning, tidsuppfattning och det som i skolan förr kallades ”Räkning”.

Filosofen och matematikdidaktikern Paul Ernest påpekar i *Why teach mathematics?* (2000) från antologin *Why learn mathematics* att olika lobbygrupper mer eller mindre medvetet utövar påtryckningar när det gäller hur matematikämnets mål och syfte ska beskrivas. För Storbritanniens del tycker sig Ernest kunna urskilja följande grupper, de flesta troligen också relevanta för svenska förhållanden:

1. Industrial trainers: den radikala högern och konservativa politiker. Syftet med matematik anges som att uppnå basala matematiska färdigheter i sociala sammanhang. Fokus ligger på auktoritär undervisning för att eleven ska uppnå ”basic skills”.
2. Technological pragmatists: den teknologiska storföretagsamheten och storfinansen. Fokus ligger på att lösa praktiska problem inom industrisektorn med hjälp av matematik och informationsteknologi.
3. Old humanists: konservativa matematiker som slår vakt om matematikens renhet och värdet av rigorösa bevis. Fokus ligger på att utveckla avancerad matematisk förståelse och kompetens och en känsla för matematikens egenvärde.
4. Progressive educators: professionella liberala och progressiva pedagoger och utbildare som stöder tanken på social välfärd. Fokus ligger på att eleven ska uppnå självförtroende, kreativitet och självförtroende via matematik för att höja sin livskvalitet.
5. Public educators: socialister och radikala reformivrare för ökad rättvisa och jämlikhet. Fokus ligger på att stärka eleverna som kritiska och matematiskt kompetenta samhällsmedborgare.

I alla dessa lobbygrupper förekommer idéer om matematikens natur, ibland avgörande för hur man vill att skolämnet matematik skall utformas och hur undervisning och lärande bör gå till. En mängd föreställningar om ämnet är således i omlopp, såväl bland politiker som bland andra makthavare, skolfolk och allmänheten i övrigt. Många ser upp till ämnet med en skräckblandad fascination, andra är blockerade och kanske bittra. Men de flesta anser att det på något sätt är ”nyttigt”. Men vad vet vi egentligen om ämnets karaktär, hur kan matematiken till exempel handla om något annat än sig själv?

Några frågor om matematiken

Matematiken består av abstrakta generella teorier, vad kan ett sådant ämne ha för relevans till vår värld i övrigt, som ju är konkret och till synes unik och speciell i varje situation? I boken *Matematikken og verden* (2001) skriver matematikdidaktikern Mogens Niss följande om denna fråga:

> *Matematiken ses i denna bok som ett ämne som utvecklas och utövas av människor, som inte är annorlunda än folk är mest. Ett ämne som rymmer mångfaldiga förbindelser med världen, ända från det dagliga livet i samhället till de högsta och djupaste kunskapsteoretiska frågorna.* (vår översättning, s 8)

Därefter ställer Niss ett antal frågor kring vad matematiken är, kan och gör. Dessa frågor är i hög grad filosofiska men har i sin förlängning stor betydelse för hur man ser på matematikens ställning som ämne för utbildning och undervisning. De frågor som direkt anknyter till vårt filosofiska tema kan sammanfattas som följer:

1. Hur kommer det sig att man genom undersökningar av helt teoretiska, abstrakta och till synes världsfrånvända objekt, fenomen och strukturer kan skapa påståenden och modeller om den verkliga världen, vilka kan verifieras empiriskt som tillräckligt korrekta? *Hur kan matematiken handla om något annat än sig själv?*

2. Är de matematiska objekten uppfunna eller upptäckta? Ofta kan man inte ens tala om de matematiska begreppen med vardagsspråk. Begreppen verkar införas, eller konstrueras, vanligen av matematiker, som om de hittat på dem själva. Är det då tal om rena tankeprodukter? *I vilken mening kan de matematiska begreppen sägas existera?*

3. Vad menas med sanning i matematiken? Skiljer den sig från andra sanningar? Hur når man fram till matematisk sanning? Vad är ett matematiskt bevis och bevisföring, har det förbindelse med empirisk erfarenhet och experiment? *Vad innebär "sanning" i matematiken, och hur når man dit?*

4. Vad är det för slags frågor matematikerna försöker svara på, och vilka slags svar kan de leverera? Är det något gemensamt med dessa frågor och svar som skiljer sig från andra ämnen? *Finns det ett slags frågeställningar och svar som är typiskt för just matematik?*

5. Varför använder matematiken ett så säreget formel- och symbolspråk? Vilken roll har språket, är det stenografiska förkortningar, eller något mer djupliggande? Varför inte uttrycka matematiken med vårt vardagliga språk? *Vilken roll spelar det matematiska symbolspråket för matematiken?*

6. Hur kan det vara att forska i matematik i våra dagar, vet man inte redan det man behöver veta? Hur kan det uppstå ny matematik? Vad har en forskande matematiker för sig? Och varifrån kommer forskningsproblemen? *Hur är det möjligt att forska i matematik?*

7. Hur utvecklar matematiken sig över tid? Vilka drivkrafter och mekanismer formar denna utveckling? Spelar samhälleliga och kulturella förhållanden någon roll? Blir då själva matematiken avhängig av samhälle, tid och plats? Är gammal matematik också föråldrad matematik? *Hur beror matematikens utveckling av samhälle, kultur och tid?*

Dessa frågor har diskuterat under århundraden inom den klassiska matematikfilosofin. Som vi nämnde inledningsvis finns det dock också en hel del modern diskussion om dessa frågor. Paul Ernest (1998) menar att matematikfilosofin har varit alltför upptagen med att försöka finna matematikens grunder – ett projekt som både är mycket svårt och också för smalt för att kunna ge en filosofisk bild av matematiken. Ernest föreslår istället följande punkter för en framtida matematikfilosofi:

– matematisk kunskap: vilken natur den har, hur den fastställs, vilket ursprung den har,

– matematikens objekt: vilken natur de har och vilket ursprung,

– matematikens tillämpningar: dess grad av effektivitet i naturvetenskap, teknologi och andra områden,

– matematisk praktik: matematikernas aktiviteter, både nuvarande och i ett historiskt perspektiv.

De traditionella skolan vad gäller matematikens grunder har inte bara misslyckats med att nå sitt eget uppställda mål, menar Ernest, denna skola har också på ett olyckligt sätt begränsat den filosofiska diskussionen till att gälla matematikens förmodade logiska grunder.

I vad som följer kommer vi beröra några av Mogens Niss frågor ovan, framförallt med fokus på fråga 1, fråga 2 och fråga 3. Vi kommer kort redogöra för den klassiska matematikfilosofins huvudströmningar. Därefter granskar vi några mer moderna betraktelser av matematikens natur och vidgar diskussionen i riktning mot Ernest punkter ovan.

Matematikens filosofi

I de flesta filosofihistoriska verk av betydelse uppmärksammas matematikens särpräglade relation till filosofin. Det pythagoreiska sällskapets matematiska framgångar hade till exempel stort inflytande på Platons filosofi och utvecklandet av idéläran, och under tidig kristendom tjänade de matematiska sanningarna som exempel på evighetens möjlighet för kyrkofadern Augustinus (se till exempel Nordin, 1995). Det kan därför vara av intresse att ge en översiktlig historisk framställning av relationen mellan matematik och filosofi och hur de påverkat varann.

Antiken

Den västerländska matematiken har sina rötter i antikens Grekland, och Pythagoras och hans skola brukar ofta beskrivas som en startpunkt. Det är emellertid klart att den grekiska matematikkulturen i hög grad påverkats av såväl babylonsk, indisk som egyptisk matematik. I boken *The Crest of the peacock: Non-european roots of mathematics* av George Gheverghese Joseph (1991) finns en mer rättvisande bild av matematikens historiska källor. I denna bok framgår också att den axiomatiserade matematik som kom till uttryck i Euklides *Elementa* inte har någon motsvarighet i andra kulturer, där den avancerade matematiken betraktades mer som en konstfärdighet utövad av mästare. Dessa kulturella skillnader kan man se även i vår tid. Det självlärda indiska matematikgeniet Ramanujan bevisade till exempel aldrig sina satser. I den västerländska traditionen brukar pythagoréernas valspråk ”Allt är tal” framställas som ett 2500 år gammalt forskningsprogram som fortfarande håller på att förverkligas, dvs tanken att verkligheten i själva verket består av (skall beskrivas som) matematik. Samma tanke finns t ex hos Galilei tvåtusen år senare då han uttrycker att ”Naturens bok” är skriven med matematikens språk och som vi kommer att se finns motsvarande tankar även idag.

Platon, en av antikens två filosofiska giganter, utformade sin idélära inspirerad av pythagoreerna och han såg matematiken som ett förebildligt exempel på hur man kunde finna eviga sanningar som också hade sina motsvarigheter i vår komplexa materiella värld. Enligt Platon finns en parallell värld av eviga och perfekta idéer och vår värld var snarast en ofullständig kopia av denna. Vill man söka exakt och bestående kunskap skall man med tankens kraft söka sig till idéernas värld, inte förlora sig i den värld man kan uppfatta med sina fem sinnen. I en av Platons mer fantasifulla dialoger beskriver han hur en skapare, Demiurgen, framskapar den materiella världen som en krukmakare, där de matematiska idéerna är de ”ritningar” som skaparen utgår från. Även i det kristna tänkandet har ofta matematik uppfattats som given av Gud eller som ett uttryck för Guds tänkande och att vår värld såsom skapad av Gud lydde matematiska lagar blev en yttersta garant för kunskapssökande verksamhet.

Aristoteles, den andre filosofiske giganten från antiken och Platons lärjunge, hade ett mer empiriskt perspektiv på hur man får kunskap. Kunskap utvinner man ur vår materiella värld genom att *abstrahera*, att extrahera tingens mest väsentliga egenskaper genom att studera många konkreta exempel. Även matematiken betraktades som abstraktioner av tingens konkreta egenskaper. För att organisera kunskapen krävdes enligt Aristoteles någon form av verktyg för tänkandet och Aristoteles utvecklade därför en systematisk logik i sin bok O*rganon* (Verktyget). Däri ingick bland annat föreskrifter för hur man ska definiera (samma används för övrigt än idag i ordböcker) samt hur vetenskapliga teorier ska konstrueras logiskt, med hjälp av *axiom* och *teorem* härledda från axiomen. Om axiomen var sanna, så skulle även teoremen vara sanna, och det blev på detta sätt möjligt att producera ny kunskap genom logisk härledning. Underförstått finns tanken att världen ytterst har en logisk struktur. Euklides *Elementa* är i hög grad inspirerad av denna Aristoteles´ vetenskapslära.

Under antiken verkade även andra filosofer, framförallt de så kallade *sofisterna* som motsatte sig idén att det fanns en objektiv kunskap. Istället betonade man att begrepp som mening och sanning i hög grad var beroende av kultur och samhälle, och att kunskapen var personlig och därmed subjektiv. Emellertid kom först Platon och sedan Aristoteles att bli den kristna kyrkans accepterade filosofer, så den sofistiska filosofin fanns kvar endast som en mer eller mindre subversiv underström i västerlandets tänkande under medeltiden och även under renässans och upplysning. Först i vår tid har den fått genomslag bland annat genom den hermeneutiska filosofin, lingvistiken och den så kallade postmodernismen.

Redan hos Platon, Aritoteles och sofisterna kan vi urskilja några olika tankemönster: Matematiska sanningar är oberoende av vår materiella värld (och speciellt oberoende av människan). Matematiken finns i vår materiella värld och utvinns med abstraktioner. Matematiken kräver en logisk-systematisk begreppsapparat och slutligen att matematiken, liksom övrig kunskap, är personlig och kulturberoende. Huvudsakligen skissas alltså redan här de flesta av de stora tankeströmningarna inom matematikens filosofi som sedan förädlas och förgrenas i den senare historien.

