OLA HELENIUS

Problemlösning med resultat

Anette Sternefors var lärare i en klass som presterade mycket bra på Kängurutävlingen 2007. Nämnaren har träffat henne och diskuterat hennes undervisning som bland annat innnehåller mycket problemlösning.

Varje år är det några klasser vars resultat sticker ut på Kängurutävlingen. I Nämnaren 1, 2005 skriver Stavros Louca, som ofta haft elever med toppresultat, om sin undervisning. Towe Bergström skriver i Nämnaren 3, 2007 om en klass som förbättrade sig väldigt mycket mellan två tävlingar.

2007 var det en klass i Hovstaskolan i Örebro som utmärkte sig genom en mycket bred topp. Hela sex elever hade 60 poäng eller bättre av 72 möjliga. 60 poäng är bra, men det är alltså bredden, att så många elever hade så bra, som är ovanligt. Jag åkte dit för att prata med läraren Anette Sternefors.

Klassen som lyckades så bra i Kängurutävligen går nu i femman och har en ny lärare. Anette har en ny klass 1. När jag kommer är det matematiklektion i halvklass. Den inleds med en genomgång där alla sitter med sina pennor och böcker på den runda mattan på golvet. Det handlar om addition och subtraktion i talområden 0–20.

När jag senare pratar med Anette på tu man hand berättar hon att hon ser till att hålla genomgångar för hela klassen ganska ofta. Hon refererar till Madeleine Löwings bok *Matematikundervisningens dilemman* där det beskrivs hur läraren abdikerat och i sin vilja att individualisera istället har hamnat i situationen att elevernas arbete blir enskilt och undervisningen närmast blir privat – en angelägenhet mellan läraren och en elev i taget. ”Då försvinner ju det som är så viktigt i matematik, att diskutera”, säger Anette. ”Kanske kan de frekventa genomgångarna ha varit en del i det fina Kängururesultatet, eftersom de har lett till att vi pratat mycket matematik?”

Trots att Anette haft klasser med flera duktiga elever försöker hon alltså hålla hela klassen samlad inom samma avsnitt i boken. ”Jag tror inte på fri fart utan har mattestopp”. Istället för att eleven får räkna vidare i boken så har Anette plockat fram material från andra ställen som både skall vara en utmaning för de eleverna som hunnit långt i boken och som dessutom skall handla om de begrepp som klassen för tillfället jobbar med.

Problemlösning i grupp

Det här med samtal och diskussion som en del i det matematiska arbetet i klassen går igen i flera delar av det sätt som Anette jobbar på. Hon har till stora delar följt Ann Ahlbergs bok *Barn och matematik* och jobbar med problemlösning i form av mattesagor. Basen för det hela är lite kluriga uppgifter som ofta är av öppen typ och skall stimulera till dialog. Barnen jobbar med uppgifterna i grupp. I varje grupp finns minst en

En genomgång på mattan i klassrummet. Idag handlar det om pengar.

god läsare. En person utses till ordförande och denna har i uppgift att se till att alla i gruppen är med på alla olika lösningar som de får fram och skall dessutom presentera den lösningen gruppen kommer överens om för hela klassen. När Anette förklarar upplägget förstår jag hur det, speciellt ihop med öppna uppgifter, kan vara ett bra sätt att stimulera till diskussion. Anette berättar att Ahlberg skriver: *De lösningsmetoder en elev använder sig av på egen hand blir en återspegling av de metoder hon använt sig av i samspel med andra.* Precis det hände i hennes klass också. ”Det märkte jag sedan, de tog ju tips av varandra.”

Arbetet med mattesagorna lades upp som ett projekt. ”Vi körde matteprojektet på onsdagar, då lade vi bort boken och jag hade bokat grupprum.” En intressant effekt av detta blev att matematiken lyftes upp som något intressant och speciellt. ”Det blev lite viktigt för barnen”, säger Anette, ”och varje gång de kom tillbaka från grupprummen var de väldigt ivriga att få berätta om sina fina lösningar.”

Föräldrar och veckoläxor

Ett sätt att få även föräldrarna lite engagerade i matematikundervisningen är de veckoläxor som följer med fredagens veckobrev hem. ”Så här i ettan krävs det ju ofta att föräldrarna är med och läser, då får de också se lite vad vi håller på med”, säger Anette.