Medeltiden lägger grunden

Under högmedeltiden uppstod en lärd filosofisk strid inom kyrkan, där olika falanger utkristalliserades. Denna strid gällde de så kallade allmänbegreppen, *universalia*, och i vilken mening dessa skulle kunna tänkas existera (Wedberg, 1968; Piltz, 1978). Eftersom det handlade om objekt för teologins analyser blev motsättningarna ibland allvarliga, kanske livsfarliga för avvikare. De olika falangernas uppfattningar om abstrakta begrepps natur kan även illustrera den diskussion som växte fram under renässans och upplysning och som fortfarande pågår, vad gäller de matematiska begreppens natur:

Platonismen: Den matematiska världen är evig och perfekt och vi kan få kontakt med den med hjälp av vårt ”inre öga”. Matematiken har en självständig existens i en parallell värld som kan upptäckas. *Problematiska frågor*: Hur kan det vara någon form av kontakt mellan det enskilda medvetandet och världen av matematiska idéer? Vilken karaktär har denna kontakt? Fanns världen av idéer innan något enskilt medvetande fanns? Hur kan det vara så nära samband mellan de eviga idéerna och den materiella världens struktur?

Aristotelismen: Matematiken har extraherats från vår materiella värld med hjälp av abstraktioner. Matematiken finns inbäddad i vår materiella värld, inte i en parallell värld. *Problematiska frågor*: Hur kommer det sig att nya och bättre matematiska modeller ständigt ersätter de gamla, t ex inom fysiken, om matematiken extraherats från materien? Hur kommer det sig att de rent matematiska upptäckterna ofta föregår sina praktiska tillämpningar? Kan en observation av något i den empiriska världen vederlägga en matematiskt bevisad sats?

Konceptualismen: Matematiska termer och bakomliggande begrepp är beroende av kultur, samhälle och person och konstrueras av människan. *Problematiska frågor*: Hur kommer det sig att den av människan uppfunna matematiken är så oerhört användbar? Hur kommer det sig att matematiken utvecklas tämligen lika, t ex Pythagoras sats, av olika människor i olika kulturer? Hur kommer det sig att matematiken blir så säkerställd att det ter sig omöjligt att ifrågasätta den?

Nominalismen: Matematiska terminologi har ingen täckning i form av bakomliggande begrepp. Matematik laborerar med tryckta symboler och mänskliga läten. *Problematiska frågor*: Hur kommer det sig att just de symboler och den grammatik som nu finns anses relevanta om de inte bygger på förståelse och bakomliggande begrepp? Hur kommer det sig att människan med intuition och kreativitet kan utveckla matematiken om inget döljer sig bakom symbolerna? Hur ska man kunna veta hur en matematisk modell ska konstrueras om det inte finns en bakomliggande begreppslig likhet mellan matematiken och det stycke verklighet som ska modelleras?

Det behöver kanske inte sägas att nominalisterna ansågs som mycket farliga av kyrkan och att de ofta förföljdes med den uppsättning av skoningslösa metoder som den medeltida kyrkliga inkvisitionen hade utvecklat. I vår tid, och kopplat till matematik, är kanske filosofen Wittgensteins senare skrifter det som kommer närmast nominalismen. Men även vissa matematiker, till exempel Hilbert, uppfattar matematiken som ett ”spel med symboler”, som inte behöver ha täckning i form av bakomliggande begrepp.

Under renässans och upplysning var drömmen om att kunna finna eller utveckla det *perfekta språket* mycket aktuell. Detta språk skulle vara sådant att alla sanningar om världen skulle kunna uttryckas korrekt och med full precision med hjälp av språket. I och med naturvetenskapens matematisering kom dessa drömmar att allt mer knytas till matematiken, och det gamla pythagoreiska programmet ”allt är tal” tog ny fart.

Sjuttonhundratalsmatematikern och filosofen *Leibniz* tänkte sig att den matematiska kalkylen skulle vara just ett sådant universalspråk, ett *characteristica universalis*. Intressant är att ”kalkyl” för Leibniz innebar just ett system av tecken.

Förra sekelskiftet – omkring år 1900

Logicismen

Ett återkommande tema i 1900-talets matematikfilosofi har varit relationen mellan matematik och logik, och mycket arbete har lagts ned på att försöka bestämma matematikens ”grunder” genom att reducera matematik till logik (Kline, 1980; Ernest, 1998) Detta har även haft vissa återverkningar på skolämnet matematik, t ex i form av den omdiskuterade mängdläran, där talbegreppet skulle ställas på mängdlogisk grund.

Matematikens sanningar har i alla tider framställts som oundvikliga och bestående, att ställa dem på logisk grund skulle vara ett sätt att motivera *varför* matematikens satser och teoribyggnad har denna karaktär. Underförstått antas logiken vara mer grundläggande och säkrare än matematiken. Slutmålet har varit att försöka nå fram till en axiomatisk matematik, där man med utgångspunkt från några få grundläggande *axiom* skulle kunna logiskt härleda hela matematiken, dvs matematikens *teorem*. Här fanns sedan antiken Euklides *Elementa* som ett föredöme, även om logikerna ansåg att bevisföringen behövde skärpas upp. Att ställa matematiken på logisk grund innebar att härleda och precisera de matematiska *begreppen* från logiska begrepp med hjälp av *explicita definitioner*.

Den filosofiska rörelse som omfattade detta program kallades ofta den *logiska empirismen*, några löst sammanfogade miljöer och som bland annat bestod av filosoferna Gottlob Frege, Bertrand Russel, Ludwig Wittgenstein och Rudolf Carnap, samt den så kallade Wienkretsen.

Redan tidigt stötte man på problem. Filosofen Bertrand Russel upptäckte att det finns grundläggande *paradoxer*, dvs motsägelser, inom mängdläran och matematikern Kurt Gödel visade att inom en motsägelsefri och något så när omfattande matematisk teori, t ex aritmetikens satser, kan man formulera påståenden som varken kan bevisas eller motbevisas.

Det som logiskt sett är förödande med en motsägelse i systemet är att från en sådan kan vad som helst härledas korrekt. De filosofer och matematiska logiker som var sysselsatta med projektet att ställa matematiken på logikens grund mottog därför dessa besked med bestörtning, men arbetande matematiker verkade mindre bekymrade. Matematiken utvecklades med stormsteg ändå, och fick också en alltmer sofistikerad tillämpning inom många områden. Kanske var det något avgörande fel med själva idén att logiken skulle vara matematikens "grund"? De matematiska sanningarna fanns ju långt innan projektet tog form, kravet på logisk grund kom först i efterhand för att motivera det man redan visste.

Utformandet av välvalda axiom och begreppslig och logisk precision vid bevisföring innebar dock en välgörande uppstramning av det ganska vildvuxna matematiska teoribygge som växt fram under 1700- och 1800-talet. Dessutom lades i förväg grunden till den logik som idag bildar mjukvara i våra miniräknare och datorer. Logiken var så att säga långt före tekniken i detta avseende.

Intuitionismen

De mest kända företrädarna för intuitionismen är *Jan Brouwer* och *Leopold Kronecker*. Den senare lär ha yttrat om matematiken: "De naturliga talen kommer från Gud, allt annat är människans verk."

Ordet *intuition* har i matematikfilosofiska sammanhang en speciell innebörd. I första hand syftar ordet på att vi intuitivt uppfattar just de *naturliga talen* som grundläggande begrepp som vi skapat för att kunna räkna, samt att vi med hjälp av detta kan *konstruera* resten av matematiken. Denna konstruktion sker med hjälp av vårt skapande intellekt och inga matematiska begrepp kan antas vara givna oberoende av en sådan konstruktion. I motsats till logicismen uppfattar man matematiken som mer grundläggande än logiken. Intuitionismen underkänner till och med vissa lagar i klassisk logik, t ex lagen om det uteslutna tredje. Denna lag säger i korthet att om inte påståendet A gäller så måste icke-A gälla.

Man underkänner således så kallade motsägelsebevis som bygger på denna lag: även om man kan visa att antagandet att ett tal är rationellt leder till motsägelse, så följer inte därav att talet är irrationellt. Man har inte visat att alternativet finns, det måste explicit konstrueras som ett existensbevis för att accepteras.

Betoningen på att matematiken aktivt konstrueras gör att denna inriktning ibland kallas *konstruktivism*. Detta ord har dock inte samma innebörd som den pedagogiska rörelse som brukar benämnas på samma sätt. Den pedagogiska konstruktivismen är en teori om *lärande*, inte ett filosofiskt krav vad gäller den matematiska vetenskapens grunder.

En svårighet för intuitionismen är att förklara vad ”explicit konstruktion” kan betyda. Detta har bland annat lett till att man utvecklat så kallad beräkningsmatematik, ofta förknippad med teoretisk datavetenskap. En annan svårighet är att förklara varför mänskliga konstruktioner ofta blir mycket lika även om de sker oberoende av varandra.

Realismen – en modern platonism

Med termen realism menas i dessa sammanhang att de matematiska objekten skulle existera oberoende av det mänskliga medvetandet. Termen syftar alltså på att de matematiska begreppen skulle vara ”verkliga” i likhet med materiella föremål. Av den matematikfilosofiska realismen följer att människan snarast *upptäcker* matematiken, hon *uppfinner* den inte. Exempel skulle kunna vara tal som roten ur 2 och geometriska figurer som triangel och kvadrat. Många av vår tids stora matematiker har varit realister, t ex *Paul Erdös* och *Kurt Gödel*. Det sägs också, halvt på allvar halvt på skämt, att de flesta matematiker är ”smygplatonister”: de upplever sin matematiska forskning som en fråga om ”upptäckande”, men vill (eller kan) inte motivera det offentligt (Hersh, 1997). Som antikens store filosof Platon föreställer de sig att de matematiska begreppen finns färdiga som *idéer* som på något sätt är åtkomliga för intellektet, eller som ett ”landskap” som man undersöker. Platonismen kan betraktas som en variant av den matematiska realismen.

Några problem för denna inriktning är att försöka förklara *var* och *på vilket sätt* dessa ideala objekt kan sägas existera, och dessutom hur vi som människor kan komma i kontakt med dem. Ett möjligt svar skulle kunna vara att hänvisa till att vår materiella värld har samma struktur som den ideala, och att vi därför kan extrahera matematiken från den fysiska världen. Vissa matematiker omfattar mer nyanserade versioner av platonism som ibland betecknas *neo-platonism*.

Ett argument för neoplatonikerna är matematikens ”obegripliga effektivitet” inom naturvetenskapen, samt det faktum att samma matematiska ”upptäckter” ofta görs helt oberoende av varandra, såväl i tid som i rum. Gamla bortglömda teorem kan ”återupptäckas” flera hundra år senare och ibland upptäcker matematiker samtidigt men oberoende av varandra helt nya områden, som t ex Newton och Leibniz med differentialkalkylen.

Som synes har alltså de matematiska objektens existens varit den stora knäckfrågan. Men i bakgrunden lurar hela tiden också det faktum att matematikens objekt och metoder förefaller vara mycket effektiva för att beskriva vår fysiska värld. Vi ägnar därför ett avsnitt åt att specialstudera denna fråga.

Matematik för att beskriva världen

De matematiska teoriernas relation till den fysiska världen har varit föremål för mycket argumentation, men ingen tvivlar på att matematiken visat sig *effektiv* på en mängd områden. Att beskriva dessa går långt utanför syftet med denna kunskapsöversikt. Vi nöjer oss med att konstatera att en överväldigande del av fysiken stödjer sig på matematiska resonemang, att matematik blir allt viktigare i kemi, biologi och medicin, inte minst inom genetiken. Den har också en fundamental roll i utveckling av datavetenskapen och datorer, vilket innebär att matematiken så att säga är inbyggd i många av den moderna vardagens produkter och används vid olika typer av simuleringar och beräkningar.

Det finns ett antal populärvetenskapliga framställningar som beskriver hur matematik används på detta sätt, se t ex Helenius och Wallby (2008) eller Wallin (2005). Processen som det innebär att beskriva, analysera och kanske beräkna ett visst fenomen i termer av matematik – den så kallade modelleringsprocessen – finns beskriven av ett flertal matematikdidaktiker (Blomhöj 1991, 2003; Blum m fl 2003). Men *varför* matematiken visar sig vara så effektiv är fortfarande i modern tid en öppen fråga. Ett annorlunda svar gavs av fysikern Max Tegmark i artikeln *The mathematical universe* år 2007, nämligen att den fysiska världen faktiskt till sin struktur är fullständigt matematisk, dvs den är helt isomorf (ung. av identiskt samma form) med en matematisk struktur. Att våra nuvarande matematiska modeller bara approximativt överensstämmer med experiment och observationer beror på att det egentligen krävs *mer avancerade* matematiska modeller. Approximationerna handlar alltså inte om att med matematik närma sig en okänd fysisk struktur, de handlar om att med matematik närma sig en mer avancerad matematisk struktur! Max Tegmarks argument baserar sig på hypotesen att det existerar en verklighet oberoende av oss människor. Om denna externa verklighet går att beskriva, så vill Tegmark visa att beskrivningen med nödvändighet är en matematisk struktur. De flesta är dock inte beredda att sträcka sig så långt i sin syn på universum utan utrycker snarare en viss förundran över hur matematiken så bra kan beskriva många av naturens fenomen.

Matematikens obegripliga effektivitet

År 1960 publicerade fysikern Eugene Wigner en artikel som kom att bli en ikon för diskussionen om matematikens relation till verkligheten. Artikeln hade titeln *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. Wigner skriver att “the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it”. Han menar att vi skall vara tacksamma för att det förhåller sig på detta vis, och hoppas på att det också ska komma att gälla i framtiden.

Wigner framhåller att matematiken kommer till hjälp genom att precisera och utöka innebörden av de ofta ganska magra och spridda observationer som vi gör av olika fenomen. Ett sådant exempel är gravitationslagen som först användes för att förklara hur kroppar faller här på jorden, men som senare visade sig vara en nyckel till förståelse av planeternas rörelser i solsystemet. Hans exempel gällde dock enbart naturvetenskaperna, inte till exempel ekonomi.

Enligt Wigner kan inte matematikens effektivitet förklaras ”rationellt”, dvs trots att matematiken i hög grad är rationell, så går det inte att rationellt förstå varför den går att använda. Underförstått är här att Wigner inte ser matematiken på ett platonistiskt vis. Det är enbart ett empiriskt faktum att den (hitintills) visat sig vara användbar. I princip kan vi komma till ett framtida läge då matematiska modeller inte längre är effektiva instrument för att förklara vissa observationer och experiment. Men än så länge råder en förvånande *isomorfism* mellan matematiken i våra modeller och den fysiska verkligheten.

Wigner nämner att det här är fråga om *två mirakler*: det ena är våra naturlagar (att de finns och inte förändras i tid och rum!) och det andra är människans förmåga att knyta samman tusentals påståenden logiskt utan att det uppstår motsägelser. Det är dock inte säkert menar Wigner att just människan intar toppositionen i detta avseende, man kan tänka sig någon annan art med högre förmåga. En tanke som har inspirerat många science fiction-berättelser.

Vår jakt efter den ultimata sanningen är kanske dömd att misslyckas menar Wigner: vi vet inte *varför* våra teorier fungerar så bra. Att de fungerar ”effektivt” är inte tillräckligt för att hävda att de är sanna och konsistenta. Den geocentriska världsbilden som placerade jorden i mitten av vårt planetsystem var till exempel förhållandevis effektiv när det gällde att förklara och förutse olika fenomen på himlavalvet, men ändå i grunden felaktig.

Även Albert Einstein har formulerat det märkliga i den ovan nämnda isomorfismen mellan matematiskt tänkande och materiell verklighet:

> *The most incomprehensible thing about the universe is that it is comprehensible.*
>
> *How can it be that mathematics, being after all a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality?*

Somliga fysiker menar att denna diskussion idag blivit högaktuell i samband med den så kallade strängteorin, där de mer abstrakta modellerna inte går att testa med den utrustning vi har idag. Frågan blir då i vilken grad dessa ”strängar” kan sägas existera: Är de verkliga, men omöjliga att testa? Eller är de bara illusioner eller artefakter som uppkommit enbart från människors tänkande? Kan vi kalla det vetenskap om påståendena inte går att testa?

Tjugo år efter Wigners artikel skriver den tillämpade matematikern Richard Hamming en artikel som är en direkt uppföljning av Wigners. I sin artikel *The unreasonable effectiveness of mathematics* (1980) formulerar Hamming fyra argument och ett antal exempel som ”förklarar” det som Wigner anser vara så obegripligt:

1. *Människor ser det som de letar efter*: Hamming menar att det bara är delvis sant att vetenskapen grundas på experiment. Mycket av det vi ser beror i själva verket på de teoretiska glasögon vi satt på oss.
2. *Människor skapar och väljer ut den matematik som passar in på en viss situation*. I själva verket behöver man ofta testa vilken matematik som passar, eller ersätta en matematik med en annan då experiment och observationer utvidgas.
3. *Matematiken riktar sig bara mot en del av den mänskliga erfarenheten*. En hel del av människans erfarenheter handlar om olika slags värden inom etik, estetik och rättvisa. Inom dessa områden har inte matematiken kommit någon vart på flera tusen år. Att tro att även dessa skulle kunna förklaras med matematik är då bara en fråga om just tro.
4. *Evolutionen har premierat människor att tänka matematiskt.* Även tidiga livsformer måste ha varit tvungna att skapa och följa långa kedjor av resonerande för att kunna överleva.

Hamming menar alltså att det inte är så förbluffande att matematiken fungerar som den gör. Människan har förmåga till matematisk tänkande (4). Vi anpassar denna till problemsituationen i fråga (2). Med hjälp av detta ser vi just matematiska lösningar på problemen (1) men det finns många områden där matematiken inte visat sig effektiv (3). Som synes är detta ett sätt att å ena sidan förklara matematikens effektivitet utan att använda argumentet att matematiken på något sätt är inbyggd i den fysiska världen självt eller är en del av en överordnad transcendent värld. Resonemanget i Hammings artikel inbegriper också att vi ofta uppfinner den matematik som behövs för ett visst problem om den inte redan finns tillgänglig.

Det är modellen som är effektiv– inte matematiken!

Det senaste decenniet har matematikens språkliga karaktär hamnat i fokus. Inte som en del av en formalistisk filosofi, utan som objekt för lingvistisk och semiotisk analys. Wigners klassiska artikel om matematikens effektivitet har på detta sätt fått ytterligare kommentarer. Fysikern Sundar Sarukkai formulerar det så här:

> *What is clear however is that mathematics cannot be applied to the world but only to some descriptions of the world. This description occurs through the medium of language and models, thus leading us to consider the role of mathematics as language.* (Sarukkai, s 415)

Sarukkais kommentar har två poänger. Den första är att matematiken inte tillämpas *direkt* på de fenomen som vi kallar verkligheten, utan medieras via språk och/eller modeller. Ett exempel är att Newtons fysik och Einsteins fysik är uppbyggda av olika modeller och begrepp, men båda kan kopplas till matematik. Den andra poängen är att det i själva verket är *typiskt* för språk att de är ”obegripligt effektiva”. Även engelska (och svenska) har en sådan effektivitet och kanske till och med är *mer effektiva* då det gäller att uttrycka vissa kvalitativa tillstånd och samband.

Föreställningen att matematisk tillämpning med automatik ger en *korrekt beskrivning* är en villfarelse: en felaktig modell (som till exempel den geocentriska) förblir felaktig även med en avancerad matematik med god approximativ förmåga att förutsäga händelser. Det är alltså inte *matematiken* som är avgörande för korrektheten utan det språk, eller den modell, som medierar mellan verklighet och matematik. Matematiseringen är snarare en *översättning* från ett språk till ett annat. Det ursprungliga språket, eller modellen, är i sin tur ofta speciellt konstruerat vad gäller struktur och begrepp, så att det ska bli lätt att översätta till matematik. I sin enklaste form kan tillämpningen bestå endast i en *symbolisering*: man ersätter det ordinära språket med analoga symboler. Att denna översättning blir ”korrekt” är knappast något mirakel.

Det är inte heller så att de begrepp som konstitueras av språket är desamma över tid. Begrepp som *massa* och *kraft* har på olika sätt förändrats och förfinats under århundraden för att lättare kunna matematiseras. Än mer problematiskt är det att samma matematik kan användas för att beskriva många olika möjliga världar. Matematiken är så att säga obekymrad om vilka sanningar som råder i just vår värld! Att påstå att matematiken ”korrekt” återger vår värld eller att det skulle råda *isomorfi* blir därför missriktat. Snarare kan matematiken ge en *möjlig beskrivning*, men det utesluter inte att andra språk kan göra detsamma, och kanske bättre.

Matematik är mer passande för beskrivningar av kvantitativ art, medan kanske engelska (svenska) är mycket mer passande för vissa kvalitativa beskrivningar. Om man då hävdar att de kvantitativa är ”bättre” argumenterar man i cirkel.

Vidare hävdar Sarukkai att matematik består av en hel uppsättning av relativt självständiga språk, vilka man kan välja och vraka bland. Just denna mångfald ökar sannolikheten att man hittar bra beskrivningar. Dessutom bör man komma ihåg att det mesta av dagens matematik inte har kommit till användning i tillämpningar. Sarukkai avslutar med orden:

> *The great challenge to science will not lie in only the creation of new mathematics but also in the possibility of creating new modes of expression and new languages in the unending scientific search for mapping the universe.* (s 422)

Filosofiskt finns det dock, som tidigare nämnts, de som vänder på frågan och använder matematikens effektivitet som ett argument om de matematiska objektens existens.

Oersättlighetsargumentet

En koppling till Wigners och Hammings fråga om matematikens förbluffande effektivitet ges av ett argument för den empiristiska synen på matematik av Quine och Putnam (Putnam, 1979). *The indispensibility argument* (oersättlighetsargumentet) bygger på ståndpunkten att för att värdera matematikens roll så skall vi titta på mänsklighetens bästa teorier för hur världen omkring oss fungerar, t ex de grundläggande teorierna inom fysiken. Quine och Putnam argumenterar att eftersom matematiken i dessa teorier är en fundamental och oersättlig komponent så bör det matematiska objekt som är en del av teoribyggnaden ges samma (ontologiska) status som motsvarande fysiska objekt som t ex atomen. De matematiska objekten skulle alltså existera i samma mening som de fysiska objekten existerar. *The indispensibility argument* har varit central i senare delen av 1900-talets matematikfilosofidiskussion.

En intressant invändning – eller snarare omvändning – till argument ges av nominalisten Hartry Field (1980). I *Science without numbers* konstruerar han en teori för ett visst område inom fysiken där han inte alls använder sig av matematik men ändå producerar en teori som är ekvivalent med den klassiska, matematikanvändande, teorin. Istället för matematiken används en inomfysisk tolkning av begrepp som ”mellanhet” för att karakterisera rummet utan att införa koordinater. Field menar att matematiken är en slags nyttig fiktion, dvs användbar men inte sann utanför sin egen ram. Speciellt är inte matematiken nödvändig. För Field och de som stödjer honom (fiktionalismen) är $2+2=4$ lika falskt som att Puh är Kristoffer Robins nalle. Båda uttalandena har bara mening innanför sin egen historias ramar. Det bör nämnas att det har rests tvivel mot Fields argument, bland annat av teknisk natur där man menar att den form av logik som han använder i själva verket är så stark att den tillåter en konstruktion av talen. En annan del av kritiken går ut på att det område inom fysiken som Field valt att re-axiomatisera är av en speciell typ och att det finns andra delar av fysiken där Fields metoder inte fungerar. Diskussionen om Fields argument är fortfarande levande (Melia 2000, 2002; Colyvan 2001, 2002). Ett mer elementärt exempel på den typ av argument som Colyvan ger, dvs ett fall där matematiken förefaller oundgänglig för att förklara ett fenomen, ges av Alan Baker (2003) som gör en fallstudie av den biologiska forskningen om de nordamerikanska cikador som ligger i dvala i 17 (eller 13) år för att sedan, alla samma år, plötsligt dyka upp, para sig och sedan dö och få avkomma som omedelbart gräver ned sig för att återkomma 17 (eller 13) år senare. Baker undersöker de tillgängliga biologiska förklaringarna på fenomenet och drar slutsatsen att (med en rimlig filosofisk tolkning av vad *förklaring* är) matematiken (elementär talteori) är en oundgänglig del av förklaringen.