Precis som när det gäller de extrauppgifter som nämndes tidigare så väljs uppgifterna till veckoläxan så att de både skall anknyta till de begrepp som klassen jobbar med i skolan och så att de skall bli en utmaning för eleverna.

Trots att de har en hel vecka på sig står barnen ofta redan på måndag morgon och viftar med sina plastfickor med lösningarna i. ”Det var så roligt att jag gjorde det direkt när jag kom hem i fredags” är en vanlig kommentar.

Anette brukar innan barnen går hem på fredagen berätta lite vad som står i veckobrevet till föräldrarna. Då brukar hon ock-

Hugo funderar.

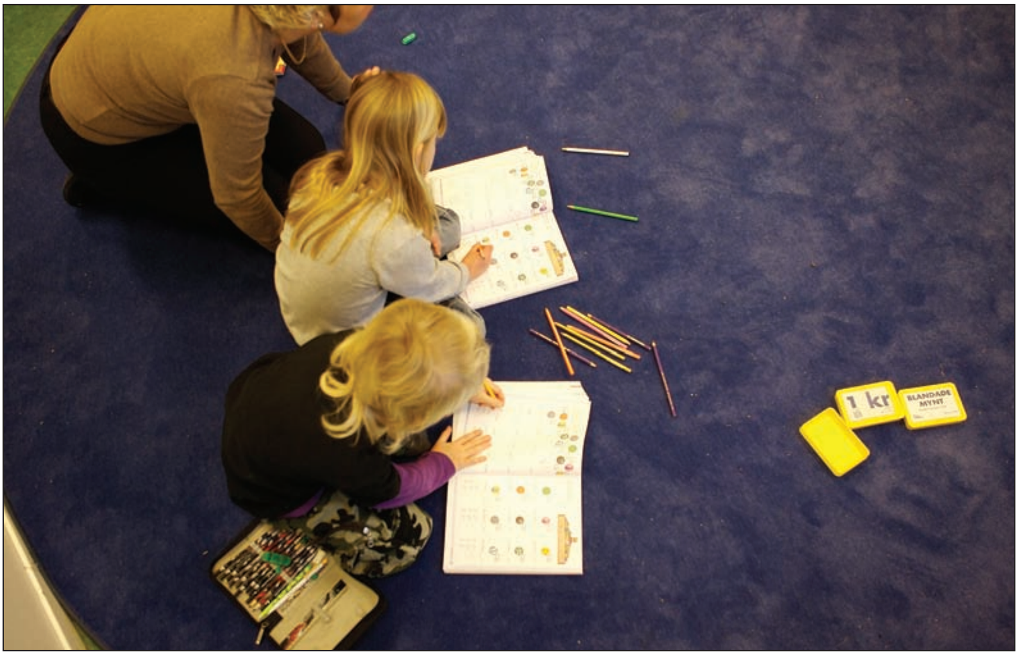
så passa på att berätta vad veckoläxan handlar om och ge lite tips. ”Kanske detta gör barnen lite extra sugna på att ta tag i läxan direkt när den kommer hem.” Många föräldrar vittnar också om att barnen sliter upp läxan direkt när de kommer från skolan på fredagen.

Bildstöd

En sak som Anette återkommer till några gånger under vårt samtal är hur hon tidigt försöker få eleverna att rita bilder som kan hjälpa dem att förstå, tolka och lösa matematikuppgifter. En sak jag slås av är att hon angriper detta från två håll. Å ena sidan handlar det om att inte fokusera för mycket på bildens utseende: ”Om uppgiften handlar om grisar får man inte lägga ned allt krut på att rita en fin gris, kanske räcker det med en ring med öron som får symbolisera grisen.” Å andra sidan finns det uppgifter där det inte är självklart vad som skall ritas. Anette berättar om ett exempel som handlade om att dela upp talet fem i 2 + 3, 1 + 4 osv. För en elev i ettan var det här lite svårt, men genom att rita sina fem familjemedlemmar och tänka på dem blev det enkelt. Man kan säga att detta motsvarar att å ena sidan närma sig matematiken genom att gå mot en mer abstrakt representation och å andra sidan försöka hitta en konkretisering av en representation som redan är matematisk abstrakt.

Ett rum för matematik

Samtalet med Anette hålls i skolans nya matematikrum. Det ska bli en matematikverkstad. Ett av de två rummen som skolans specialpedagog tidigare hade tillgång till har nu, med stöd av rektor, inlett sin metamorfos till ett rum för matematik. Det är beslutat att det skall satsas extra på matematik i hela skolområdet i år. ”Det har inneburit att vi fått stöd till det här matterummet och också att vi har matematikfokus på många av våra pedagogiska kaféer”, säger Anette och fortsätter, ”Det här har fått ganska stora konsekvenser för intresset för matematikundervisning bland lärarna. Fler och fler är inne på NCM:s webbsidor och letar material och vi diskuterar mycket mer matematik sinsemellan nu.”



Det har också varit aktiva diskussioner om vad som skall finnas i matematikrummet. Alla har fått komma med önskemål. Även slöjdlärarna har blivit engagerade och har bidragit med ett smart system för hur utlåningen av föremålen i verkstaden skall organiseras.

I skolområdet har man sedan ett par år en speciell matematikgrupp som förutom att planera studiedagar med matematikinriktning också tagit fram en gemensam kursplan som skall fungera som en röd tråd. De har också kontakt med kommunens matematikutvecklare.

Smittande entusiasm

Det ökade intresset för matematik har gjort att fler klasser på skolan deltog i årets Kängurutävling. Anettes nya klass ett var med i Milou. Flera barn hade alla rätt eller bara något enstaka fel, så kanske kommer de följa sin föregångarklass i fotspåren.

Det är svårt att säga exakt vad som gjorde den förra klassen så bra. Det genomtänkta upplägget för att skapa och stödja kommunikation om matematik i klassen är säkert en viktig del men antagligen är det en kombination av många faktorer. Det är däremot lätt att se att en lärares entusiasm och engagemang i matematikundervisningen smittar av sig på eleverna. Att andra lärare, skolan och hela skolområdet också verkar vara på gång i sitt matematikengagemang inger gott hopp för framtiden.

LITTERATUR

Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Bergström, T. (2007). Mina tankar kring matematikundervisning. *Nämnaren 35* (3), 35-37.

Louca, S. (2005). Min undervisning. *Nämnaren 32* (1), 18-20.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman. Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet.* Lund: Studentlitteratur.

ULLA WENNERLUND

Kastanjematematik

Att fånga matematiken i ögonblicket och utgå från elevernas intressen är något vi strävar efter. Här ges ett exempel från ett arbete med kastanjer, som givit möjligheter att diskutera bl a tal och mätning.

Hösten är här och Enskede skolas hästkastanjer välkomnar mig som vanligt när jag går över skolgården på morgonen. På asfalten ligger nattens efterlängtade tillskott av kastanjer, inbäddade i sina taggiga skal. De barn som kommer först börjar ivrigt plocka ut de glänsande juvelerna och lägga dem i sina samlingar medan jag går in för att förbereda dagens lektioner för mina tvåor.

När skolklockan ringer kommer två av mina elever med hela sin kastanjesamling i en stor och mycket tung kasse.

– Ulla! Titta så många vi har samlat!

Glädje och stolthet lyser i deras ögon. Och för mig yppar sig ett gyllene tillfälle att göra matematik tillsammans med mina elever. När vi samlats i klassrummet berättar jag att vi idag ska ha kastanjematematik tillsammans. Vi ska räkna hur många kastanjer som finns i kassen! Barnen blir genast engagerade och vill börja räkna men jag ser fler möjligheter att göra matematik av detta än att bara räkna kastanjer rätt upp och ner.

– Nu vill jag att ni först gissar hur många kastanjer det är.

Barnen gör var och en sin egen gissning och vi bokför den på blädderblocket. De gissar på tal mellan hundra och femhundra vid denna första uppskattning av antalet.

Nästa uppgift för dem blir att parvis bygga en rad med kastanjer som de tror är en meter lång. De tretton paren sätter genast fart och med stor koncentration lägger de sina kastanjer på rad. När de tror att de har lagt en 1 meter lång rad med kastanjer får de kontrollmäta med tavellinjalen och korrigera så att raden verkligen är en meter.

– Nu ska ni räkna hur många kastanjer ni har på er meter.

Genast är barnen i gång med att räkna och nu bokför vi på blädderblocket hur många kastanjer de hade på sina metrar. Tretton meter med kastanjer har vi och det är mellan 33 och 39 kastanjer i raderna.