Matematikens användning i tillämpningar

Enligt Ole Skovsmose (2005) så är matematikämnet omgärdat av en "visshetsideologi". Denna innebär i korthet att "korrektheten" i den rena matematiken på något sätt skulle överföras till en motsvarande "korrekthet" då den tillämpas på verklighetens problem av vardaglig, teknologisk eller ekonomisk art.

Denna ideologi upprätthålls av många matematikfilosofer men förstärks också i våra klassrum, där skenbart verkliga situationer beskrivs, med tillrättalagda ingredienser. All information brukar till exempel vara exakt och informationen som ges brukar vara både nödvändig och tillräcklig för att lösa det mer eller mindre konstlade problemet. Denna virtuella värld, som eleven vet inte är verklig, fungerar som en platonsk idévärld som bekräftar en absolutistisk uppfattning. Själva ämnet blir också självbekräftande: skolämnet behövs för att lösa sina skolproblem.

En annan ideologi vad gäller matematiken som ämne är att den skulle vara *kunskapsteoretiskt transparent*, att det skulle vara möjligt att klart och enkelt presentera vad som är kunskap. Det främsta klassiska exemplet är Euklides *Elementa*, som i princip utgår från "säkra" axiom för att härleda nya sanningar.

Ratio, förnuftet, är ett ideal, medan t ex *intuition* anses vara en osäker och tvivelaktig kunskapskälla. Detta kunskapsideal har dominerat västerlandets vetenskapsfilosofi, men axiomens status har varit oklar. Från början hävdades att dessa måste vara självklart sanna, men enligt den formalistiska skolan med bland andra Hilbert som anhängare underkändes detta krav och man menade att matematiken bara skulle erbjuda säkerhet inom sitt eget formella system. Visshet och sanning blev att göra *formellt rätt*, inte att påståenden skulle överensstämma med intuition eller observation.

Vanligen skiljer man på den "rena" matematiken och den tillämpade matematiken som på något sätt *beskriver* en "smutsigare" konkret verklighet. Denna föreställning är i grunden dualistisk: dels har vi de matematiska begreppen i en separat, ren, formell struktur, dels har vi den empiriska världen. Drömmen är att matematiken ska kunna åstadkomma en komplett bild av verkligheten. Ett sådant synsätt på språkets funktion brukar kallas *bildteori*, en teoribildning som leder till metafysiska svårigheter. Skovsmose avslutar:

> *The picture theory has not survived as an active philosophical idea, but, nevertheless, it survives as a metaphysical metaphor operating in the discussion of mathematical modelling.* [...] *In the philosophy of language the picture theory now appears obsolete; therefore it appears surprising that it still operates as a part of a commonsense metaphysics of mathematical modelling.* (s 76)

Bildteorin (the picture theory) fokuserar på precision och verifikation av "bilden", men bortser från andra frågor, till exempel det sammanhang som modelleringen utförs i. En bild, liksom en karta, är alltid en *förenkling* motiverad av en viss typ av frågeställning eller perspektiv. Bildteorin skapar på detta sätt en *organiserad blindhet* som begränsar diskussionen kring matematisk modellering. Skovsmose visar sedan med ett antal exempel hur matematisk modellering formar vårt samhälle och "koloniserar" områden som tidigare krävt moraliskt omdöme. Denna typ av modellering nöjer sig inte med att försöka *avbilda*, den *omformar* vår sociala verklighet och dränerar den på sin etiska dimension. De samhälleliga relationerna och interaktionerna avhumaniseras och bedömningen av modellens värde blir bara en fråga om dess precision.

Finansmatematik

Ett aktuellt exempel på när matematiken kan skapa moraliska, och även praktiska och sociala, problem är handeln med finansiella instrument. Den globala finanskrisen som startade 2008 utlöstes av problem på den amerikanska bolånemarknaden där man med hjälp av *the Gaussinan Copula formula* hittat ett sätt att paketera och värdera risk och därmed också öppnat för att köpa och sälja risk (se Galiani, 2003 för en översikt). En liknande tillämpning av matematisk analys är den så kallade *Black-Scholes-Mertons formel*, och användningen av den har utsatts för en detaljerad sociologisk studie, som kan ses som en fallstudie av flera av de fenomen som Skovsmose berör ovan. Vi redogör därför kort för denna studie.

Ett derivat är ett finansiellt kontrakt vars värde härleds ur värdet på en annan, underliggande, tillgång. Den underliggande tillgången kan vara en aktie, men också t ex råvaror, lån eller fastigheter. En aktieoption, som t ex kan vara rättigheten (men inte skyldigheten) att köpa en viss aktie vid en viss framtida tidpunkt till ett visst, vid optionens inrättande, angivet pris, är ett exempel på denna typ av finansiellt instrument. Principen för denna typ av instrument har varit känd länge men ända fram till 1970-talet finns i princip ingen officiell handel. Problemet var att banker och motsvarande institutioner inte visste hur instrumenten skulle värderas. Black, Scholes (1973) och Merton (1973) utvecklade ett matematiskt mätinstrument som utifrån vissa vedertagna finansiella variabler prissatte optionen (se Tysk (2008) för en populärvetenskaplig framställning). Black och Scholes fick senare det så kallade Nobelpriset i ekonomi för sina insatser (Merton var då avliden). Black, Scholes och Merton använder alltså matematik för att beskriva, förklara och förutsäga priset på en option. Men det är inte hela sanningen. MacKenzie och Millo (2003) beskriver i en sociologisk studie av The Chicago board options exchange, en av de första och största börserna för derivat, hur Black-Scholes-Mertons formel inte lyckades på grund av att den på ett korrekt sätt beskrev det pris som marknaden satte utan för att marknaden, på grund av formeln i sig, ändrades så att formelns antaganden blev mer verklighetstrogna än vad de från början var. Från att har varit närmast icke-existerande i början av 1970-talet har marknaden för finansiella derivat formligen exploderat och totalt förändrat världens finansmarknader (Bernstein 1992, 2007). Med MacKenzies ord har alltså matematiken snarare en roll av *motor* i denna marknad än en roll av *kamera* (MacKenzie, 2006). Den globala derivatmarknaden är alltså ett exempel på när en matematisk modell på ett fundamentalt sätt förändrat fenomenet som modelleras.

Den kände finansekonomen Nassim Nicholas Taleb skrev år 2007 en remarkabel bok med titeln *The black swan – The impact of the highly improbable.* Den ”svarta svanen” är det mer eller mindre katastrofala motexemplet, det som falsifierar en generell utsaga eller modell. Flera tusen ”vita svanar” kan tidigare ha understött modellen, men plötsligt en dag dyker den svarta svanen upp och vederlägger alltsammans. Många som arbetar inom finansekonomin litar fullständigt på sina modeller och har aldrig reflekterat, än mindre kalkylerat över sådana motexempel. Desto större blir katastrofen då den kommer; inga modeller finns att tillgå och det tidigare välplanerade beteendet övergår till vild panik. Boken skrevs innan den amerikanska finanskrisen och man associerade då i första hand till 11 september-katastrofen, men nu år 2009 så blir kopplingen till finanskrisen uppenbar. Så här skriver Taleb:

> *Our inability to predict in environments subjected to the Black Swan coupled with a general lack of the awareness of this state of affairs, means that certain professionals, while believing they are experts, are in fact not. Based on their empirical record, they do not know more about their subject matter than the general population, but they are much better at narrating – or, worse, at smoking you with complicated mathematical models. They are also more likely to wear a tie.* (s *xx*)

Med sin förträfflighet, höga status och skenbara vetenskaplighet lurar de inte bara sig själva menar Taleb utan också allmänheten som kommer att stå minst lika oförberedd när den "svarta svanen" dyker upp och punkterar modellen för hur fastighetsmarknaden brukar bete sig. Även finansmagnaten George Soros, bland de trettio rikaste i världen, har kritiserat ekonomernas modeller. Han framhäver speciellt att två villkor inte motsvaras av verkligheten. Det ena är att människor alltid uppför sig rationellt och välinformerat nyttomaximerande, det andra är att marknader alltid skulle sträva mot jämviktstillstånd (Soros, 2008).

Det finns alltså en viktig skillnad mellan att modellera strikt fysikaliska fenomen och fenomen som till viss del är sociala. När vi modellerar fysiken håller de flesta av oss med om att själva modelleringen i sig knappast påverkar det fenomen som modelleras. Men när en matematisk modell används för att modellera ett socialt fenomen finns det plötsligt en högst uppenbar risk att verkligheten på olika sätt reagerar på de resultat som modellen levererar. Från denna utflykt till tillämpningarnas värld återvänder vi nu till matematiken.

Det matematiska teoribygget

R.W. Hamming (1980), som vi tidigare citerat i samband med *the unreasonable effectiveness*, menar att matematikens anpassning till verkligheten inte bara handlar om att välja rätt matematik utan att själva de matematiska sanningarna delvis anpassar sig till tillämpningarna. Skulle inte våra postulat i geometri stämma med Pythagoras sats, så ändrar vi postulaten, dvs vi går från det som ligger nära tillämpning ”bakåt” till postulat och regler. Då är det inte konstigt att det ”stämmer”. Skulle vi få reda på att Cauchys teorem var falskt skulle vi ändra på antagandena tills det blev sant. Många resultat i matematiken är tämligen oberoende av bevis och antaganden. Hamming stödjer sig här på Imre Lakatos, vars arbete varit så inflytelserikt att vi ägnar det ett eget avsnitt. Lakatos representerar ett utvecklingsspår inom matematikfilosofin som inte främst tar sin utgångspunkt i själva matematiken utan fokuserar på *hur man arbetar med matematik*. Imre Lakatos vänder sig i sin text *Proofs and refutations* (Bevis och vederlägganden – den svenska översättningen heter något oegentligt *Bevis och motbevis*) mot den traditionella tolkningen av hur matematiken växer fram genom att begrepp först definieras, sedan studeras varvid satser formuleras som sedan bevisas (definition-sats-bevis). I sin framställning ger Lakatos ett utmärkt exempel på hur matematikens historia har en naturlig roll i matematikfilosofin. Han tar avstamp i Eulers formel som säger att för en konvex polyeder med V antal hörn, E kanter och F sidor så gäller $V - E + F = 2$. Lakatos utgår sedan från hur (försök till) bevis genom historien presenterats för att snart vederläggas med motexempel. Han iscensätter detta i ett klassrum, där ett förlopp som i huvudsak liknar den verkliga historien utspelas som en dialog mellan studenter och lärare. Idéer kommer upp och förkastas, studenterna argumenterar och byter åsikt allt medan resonemangen blir allt mer sofistikerade. Lakatos menar att matematisk kunskap växer fram på ett informellt sätt och att bevis endast kan betraktas som preliminära. En aspekt av hans resonemang är att giltighetsområdet för en sats, tack vara nya matematiska insikter, ibland kan utvidgas varvid även beviset måste modifieras (Lakatos, 1976). I Lakatos tolkning blir det de informella matematiska idéerna som framstår som matematikens centrala objekt. Och just för att matematiken – och dess idéer – kontinuerligt utvecklas i ständig diskussion inom matematiksamfundet är matematiken inte absolut sann, utan i högsta grad felbar. Matematiken framstår i högre grad som lik andra (empiriska) vetenskaper där man söker sig fram till allt mer sofistikerad kunskap om de centrala objekten som är de matematiska idéerna. Lakatos utvecklade senare idéerna från *Proofs and Refutations* till en filosofi för *forskningsprogram* inom vetenskapen (Lakatos, 1983a, 1983b) där principerna för hur en serie av vetenskapliga teorier växer fram genom att delar av en föregående teori ersätts med något nytt, och där fundamentalt olika sätt på vilken denna utveckling kan ske, karakteriseras. Den klassiska synen på matematik är alltså att en sådan teoriutveckling egentligen inte sker eftersom ny kunskap endast läggs till den gamla utan att någon gammal kunskap förkastas. Men förutom Lakatos egen avhandling finns det även andra som hävdar att matematisk teori visst kan växa i enlighet med Lakatos forskningsprogram. Gianluigi Olivieri menar t ex att en stor del av utvecklingen av den formella mängdteorin (Cantor-Zermelo) har denna karaktär (Olivieri, 2006).