– Varför blir det så olika antal?

Barnen har flera förklaringar och här är några:

- Kastanjerna är olika stora.
- De har olika form och om man lägger de smala sidorna mot varandra så tar de mer plats och då får det inte plats lika många.
- Om raden inte är rak så får det plats fler.
- Det kanske är lite, lite mellanrum mellan kastanjerna och då får inte lika många plats.

Vi har nu tretton kastanjemetrar och massor av kastanjer kvar i kassen så det är dags att bygga fler metrar, men innan dess får de som vill ändra sin gissning av det totala antalet kastanjer vi hade. Alla vill ändra sin gissning och alla ändrar den uppåt. Någon gissar på 1000 kastanjer och då går ett sus genom klassrummet. Ett tusen kastanjer, det vore magiskt!

Ivrigt läggs kastanjerna på nya rader och nu använder barnen sin ”första meter” som referensmått. När kastanjerna är slut har vi 28 meter kastanjer. Det fattades ett par till den sista metern men det ordnades snabbt av någon som hade lite kastanjer på sin hylla i korridoren.

– Nu blir det ju fel med gissningen, utbrast en av eleverna.

De andra lugnade henne snabbt.

– Vi vet ju att vi bara lade dit två stycken!

På blädderblocket fyllde vi nu på med hur många kastanjer det var på de nytillkomna metrarna. Vi kunde av detta gemensamt utläsa att det var allra vanligast att metrarna innehöll 36 kastanjer. Det gjorde 13 av våra metrar, nästan hälften. Sju av våra kastanjemetrar hade 37 kastanjer. Det fanns tre metrar med 35 kastanjer, två med 38 st och sedan en med vardera 33, 34 och 39 st. Om vi hade gjort en tabell av det hela skulle det ha sett ut så här:

antal kastanjer/meter	antal metrar
33	1
34	1
35	3
36	13
37	7
38	2
39	1

Hur skulle vi nu göra för att räkna samman kastanjerna?

Barnen såg förstås snabbt att man skulle kunna ”plussa” samman alla kastanjer men de såg också att det skulle bli lite svårt.

– Vet någon om att det finns ett enklare sätt när man måste plussa ihop flera likadana tal, undrade jag. En elev visste bestämt att när man multiplicerar så är det ju samma tal som läggs ihop många gånger. Det tog jag fasta på och visade på tavlan att istället för att skriva $37+37+37+37+37+37+37$ så kunde vi skriva $7 \cdot 37$ och då kunde vi också skriva $13 \cdot 36$ och så vidare.

När vi räknade tog vi hjälp av miniräknaren. Olika barn fick hjälpa till att utföra beräkningarna på miniräknaren och på tavlan kunde vi sedan skriva:

$1 \cdot 39 = 39$ $\quad$ $3 \cdot 35 = 105$
$2 \cdot 38 = 76$ $\quad$ $1 \cdot 34 = 34$
$7 \cdot 37 = 259$ $\quad$ $1 \cdot 33 = 33$
$13 \cdot 36 = 468$

Då var det dags att räkna samman det här:
$39+76+249+468+105+34+33=$
– Tror ni att det blir mer än 1000?

Nu blev barnen lite tveksamma och ville ogärna gissa. Vi tittade då tillsammans hur många hela hundratal vi hade. Med hjälp av detta försvann barnens tvekan att gissa och några trodde att det skulle bli mer än tusen medan de flesta var övertygade om att det inte kunde bli tusen. Med hjälp av ”sekreteraren” som skötte miniräknaren kunde vi summera det hela till 1014 kastanjer!

Vår stora kasse hade rymt 1014 kastanjer eller 28 meter kastanjer! Att vi hade lagt dit ett par extra kastanjer var det vid det här laget ingen som brydde sig om.

Vi hade verkligen haft en lustfylld matematiklektion och detta matematiska innehåll hade barnen fått arbeta med:

- öva på att uppskatta antal – både utan och med referensmått,
- få en praktisk erfarenhet av hur lång en meter är – referensmått av längd,
- övning i att använda en linjal,
- resonera om matematik, varför fanns det olika många kastanjer på en meter,
- få en glimt av styrkan i att kunna använda multiplikation för att underlätta räknandet,
- få en erfarenhet av hur många 1000 är,
- göra en överslagsräkning,
- se nyttan av att kunna använda miniräknaren som hjälpmedel för beräkningar man inte klarar på egen hand.