Lakatos beskrivning av matematik som en informell vetenskap, som är ”mänskligt dynamisk” har gjort att många har försökt använda denna syn på matematiken i utbildningssammanhang, även om det också har påpekats att det klassrum Lakatos beskriver är ett fiktivt sådant och inte nödvändigtvis beskriver en ideal situation ur utbildningsperspektiv (Pimm m fl, 2008)

En viktig aspekt av Lakatos arbete är att han istället för att studera matematikens framväxt och dess teoribyggnad inifrån gör en historisk och delvis sociologisk studie av matematikens framväxt. Även om den logiska, matematikinterna diskussionen om matematiken grundvalar idag fortfarande är ett aktivt forskningsområde (se t ex Maietti, 2009) så är det humanistiska spår som Lakatos representerar något som rönt allt större intresse de senaste årtiondena. Tidigare i historien kan en skiljelinje mellan professionella filosofer och matematiker urskiljas. Trots att båda grupperna är intresserade av matematikens grundvalar, talar de till synes om olika saker och är inte alltid intresserade av varandras syn på saken. Men de senaste årtiondena har flera matematiker och matematikdidaktiker gett sig in i diskussionen från den mer filosofiska sidan (Van Kerkhove, 2006) vilket vi skall titta närmare på i nästa avsnitt.

Humanistisk matematikfilosofi

En viktig gestalt i den moderna matematikfilosofiska diskussionen är matematikern Reuben Hersh som förespråkar en *humanistisk matematik*. Han beskriver sin bok från 1997, *What is mathematics, really?*, som en ”subversiv attack på traditionell matematikfilosofi”. Attacken riktar sig mot tre uppfattningar om matematikämnet som han benämner ”platonism” , ”formalism” och ”neo-Fregeanism”. I förordet till boken förklarar han också vad han menar med ”humanism”: det inkluderar alla filosofier som uppfattar matematik som en mänsklig aktivitet, en produkt, och en utmärkande egenskap i mänskliga kulturer och samhällen.

Han betonar också att han inte riktar någon kritik mot matematiken som vetenskap och hur den utövas, attacken riktar sig mot *vissa filosofiska föreställningar om matematiken*.

I viss mening är det självklart att matematik är en mänsklig aktivitet, så man kan undra på vilket sätt detta kan ha att göra med den filosofiska frågan: vad är matematik?

Men Hersh menar att om man tar bort det sociala och historiska sammanhanget så blir den filosofiska frågan omöjlig att hantera. Det är först inom denna kontext som man kan föra vettiga diskussioner och analysera olika argument, dvs det sociala sammanhanget är *oundgängligt* för att hantera frågan. Hersh hävdar vidare att den filosofiska frågan har stor relevans för utbildning och undervisning, lärare och lärarutbildare behöver verkligen kunna förstå vad matematik är.

Hersh kritiserar den formalistiska ståndpunkten att ”matematik är ett meningslöst spel” genom att fokusera på begreppet ”regel”. Att *följa regler* är ju något som kännetecknar spel. Visserligen kan man spela spelet när väl reglerna finns där, menar Hersh, men hur går det till att *göra regler*? Att göra regler följer inga regler. De faktorer som bestämmer regelgörandet är i själv verket mycket komplexa, de har både historiska, sociala, biologiska och individuella komponenter. Han sammanfattar: ”Complicated, certainly. Mysterious, no doubt. Arbitrary, no.” Det finns alltså orsaker till att de matematiska reglerna blir som de blir, men det är mycket svårt att bestämma vilka de är och hur de påverkar. Formalister är tvungna att ägna sig åt logisk renhållning (logical hygiene) för att sedan kunna hävda att det bara handlar om att följa regler. Allt det mänskliga är undanstädat, nästan som man ville undvika att en skandal nådde offentligheten. Matematik är visserligen delvis ett spel med regler, men man kan inte bortse från hur dessa regler är gjorda, hur de utvecklas och hur de följs i praktiken. *Hur* man ska följa en regel är inte en regel utan kräver omdöme och beslut. Att matematik skulle vara ett meningslöst spel med godtycklig regler håller alltså inte, menar Hersh.

Platonism är ganska vanlig bland matematiker, enligt Hersh. I sin standardversion innebär den att det matematiska objekten skulle existera på egen hand i en abstrakt värld, bortom tid och rum och bortom tanke och materia.

Platonismen har egentligen sitt ursprung i den pythagoreiska läran om att ”allt är tal”. I vår tid finns platonismen i många olika varianter, allt från att man mottagit matematiken från Gud till att matematikern kan *observera* de matematiska objekten analogt med hur vi använder våra fem sinnen. Till de senare hör till exempel G.H. Hardy, Kurt Gödel och René Thom. Den ungerske matematikern Paul Erdös talar om att matematikern av Gud får en glimt i ”The Book” , där alla eleganta matematiska bevis redan finns.

Det är ändå inte så konstigt, menar Hersh, att så många matematiker kan tro på något så ”ovetenskapligt” som en oberoende, icke-materiell tidlös värld av matematiska sanningar. Det hela hänger ihop med matematikens objektivitet, dess stora säkerhet och relativa oberoende av kulturer. Det finns verkligen *rätta svar* i matematiken. Måste de då inte vara rätt i förhållande till något som har en självständig existens?

Men den oreflekterade platonism som många matematiker förespråkar är ofta lite halvhjärtad, den har aldrig heller utsatts för de riktigt besvärliga motargumenten. Hit hör bland annat följande menar Hersh: Att det skulle finnas en värld av icke-materiella objekt motsäger grundläggande värderingar i vår tids naturvetenskap. Vad skulle det kunna vara för slags kontakt mellan denna icke-materiella värld och matematikern av kött och blod? Hur går hans ”observationer” till rent fysiologiskt? Är vi inte tillbaka till en medeltida ovetenskaplig föreställningsvärld, då man tänkte sig att de religiösa sanningarna kunde ”uppenbaras” för ens inre? Enda svaret på dessa pinsamma frågor är, menar Hersh, att överge platonismen och försöka hitta svaren i vår socio-kulturella värld.

De matematiska begreppen har i grunden samma karaktär som sociala begrepp, som ”demokrati”, ”lagar”, ”priser” med mera. Matematiska objekt är skapade av människor, inte godtyckligt utan utifrån redan etablerade matematiska objekt och från behov inom vetenskap och vardag. När dessa objekt är skapade visar det sig att de kan ha egenskaper som är svåra att upptäcka. När vi arbetar med objekten blir de *reifierade*, menar Hersh och hänvisar till Sfard och Linchevski (1994). Objekten blir självklara grunder för mer avancerade begrepp. Dessa gemensamma aktiviteter, först t ex att manipulera föremål, sedan arbeta med papper och penna, leder fram till en allmän produkt, nämligen *gemensamma begrepp* (*shared concepts*). Men dessa konstruerade gemensamma begrepp är inte godtyckliga, som tidigare sagts. Därför räcker inte denna förklaring, begreppen hämtar näring från vår materiella och sociala värld samt våra biologiska förutsättningar.

Det vi måste göra till sist, säger Hersh och riktar sig till sina kollegor, är att ge upp idén om att matematik skulle bestå av odiskutabla sanningar. Vi ger upp gammaldags förhoppningar, men vinner i klarhet angående vad vi håller på med och varför:

1. Matematik är mänsklig, den är en del av och passar in i vår mänskliga kultur.
2. Matematik är inte ofelbar. Den utvecklas ofta genom misstag, korrigeringar och nya korrigeringar (Hersh hänvisar till Lakatos` *Proofs and Refutations* från 1976).
3. Det finns olika versioner av vad bevis och rigorös framställning skall innebära, beroende på tid, plats med mera. Empirisk evidens, numeriska experiment och sannolikhetstänkande hjälper oss med vad vi ska tro på i matematiken.
4. Matematiska objekt är en speciell typ av socio-historiska objekt. De är en speciell del av en kultur. Religion, litteratur och bankväsende är också speciella delar av kulturen. Var och en skiljer sig från de övriga, inte bara matematiken.

Att matematiken är en mänsklig aktivitet är inte särskilt kontroversiellt att påstå. Däremot hävdar Hersh att vi ska ”glömma” idén om att det skulle finnas en dold mening eller definition bortom dess socio-kulturella mening, vilket är mycket kontroversiellt: ”Forget foundations, forget inhuman, immaterial ’reality’! ”.

Ett paradigmskifte

Reuben Hershs beskrivning av matematiken kan ses som ett exempel på det som filosofen och matematikdidaktikern Paul Ernest menar är ett Kuhnianskt paradigmskifte. I över tvåtusen år har matematiken av många uppfattats som ett stycke absolut sanna och ofelbara sanningar bortom mänskliga värden och angelägenheter och med obegränsad och självklar potential till tillämpning. Men de senaste trettio åren har denna uppfattning utmanats, allt fler har istället börjat se matematiken som en social konstruktion, en kulturell aktivitet bland andra. Han skriver i *The philosophy of mathematics education*:

> *However, in relinquishing the certainty of mathematics it may be that we are giving up the false security of the womb. It may be time to give up this protective myth. Perhaps human beings, like all creatures, are born into a world of wonders, an inexhaustible source of delight, which we never fathom completely.* (s *xi*)

Föreställningen att matematisk kunskap består av säkra och ofelbara sanningar kallar Ernest “absolutism”. I början av 1900-talet var denna uppfattning ofta förknippad med olika försök att ställa matematiken på logisk grund, att reducera eller skriva om matematik till logik. Andra relativt populära uppfattningar var formalismen som uppfattar matematiken som ett spel med formler och konstruktivismen som tänker sig ”konstruera” matematiken från en självklart sann intuition om i första hand de naturliga talen. Exempel på den förra uppfattningen är David Hilbert och för den senare L. E. J. Brouwer. Ingen av dessa skolor har lyckats etablera en säker matematisk kunskap trots omfattande försök under första halvan av 1900-talet.

Den centrala kritiken mot alla försök att etablera matematikens grunder är att detta måste leda till en oändlig regress. Varje grund kan ifrågasättas och kräva en ny grund osv. Ernest skärskådar fyra absolutistiska anspråk:

– De bevis som matematiker presenterar kan i princip översättas till fullständigt rigorösa formella framställningar.

Mot detta hävdar Ernest att eftersom vi inte kan hitta några säkra grunder så förlorar ”rigorös” sin mening. En sådan översättning kräver också mänsklig uppfinningsförmåga, så även om all kritik tillbakavisats hitintills kan man inte försäkra sig mot framtida korrekta invändningar.

– Rigorösa bevis kan kontrolleras med avseende på korrekthet.