Här är något av det man skulle kunna göra men som vi inte gjorde:

- räkna ut medelvärdet av antalet kastanjer på en meter,
- ta reda på medianvärdet av antaletkastanjer på en meter,
- göra diagram och tabeller som visar hur många kastanjer det fanns på metrarna,
- räkna ut hur många kastanjer man skulle behöva för att göra en 100 meter lång rad,
- uppskatta vikten på och väga kastanjerna,
- ta reda på hur många kastanjer som behövs för att det ska väga 30 kg (ungefär som en elev i tvåan).

Jag har även prövat att ha kastanjematematik med ettor och det var lika givande. Vem vet, kanske blir det en tradition med kastanjematematik varje höst, för kastanjer är ett fantastiskt material att arbeta med. Vem kan motstå dessa bruna, glänsande skönheter?

För ovanlighetens skull

På Uppslaget presenteras två problem som är tänkta att uppmuntra till matematiska resonemang och kristallklar argumentation. I dessa och liknande problem är det viktigt att elevernas lösningar accepteras om de har bra argument för dem. Var lyhörd och öppen för olika sätt att tänka! Hur vill du själv lösa problemen?

Här är några exempel på resonemang kring problemet Flaggorna:

Exempel 1:

Rutigt mönster finns bara på flagga 1, därför skiljer sig den flaggan mest från de andra två.

Prickigt mönster finns på två flaggor.

Randigt mönster finns på tre flaggor.

Flagga 2 och 3 innehåller båda randigt och prickigt mönster, därför skiljer de sig lika mycket från flagga 1.

Exempel 2:

Det vanligaste är att man har ett randigt mönster i mitten. Därför är flagga 2 ovanligast.

Av flagga 1 och 3 är flagga 3 vanligast för där finns prickigt mönster som också finns i flagga 2 medan flagga 1 är ensamt om rutigt mönster.

Exempel 3:

Det mest ovanliga mönstret är det rutiga, det finns bara på en flagga.

Det näst mest ovanliga mönstret är det prickiga, det finns bara på två flaggor.

Det minst ovanliga mönstret är det randiga, det finns på alla tre flaggorna.

Varje flagga är indelad i tre delar. För att kunna räkna på "ovanlighet" bestämmer vi oss för att titta på varje liten del. Vi gör en tabell:

Mönster Flagga nr	Rutigt	Prickigt	Randigt
1	2	0	1
2	0	1	2
3	0	2	1
totalt	2	3	4

Vi bestämmer att man får 3 p för varje rutig del, 2 p för varje prickig del, 1 p för varje randig del.

Flagga 1 får då $2 \cdot 3\,p + 0 \cdot 2\,p + 1 \cdot 1\,p = 7\,p$
Flagga 2 får då $0 \cdot 3\,p + 1 \cdot 2\,p + 2 \cdot 1\,p = 4\,p$
Flagga 3 får då $0 \cdot 3\,p + 2 \cdot 2\,p + 1 \cdot 1\,p = 5\,p$

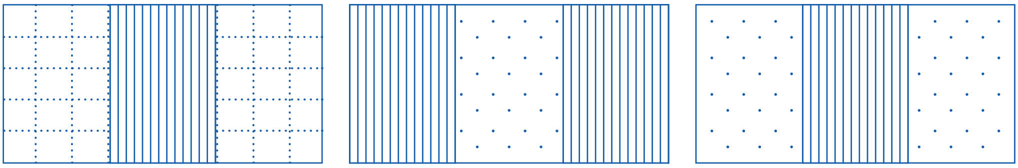
Flagga 1 är mest ovanlig, flagga 2 minst ovanlig.

Kerstin Hagland

Flaggorna

I en klubb har man tre grupper. De har gjort var sin flagga med lite olika utseende.