Det finns bevis som inte kan kontrolleras av människor, t ex fyrfärgsteoremet (Tymoczko, 1979). Skulle dessa bevis översättas till mer formell logik skulle de bli ännu mer omfattande. Kontrolleras bevisen av en dator så måste mjukvaran i sin tur kontrolleras och det blir ett empiriskt problem att avgöra om programmet verkligen gör det som det påstås göra när det körs.

– Matematiska teorier kan med full validitet översättas till formella axiomgrupper.

De försök som gjorts de senaste åren har lett till att man stött på oväntade och mycket svårhanterliga djupa problem, vilket också kan gälla de delar man inte hitintills fokuserat på. Dessutom vet vi ju inte vad ett rigoröst bevis är, vilket är en förutsättning för en valid översättning.

– Konsistensen av de valida översättningar som görs kan kontrolleras.

Som vi vet från Gödels ofullständighetsteorem så finns det inga sådana garantier.

Som vi nämnde redan i inledningen menar Ernest att matematikfilosofin har varit allt för upptagen med att diskutera frågorna ovan och finna matematikens grunder. Liksom Hersh vill han istället beskriva matematiken som en social konstruktion. Grunderna till detta skulle då vara: Matematisk kunskap är lingvistisk kunskap, konventioner, regler och språk är en social konstruktion. Interpersonella sociala processer är nödvändiga för att förvandla individuell subjektiv matematisk kunskap till accepterad objektiv kunskap. Objektivitet som sådan måste förstås som ett socialt fenomen.

Objektiv kunskap internaliseras och rekonstrueras av individer medan de lär matematik. Genom att använda denna kunskap skapas ny matematisk kunskap, som behöver genomgå den ovan nämnda processen för att förvandlas till objektiv kunskap. Subjektiv och objektiv kunskap deltar på så vis i en cykel av skapande och återskapande. Detta, menar Ernest, leder oss till att betrakta social konstruktivism som en matematikfilosofi som utgår från följande antaganden:

1. En individ kan enbart äga subjektiv matematikkunskap.
2. Publicering (offentlighet) är ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att omvandla subjektiv kunskap till objektiv.
3. Genom att följa den heuristik som Lakatos skisserar så kan publicerad kunskap bli objektiv kunskap.
4. Den heuristik som ligger bakom beror av objektiva kriterier.
5. Objektiva kriterier för kritik av publicerad matematisk kunskap vilar på såväl objektiv språklig kunskap som matematisk kunskap.
6. Subjektiv matematisk kunskap är till största delen internaliserad rekonstruerad objektiv kunskap.
7. Individuella bidrag kan addera till, omstrukturera eller reproducera matematisk kunskap.

Ernest själv kan se två omedelbara problem med ovanstående punkter. Det första är att intersubjektivitet är ett socialt fenomen, vilka brukar vara föränderliga och osäkra. Hur ska matematikens "säkerhet" kunna inrymmas i detta? Han svar är att matematiken i praktiken redan har visat sig vara mer osäker och föränderlig än vad den idealiserade bilden föreskriver att den är, t ex genom Imre Lakatos beskrivning (se ovan). Det andra problemet är att gränserna mellan matematikens filosofi och forskningsområden inom sociologi och historia tenderar att suddas ut. Därmed börjar empiriska argument att blandas med filosofiska, något som Ernest anser att man måste undvika.

Att acceptera att matematiken är mänsklig som Hersh och Ernest förespråker betyder dock inte automatiskt att all dess mening skapas i strikt socio-kulturell eller konstruktivistisk betydelse. Ett problem som detta synsätt för med sig är att det blir svårt att förklara hur olika kulturer som antas inte ha haft kontakt med varandra uppfunnit samma matematik. Genom att istället ta sin utgångspunkt i vissa aspekter av världen omkring oss och studera samspelet mellan dessa och det system som den mänskliga kognitionen utgör kan dock bland annat detta fenomen förklaras. *Embodied mathematics* utgör exakt en sådan teori.

Embodied mathematics

Att matematiken i hög grad inspireras och till viss del är en avbildning av vissa vardagliga och fysikaliska fenomen är ingen ny idé, se t ex Gårding (1977) eller MacLane (1986). Inte heller är det någon ny tanke att matematiskt tänkande bara är en form av naturligt mänskligt meningsskapande (Mason, Burton & Stacey, 1982). Men ingenstans dras dessa båda principer så långt som inom *embodied mathematics*. Området är ett delområde till *embodied cognition* (förkroppsligad kognition) som tar sin utgångspunkt i principen att det mänskliga tänkandet i hög grad formas genom vardagliga upplevelser filtrerade genom våra kroppar och sinnen (Lakoff & Johnson, 1999). De vetenskapliga metoderna kommer från en stor mängd olika vetenskaper som psykologi, neurovetenskap, lingvistik, kognitionsvetenskap och artificiell intelligens. Även om detta perspektiv huvudsakligen är psykologiskt så har områdets företrädare också vissa filosofiska ambitioner.

I boken *Where mathematics comes from* sammanfattar Lakoff och Núñez egen och andras forskning och presenterar sammanhängande teori för hur matematiskt tänkande ”föds” ur kroppsliga upplevelser. Med stöd i modern teoribildning i kognitionsvetenskap bygger de en modell för abstrakt matematiskt tänkande som de utvecklar inom området tal (inklusive oändlighetsbegreppet och komplexa tal).

Lakoff och Núñez menar att basen för det abstrakta matematiska tänkandet finns i vad de kallar *the cognitive unconscious* (det kognitiva omedvetna). Med detta menar de tankar och processer som ligger så djupt att vårt medvetande inte har explicit tillgång till dem. Ett specifikt exempel är när vi tolkar en mening som någon annan säger till oss. En stor mängd processer är involverade. Vi måste allokera minne för att komma ihåg ljudet, tolka det som mänskligt tal, identifiera fonem och ur detta enskilda ord, ge orden mening i ett lämpligt sammanhang, ge orden semantisk och pragmatisk betydelse i meningen som helhet, notera kroppsspråk hos den som talar, planera vad vi skall säga som respons och så vidare. Detta är en process som går mycket snabbt, närmast ögonblickligen och vi kan inte själva redogöra för hur det går till.

> *Cognitive scientists have shown experimentally that to understand even the simplest utterance, we must perform these and other incredibly complex forms of thought automatically and without noticeable effort below the level of consiousness. It is not merely that we occasionally do not notice these processes; rather, they are inaccessible to consious awareness and control.* (Lakoff & Johnson 1999, s 11)

Lakoff och Núñez argumenterar att en stor del av vår matematiska kognition har precis denna karaktär.

En annan av hörnstenarna i denna teori är metaforens, snarare än logikens, roll som struktur för våra tankar. Den *konceptuella metaforen* kallar de den mekanism med vilken människan förstår abstrakta koncept i termer av konkreta. Ett exempel är hur känslor för andra människor karakteriseras i termer av temperatur: Hon är kall mot mig; hans varma blick; de har inte brutit isen. Kopplingen mellan uttryck för värme och positiva känslor respektive kyla och negativa känslor är väletablerad. Ett annat exempel är hur viktiga saker karakteriseras som stora och omvänt: Beethoven är en gigant inom den klassiska musiken; bilens färg är ingen stor sak. Det finns hundratals liknande exempel dokumenterade och analyserade i forskningen (Grady 1997; Lakoff & Johnsson 1980, 1999; Núñez 1999).

Ett exempel på hur konceptuella metaforer fungerar är metaforen *Kategorier är behållare*. En kategori är här ett abstrakt begrepp medan behållare relaterar till konkreta behållare som t ex en burk, låda eller liknande. Vi tänker oss att en kategori eller en mängd är som en fysisk behållare. Att ett objekt tillhör en kategori eller en mängd ser vi som en metaforisk bild av att ett objekt är inneslutet i behållaren. Det som ofta förstås som logisk slutledning om kategorier och mängder kan på det här sättet istället förstås som (en metaforisk bild av) rent rumsliga slutsatser (Lakoff & Núñez, 2000).

Det grundläggande aritmetiska tänkandet bygger enligt Lakoff och Núñez på fyra grundande metaforer där aritmetik i tur och ordning är en metaforisk avbild av samlingar av objekt, konstruktion av objekt (t ex: 1 är ett minsta enhetsobjekt, tal är objekt sammansatta av enhetsobjekt), måttstocken (t ex: tal är fysiska längdenheter, mindre är kortare, addition är att sätta samman fysiska segment), samt rörelse längs en väg (t ex: operationer på och mellan tal är rörelse, 0 är vägens början, storleksrelationer är avstånd). Lakoff och Núñez ger en ingående beskrivning av hur dessa metaforer fungerar och hur aritmetikens lagar i själva verket följer från motsvarande fysiska entiteter (Lakoff & Núñez, 2000, s 54–74).

När Lakoff och Núñez bygger upp sin modell för hur vi förstår abstrakta matematiska tal (positiva, hela, rationella, reella och så småningom komplexa tal) så tar de till att börja fasta på forskning som visar att redan nyfödda barn har en elementär uppfattning om antal och kan skilja på antalen 1, 2 och 3 med en direkt blick – så kallad subitisering (Antell & Keating, 1983). Sedan Lakoff och Núñez skrev sin bok har det kommit flera resultat inom kognitionsforskningen som förstärker bilden av att vissa matematiska förmågor finns hos redan mycket små barn, dels om förmågan till subitisering (Dehaene, 2007), men också om att det finns områden i hjärnan som hanterar spatialt utspridda tal, som på en tallinje (Dehaene m fl, 2003). Det grundläggande och icke-verbala nätverk av sådana kunskaper som är medfött eller som vi tillägnar oss mycket tidigt kallas ibland ”the core number system” (Feigensson, Dehaene & Spelke, 2004). En slutsats är att den mest aktuella forskningen inom detta område snarare stärker perspektivet hos Lakoff och Núñez än tvärtom.

En teori som denna är naturligtvis svår att i detalj testa, men dess plausibilitet kan undersökas t ex med hjälp av metoder från lingvistiken. En modern sådan metod rör samspelet mellan vår kommunikation och kognition där teorin för *gester* rönt mycket uppmärksamhet. Sådana metoder har t ex används av Núñez för att göra troligt en del av vår taluppfattning faktiskt utgörs av *rörelse längs en väg* (Núñez, 2004), se ovan.

Även om teorierna inom *embodied mathematics* främst rör kognition och psykologi, så finns det vissa matematikfilosofiska ambitioner, vilka också görs explicita i Lakoff och Núñez bok (2000). Liksom Hersh attackerar författarna flera av de traditionella matematikfilosofiska hållningarna, som de karakteriserar i vad de kallar *The romance of mathematics*.

- Matematik är en objektiv egenskap hos universum, matematiska objekt är verkliga, matematisk sanning är universell, absolut och säker.
- Vad människor tror om matematik har därför ingen effekt på vad matematik verkligen är. Matematiken skulle vara densamma även om det inte fanns människor eller varelse av något slag. Trots att matematiken är abstrakt och icke-förkroppsligad så är den verklig.
- Matematiker är de ultimata vetenskapsmännen som upptäcker absoluta sanningar, inte bara om detta fysiska universum men också om varje möjligt universum.
- Eftersom logiken själv kan formaliseras som matematisk logik, karakteriserar matematik själva rationalitetens natur.
- Eftersom rationalitet definierar vad som är unikt mänskligt, och eftersom matematik är den högsta formen av rationalitet är matematisk förmåga höjdpunkten av mänsklig intellektuell kapacitet. Matematiker är därför de ultimata experterna på själva rationalitetens natur.
- Fysikens matematik finns inneboende i de fysikaliska fenomenen – det finns ellipser i de elliptiska planetbanorna, fraktaler i lövens och grenarnas fraktalmönster, logaritmer i sniglarnas logaritmiska spiraler. Det innebär att ”naturens bok är skriven i matematikens språk” vilket betyder att matematikens språk är detsamma som naturens språk och att endast de som verkligen förstår matematik kan i grunden förstå naturen.

– Matematiken är vetenskapens drottning. Den definierar vad precision är. Möjligheten att göra matematiska modeller och utföra matematiska beräkningar är vad vetenskap handlar om. Som den högsta formen av vetenskap, har matematiken företräde över alla andra vetenskaper. Matematiken själv är därför den enda vetenskap som kan karakterisera matematikens verkliga natur.

Lakoff och Núñez argumenterar att dessa synsätt, även om de representerar en spännande historia, inte representerar en sann historia. Dessutom menar de att denna syn på matematik har många negativa konsekvenser, genom att t ex trycka ned människor och få matematiken att framstå som onåbar för de allra flesta. Lakoff och Núñez påpekar att även om någon givetvis kan välja att *tro* på de matematiska objektens transcendenta natur så är det omöjligt att vetenskapligt undersöka om matematiska objekt och sanningar existerar i objektiv mening, dvs oberoende av människans existens. De menar att all matematik som finns är den förkroppsligade matematiken och att de matematiska idéerna huvudsakligen är metaforiska till sin natur. Den så kallade radikalkonstruktivistiska synen på matematik är inte heller förenlig med teorin om förkroppsligad matematik – matematiken är *inte* strikt subjektiv utan grundad i upplevelser av världen. Det betyder att det perspektiv som Reuben Hersh skriver fram inte heller är till fullo kompatibelt med Lakoff och Núñez perspektiv. Matematiken är inte bara en social överenskommelse med kulturella och historiska rötter. Även om dessa faktorer naturligtvis har haft betydelse för matematikens utveckling är det enligt teorin för förkroppsligad matematik istället erfarenheter från den konkreta världen tillsammans med vissa principer för grundläggande neurologisk kognition och en medfödd förmåga till den allra mest elementära matematiken som är det matematiska tänkandets bas. Och det är precis det som ger matematiken dess karaktär som stabil, precis, generaliserbar, symboliserbar, beräkningsbar, konsistent inom sina delområden, universellt tillgänglig och effektiv för att på ett precist sätt konceptualisera ett stort antal aspekter av världen som vi upplever den.

Kritik har dock riktats mot Lakoff och Núñez beskrivning och man menar bland annat att den typ av matematiskt tänkande som beskrivs möjligtvis kan fånga den intuitiva aspekten av matematik, men helt missar den formellt logiska (Madden, 2001). Det kanske till och med skulle kunna vara så att viss grundläggande matematik skapas på det sätt som Lakoff och Núñez beskriver men att mycket annan matematik måste skapas på ett annat, mer logiskt formalistiskt sätt (Devlin, 2009; Leron, 2004).

Diskussion och avslutning

Matematiken har många ansikten och efter en genomgång som denna ligger det nära till hands att dra slutsatsen att matematiken framstår på olika sätt beroende på från vilket håll man betraktar den. Frågan om de matematiska objektens ontologiska status, dvs i vilken mening de existerar, är i högsta grad aktuell än idag och som vi sett många prov på så är chansen att vi ska uppnå koncensus inte stor. Kanske är det så att varje betraktelse av matematik som vi redogjort för bidrar med sin lilla del till bilden av vad matematiken egentligen är. Mångfalden av perspektiv ger i sig en mer fullständig och korrekt bild.

Den mest grundläggande frågan vi berört är alltså den om de matematiska objektens natur och existens. Den mest extrema hållningen hämtar inspiration från Platons idévärld. De matematiska objekten existerar inte bara i vår värld utan till och med oberoende av vår värld, i en slags transcendent mening. Denna syn kan givetvis kritiseras för att vara ovetenskaplig. Som Lakoff och Núñez påpekar skiljer en platonistisk syn på matematiken sig inte nämnvärt från en tro på Gud. Båda är omöjliga att föra i bevis. Men hur kommer det sig då att så många praktiserade matematiker ändå beskriver det matematiska arbetet som en upptäcktsfärd i ett redan färdigt landskap, där det snarare gäller att upptäcka nya sanningar än att uppfinna dem? Många matematiker säger sig, som Philip J. Davis (2000) påpekar, vid en direkt konfrontation snarare se matematiken formalistiskt, dvs som ett ”spel” eller en ren tankekonstruktion utan någon som helst förbindelse med den verkliga världen men som Davis spekulerar är detta kanske mest ett sätt att komma enkelt undan.

Matematikern och sannolikhetsteoretikern Olle Häggström (2008) benämner detta som en *platonsk känsla* (med referens till filosofen Daniel Dennets zoombiska känsla) och menar att det kommer an på en matematikfilosofi som förnekar platonismen att förklara den platonska känslan hos så många matematiker. Den moderna humanistiska och konstruktivistiska matematikfilosofierna ger egentligen inte någon sådan förklaring. Den kognitionsbaserade syn på matematiken som Lakoff och Núñez argumenterar för gör det egentligen inte heller, i alla fall inte explicit, men med tanke på att det inom kognitionsvetenskap finns försök att förklara människans benägenhet till religion kanske försök till förklaring av den platonska känslan inte ligger långt borta.

En annan ”attack” mot den platonska känslan skulle kunna vara att beskriva den som en slags efterhandskonstruktion. Liksom när det gäller historieskrivning i allmänhet är det vinnarna som definierar historien. Både Hersh och Ernest argumenterar för att matematiken är en slags undersökande verksamhet. De koncept och teorier som överlevt har gjort det i konkurrens med många andra som kanske aldrig kom längre än till matematikerns papperskorg, även om många av dem kanske rent formellt var korrekta. I en slags matematisk evolution är det de starkaste koncepten som överlever. Och det är kanske bara i efterhand som de ter sig som självklara – så självklara att det verkar som de fanns där hela tiden redo att upptäckas?

Men i någon mening kvarstår frågan ändå för vad det då är som guidar denna evolution? I Hershs humanistiska beskrivning av matematiken värderas satser, bevis och teorier alltid i ett slags sociologiskt perspektiv. Detta är visserligen en intressant observation i sig, eftersom det uppmärksammar att vad som betraktas som matematiskt korrekt, i själva verket beror på dessa sammanhang (t ex de historiska sammanhangen). Men det är ju fortfarande i slutändan människor som fäller avgörandena. Hur vet vi att vi gör de rätta valen?

I Lakatos beskrivning är matematiken i högsta grad felbar och därmed inte absolut sann i någon slags platonistisk mening. Men i första hand handlar det då inte om felaktiga bevis eller förbiseenden av andra slag. Ett sätt att tolka Lakatos är att det snarare är de informella matematiska idéerna än de formella objekten som är det som den matematiska vetenskapen handlar om. Många matematiska koncept dyker först upp på ett naturligt sätt i en viss del av matematiken och karakteriseras där med hjälp av definitioner och satser. Men sedan utvidgas konceptets giltighet ofta till andra områden genom att man tar fast på någon slags fundamental idé i konceptet kärna och sedan justerar definitionerna något för att anpassa konceptet till den nya ”miljön”. Ofta blir konsekvensen att alla de gamla satserna om konceptet inte längre gäller i den nya miljön, men också att justerade satser och bevis för dessa kastas nytt ljus över konceptet i dess originalmiljö. I Lakatos tolkning är alltså matematikens främsta uppgift att studera den lösa informella idé som kärnan i ett sådant koncept utgör och då är konceptet i sin originalform bara en approximation av den mer utvecklade formen av konceptet och därmed i princip en felaktig beskrivning.

Men Lakatos beskrivning innebär egentligen inte heller något explicit vederläggande av en platonistisk syn på matematiken, snarare flyttas problemet till att istället handla om de matematiska idéernas existens och vi har kvar problemet med att förklara vad som bestämmer riktningen på den matematiska idéutvecklingen. Ett enkelt svar är kanske igen att det är olika teoriers styrka när det gäller förklaringsvärde och vid problemlösning (inom och utom matematiken) som sätter normen, vilket leder oss in på frågan om matematikens användning.

Det grundläggande frågan när det gäller tillämpningar av matematiken utanför matematikens eget område är hur denna abstrakta konstruktion så ofta kan fungera så väl för att beskriva världsliga, konkreta fenomen. Detta faktum i sig inbjuder ju till att i likhet med Quine och Putnam gå tillbaka till en naturalistisk syn där matematiken i själva verket ses som en del av den verkliga världen. Men om vi lägger denna filosofiska hållning åt sidan så har vår översikt inte gett oss definitiva svar på varför matematiken, med Wigners ord, inom så många områden är så *förbluffande effektiv*. Max Tegmarks svar att det beror på att vårt universum (och i hans multiversumteori *the ultimate ensamble*, alla möjliga universum) i praktiken är en matematisk struktur, skulle förklara det hela, men detta får nog betraktas som en spekulation än så länge. Förklaringen att det beror på matematikens platonistiska karaktär kan som Lakoff och Núñez påpekar i sin kritik av *the romance of mathematics* avfärdas som ovetenskaplig även om deras argument snarare är av naturvetenskaplig än filosofisk karaktär. I Hershs humanistiska beskrivning av matematiken blir de matematiska objekten som sociala överenskommelser, men inte skapade helt godtyckligt, utan med inferens från vår omgivande värld. Med den synen framstår matematikens effektivitet som något mindre förbluffande. Matematiken har helt enkelt genom hela sin framväxt inspirerats av erfarenheter och iakttagelser som vi människor har gjort, må de vara av matematisk eller konkret art. Även Lakoff och Núñez beskrivning öppnar för liknande tolkningar. I deras perspektiv är det ännu tydligare hur den grundläggande matematiken (tal, aritmetik etc) inte bara är inspirerad av utan närmast är en direkt avbild av vissa konkreta fenomen, via några grundläggande konceptuella metaforer. Men deras beskrivning av hur mer avancerade matematiska begrepp sedan växer fram hos individen handlar sedan mer om karaktären på den mänskliga kognitionen i sig. Visserligen tillkommer nya metaforer på vägen, men dessa har mer karaktären av enstaka styrimpulser än av kontinuerlig guidning från verkligheten. Så även om både Hersh och Lakoff och Núñez ger en tydlig indikation på att matematikens abstrakta begrepp trots allt har en koppling till människans erfarenheter av den verkliga världen så kvarstår frågan om matematikens generalitet. Om inspirationen för en viss del av matematiken antas komma från ett visst verkligt fenomen, hur kommer det sig då samma matematik kan beskriva även helt andra fenomen? Det är inte klart var svaren på detta står att finna. Kanske har det med matematikens karaktär att göra? Kanske är det en fråga om vad vi människor förmår uppfatta? Eller kanske är det en fråga om karaktären på universum?

Ett annat spår i vår översikt har varit frågan om matematikens begränsningar och här är kanske bilden något tydligare. Like lite som vi kan betvivla att matematiken har varit mycket effektiv som verktyg i diverse utommatematiska sammanhang kan vi betvivla att det som Skovsmose (2005) beskriver också finns problem med användandet av matematik i många sammanhang. Ibland handlar det om att den matematiska modellen inte fångar alla relevanta aspekter av ett visst fenomen. Detta kan givetvis vara ett stort problem i praktiken, men rent formellt är det ofta tydligt vilka antaganden den matematiska modellen egentligen bygger på. Möjligen kan man ibland önska sig att denna tydlighet inte formuleras så att det endast är den matematiskt skolade som har möjlighet att förstå modellens antagande utan de också görs tydliga i den kontext där fenomenet hör hemma. När modellens giltighet avsiktligt eller oavsiktligt undanhålls finns det risk att matematikanvändningen i själva verket blir en slags maktutövning, som Taleb (2007) beskriver.

Ett mer komplext problem är det som ovan illustrerades med Black-Scholes-Mertons formel för prissättning av finansiella derivat. Exemplet visar att en storskalig användning av en matematisk modell på vad som i grunden är ett fenomen styrt att människor riskerar att påverka det system som modelleras. Det blir då en viktig fråga att tydliggöra hur fenomenet påverkas, och hur denna påverkan går till.

Ur ett skolmatematiskt perspektiv är det förstås vanskligt att dra några långtgående slutsatser av våra undersökningar. Men det är värt att återknyta till Paul Ernest (2000) som menar att det är viktigt att elever förstår att det finns många olika uppfattningar om matematikens natur och att det pågår diskussioner om grundläggande matematikfilosofiska frågor. Det gäller naturligtvis också matematikens oerhörda effektivitet som verktyg i naturvetenskaper och i andra sammanhang. Men som Skovsmose (2005) påpekar är det likaledes viktigt att eleverna får insikt i att matematikens styrka också i någon mening är dess begränsning. Matematikens styrka är hur den gör även komplexa fenomen konceptualiserbara och beräkningsbara, men i många fall, och i alla där mänskligt beteende är en del av det som modelleras, måste förenklingar göras. En konsekvens av en sådan syn på matematikens användning är att matematikutbildning i likhet med naturvetenskaplig utbildning å ena sidan måste ta på sig att ge medborgarna ett förtroende för matematikens effektivitet för att konceptualisera och beräkna olika fenomen, men å andra sidan också utrusta medborgarna med en nödvändig insikt i matematikens begränsningar. Utan detta blir det som Skovsmose och Taleb beskriver en fara att matematiken används som ett maktmedel där ämnets precisa och absoluta karaktär i sig blir argumentet, snarare än den aktuella modellens relevans.

Men också en del av en matematisk allmänbildning är att inse att matematik faktiskt används i många delar av samhället och därmed att samhället är påverkat av matematiken på gott och ont.

När det gäller de matematiska objektens natur finns det skäl att tro att många elever i skolan ser matematiken som huvudsakligen formalistisk. Ur ett vetenskapligt perspektiv finns enligt denna översikt inte något som säger att en sådan uppfattning skulle vara mindre korrekt än någon annan. Men som både Ernest och Hersh påpekar ligger den långt från hur de flesta arbetande matematiker upplever sitt ämne. Liksom Ernest och Hersh är även Lakoff och Núñez tydliga i sin kritik av den platonistiska synen på matematik, men trots att de tre perspektiven som dessa företräder på många sätt är olika så verkar de alla framhäva matematikens undersökande och osäkra karaktär samtidigt som de också lyfter fram dess abstraktion, tydlighet och precision. En tolkning som de kanske inte skulle gilla själva är att det för den som arbetar med matematik i själva verket rent pragmatiskt framstår som ganska effektivt att se matematiken som ett existerade landskap där upptäckter kan göras. Men för att inte gå allt för långt från det humanistiska budskapet är det kanske bäst att lägga till att det i så fall är ett landskap bestående av matematiska *idéer* snarare än av matematiska *objekt* (i Lakatos mening). En sådan tolkning av matematiken får också konsekvenser för vad man egentligen kräver av elever i skolan. Som Keith Devlin (2007) har påpekat är det i en skolsituation ofta orimligt att kräva fullständig konceptuell förståelse för ett visst begrepp. Både historiska undersökningar av matematikens begreppshistoria och den beskrivning som Lakatos ger antyder ju att hur ett begrepp förstås i högsta grad är kontextberoende. Devlins råd är att det är genom att själv *arbeta med matematiken* som en rimlig typ av förståelse kan uppnås och då handlar det på ett naturligt sätt om en *funktionell förståelse*, som kopplar till den kontext där begreppen faktiskt används.

Referenser

Antell, S. E. & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, 54, 695–701.

Ashkenazi, S., Henik, A., Ifergane, G. & Shelef, I. (2008). Basic numerical processing in left intraparietal sulcus. *Cortex*, 44, 439–448.

Bernstein, P. (1992). *Capital ideas: The improbable origins of modern Wall Street*. New York: Maxwell Macmillan International.

Bernstein, P. L. (2007). *Capital ideas evolving*. Hoboken: John Wiley & Sons.

Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (3), 637–654.

Blomhöj, M. (1991). Mathematical modelling at upper secondary school. I M. Niss, W. Blum & I. Huntley (red), *Teaching of mathematical modelling and applications*, (s 187–194). London, Ellis Horwood.

Blomhöj, M. (2003), Modellering som undervisningsform. I O. Skovsmose och M. Blomhöj (red), *Kan det virkelig passe? Om matematiklearing* (s 51–71). Köpenhamn: L & R Uddannelse.

Blum, W. m fl (2003). *ICMI-Study 14. Applications and modelling in mathematics education* (Discussion document). Special issue of ICMI-Bulletin.

Colyvan, M. (2001). *The indispensibility of mathematics*. Oxford university press.

Colyvan, M. (2002). Mathematics and Aestetic considerations in science. *Mind*, 111, 69–78.

Davis, P. J. (2000). *The education of a mathematician*. Natick: AK Peters.

Dehaene, M., Piazza, P., Pinel & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487–506.

Dehaene, S. (2007). A few steps towards a science of mental life. *Mind, Brain, and Education*, 1, 28–49.

Devlin, K. (2007). *What is conceptual understanding?* Tillgänglig 2009-09-10 på http://www.maa.org/devlin/devlin_09_07.html

Devlin, K. (2008). *How do we learn math?* Tillgänglig 2009-09-10 på http://www.maa.org/devlin/devlin_12_08.html

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY Press.

Ernest, P. (2000). Why teach mathematics? I S. Bramall & J. White (red), *Why learn maths?* London: Bedford Way Papers.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8, 307–314.

Field, H. (1980). *Science without numbers: A defence of nominalism*. Oxford: Blackwell.

Galiani, S. S. (2003). C*opula functions and their application in pricing and risk managing multiame credit derivative products* (Thesis for master of science). Kings College, London.
Grady, J. (1997). *Foundations of meaning: Primary metaphors and primary scenes* (PhD dissertation, Linguistic department). University of California at Berkely.
Gårding, L. (1977). *Encounter with mathematics*. New York: Springer Verlag.
Hamming, R. W. (1980). The unreasonable effectiveness of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87 (2).
Helenius, O. & Wallby, K. (red) (2008). *Människor och matematik. En läsebok för nyfikna*. NCM, Göteborgs universitet.
Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford University Press.
Häggström, O. (2008). *Riktig vetenskap och dåliga imitationer.* Stockholm: Fri tanke förlag.
Joseph, G. G. (1991).*The crest of the peacock – Non-european roots of mathematics*. London: I.B. Tauris.
Kline, M. (1972). *Mathematics in western culture*. London: Pelican.
Kline, M. (1980). *Mathematics – The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.
Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.
Lakatos, I. (1983a). Falsification and the methodology of scientific research programmes. I I. Lakatos, *Philosophical Papers. Vol. I and II*. Cambridge University Press.
Lakatos, I. & Zahar, E. (1983b). Why did Copernicus's research programme supersede Ptolemy's? I I. Lakatos, *Philosophical Papers. Vol. I and II*. Cambridge University Press.
Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press.
Lakoff, G. & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to western thought*. New York: Basic Books.
Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York:Basic Books.
MacKenzie, D. & Millo, Y. (2003). Constructing a market, performing theory: the historical sociology of a financial derivatives exchange. *American Journal of Sociology*, 109 (1), 107–145.
MacKenzie, D. (2006). *An engine, not a camera: How financial models shape markets*. Cambridge: MIT Press.
MacLane, S. (1986). *Mathematics, form and function*. New York: Springer Verlag.
Madden, J. (2001). Book review: where mathematics comes from. *Notices of the AMS*, 48 (10).
Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Harlow, Prentice Hall.

Melia, J. (2000). Weaseling away the indispensibility argument. *Mind,* 109, 455–79.
Melia, J. (2002). Response to Colyvan. *Mind,* 111, 75–79.
Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science,* 4 (1), 141–183.
Ministry of education of People's republic of China (2004a). *Mathematics curriculum standards, full time obligatory education*. Tillgänglig 2009-09-13 på http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/kinagrund.pdf
Ministry of education of People's republic of China (2004b). *Mathematics curriculum standards, ordinary senior secondary.* Tillgänglig 2009-09-13 på http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/kinagym.pdf
Ministry of education, Singapore (2006). *Mathematics syllabus primary.* Tillgänglig 2009-09-13 på http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/singaporegrund.pdf
Mouwitz, L. (2004). *Bildning och matematik* (Högskoleverkets rapportserie 2004:29R). Stockholm: Högskoleverket.
New Zealand Ministry of education (2007). *The New Zealand curriculum*. Wellington: Learning Media Limited.
Niss, M. (red) (2001). *Matematikken og verden*. Köpenhamn: Fremad.
Nordin, S. (1995). *Filosofins historia – Det västerländska förnuftets äventyr från Thales till postmodernismen*. Lund: Studentlitteratur.
Núñez, R. (2004). Do real numbers really move. Language, thought and gesture: The embodied cognitive foundation of mathematics. I F. Iida, R. Pfeifer, L. Steels och Y. Kunioshi (red), *Embodied artificial intelligence* (s 54–73). Berlin: Springer Verlag.
Núñez, R. (1999). Could the future taste purple? Reclaiming mind, body and cognition. In R. Núñez & W. J. Freeman (red), *Reclaiming cognition: The primacy of action, intention and emotion*. Thorverton: Imprint Academic.
Núñez, R. (2008). Mathematics, the ulitmate challenge to embodiment: Truth and the grounding of axiomatic systems. *Handbook of Cognitive Science,* 373–393.
Núñez, R. & Freeman, W. J. (red) (1999). *Reclaiming cognition. The primacy of action, intention and emotion*. Thoverton UK: Imprint Academic.
Núñez, R. & Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and e-d continuity. *Mathematical Cognition,* 4 (2), 85–101.
Olilieri, G. (2006). Mathematics as a quasi-empirical science. *Foundations of Science,* 11 (1–2), 1–49.
Piltz, A. (1978). *Medeltidens lärda värld*. Stockholm: Carmina.
Pimm, D., Beisiegel, M. & Meglis, I. (2008). Would the real Lakatos please stand up. *Interchange,* 39(4), 469–481.
Popper, K. (1959, 1992). *The logic of scientific discovery.* London: Routledge.
Putnam, H. (1979). *Philosophical papers. Vol. 1, Mathematics, matter and method.* Cambridge University Press.

Qualifications and curriculum development agency (2007). *The National curriculum 2007: Mathematics*. Tillgänglig 2009-09-13 på http://curriculum.qcda.gov.uk/key-stages-3-and-4/subjects/mathematics/index.aspx

Sarukkai, S. (2005). Revisiting the "unreasonable effectivness" of mathematics. *Current Science*, 88(3).

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994) . The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.

Skolverket (2000). *Kursplan för matematik*. Tillgänglig 2009-09-13 på http://www.senrp.se/sb/d/2386/a/16138/func/kursplan/id/3873/titleId/MA1010%20-%20Matematik

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education*. Rotterdam: Sense.

Soros, G. & Woodruff, J. (2008). The financial crisis: An interview with George Soros. *The New York Review of Books*, 55(8).

Taleb, N. N. (2007). *The black swan. The impact of the highly improbable*. New York: Random House.

Tegmark, M. (2007). The mathematical universe. *Foundations of Physics*, 38, 101–150.

Tymoczko, T. (1979). The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 76(2), 57–83.

Tysk, J. (2008). Hur dyr är optionen? I O. Helenius & K. Wallby (red), *Människor och matematik. En läsebok för nyfikna*. NCM, Göteborgs universitet.

Undervisningsministeriet (2008). *Bekendtgørelse om uddannelsen til højere teknisk eksamen* (htx-bekendtgørelsen). Tillgänglig 2009-09-13 på http://www.uvm.dk/Uddannelse/Gymnasiale%20uddannelser/Fagenes%20sider/Fag%20L-R/Matematik%20-%20htx.aspx

Wallin, H. (2005). *Den osynliga matematiken*. Stockholm: Liber.

Wedberg, A. (1968). *Antiken och medeltiden. Filosofins historia, band I*. Stockholm: Bonniers.

Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1–14.