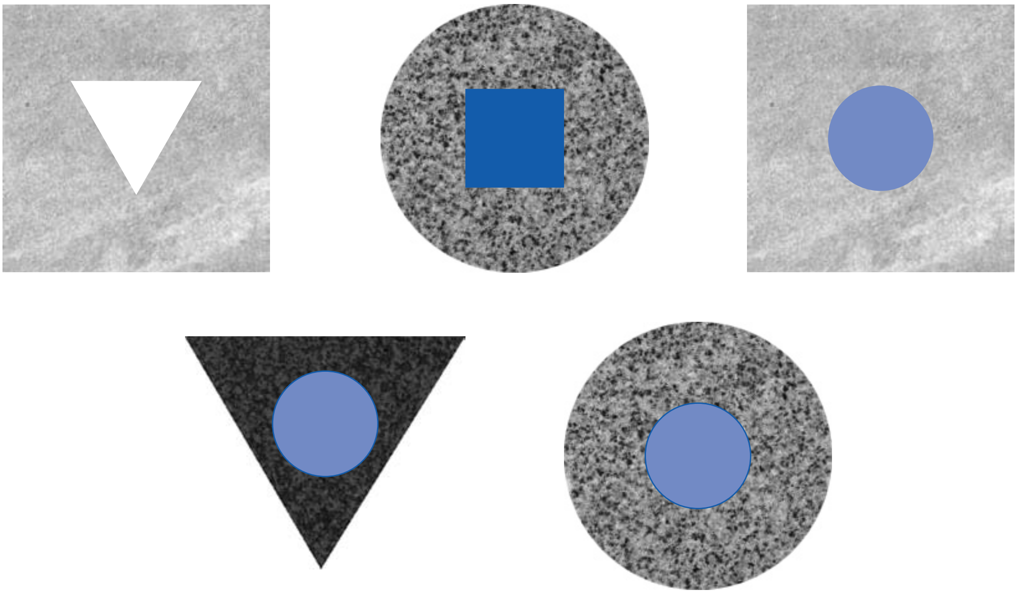
- ◇ Vilken av flaggorna skiljer sig mest från de andra två, tycker du? Varför det?
- ◇ Vilken av flaggorna skiljer sig minst från de andra två, tycker du? Varför det?
- ◇ Hitta på ett liknande problem. Lös det.



Stenarna

En forskare har hittat dessa stenar på en främmande planet.

- ◇ Vilken av stenarna skiljer sig mest från de andra fyra, tycker du? Varför det?
- ◇ Sortera de fem stenarna från den mest ovanliga till den minst ovanliga!
- ◇ Hitta på ett liknande problem. Lös det.



KARIN WALLBY

Matematikens vecka på Skarpaby

Skarpaby-Tätorp i södra Stockholm genomför under läsåret två veckor där matematik ska finnas med på alla lektioner och i all verksamhet. Alla barn och lärare, skolledningen och annan personal, däribland de i matsalen, är engagerade.

Under en vecka i oktober genomförde enheten Skarpaby-Tätorp i södra Stockholm *Matematikens vecka*. Nämnaren gjorde ett besök på skolan, på inbjudan av Lennart Charpentier, Maria Fransson och Katharina Nilborn, som alla deltar i Nämnarenprojektet inom den satsning som Kompetensfonden i Stockholm genomför. De beskrivningar som finns i denna artikel grundar sig dels på besöket på skolan och dels på berättelser som flera av lärarna och skolledarna bidragit med.

Bakom beslutet att genomföra veckan ligger en strävan att höja elevernas nivå i matematik. Enheten ser detta som en strategisk fråga och skolledningen har därför tagit beslut om att enheten ska ha en basvecka i matematik under höstterminen och en under vårterminen detta läsår. Under dessa veckor ska alla lärare och fritidshemspersonalen vara involverade i matematik.

På Skarpabyskolan bestämde man att målet skulle vara att matematiken skulle finnas med på något sätt under varje lektion i alla ämnen. Det innebär inte att hålla matematiklektioner hela dagarna, utan att visa på att matematik finns runt omkring oss, inte bara i matteboken. Fritidshemmet planerade också in olika matematikaktiviteter under veckan, bl a att göra en rekordbok, i stil med Guinness rekordbok. Utvärdering av matematikveckorna kommer att ske och i planeringen ligger att det ska bli en fortsättning kommande läsår.

Vid en konferens ett par veckor före matematikveckan samlades en mängd idéer in. Alla hade tillgång till denna sammanställning av tips och idéer inför sin planering. I den påpekas också vikten av att skolan dokumenterar veckans arbete, för elevernas och lärarnas skull, men också för att kunna använda vid presentation av skolans arbete.

På tisdagen i matteveckan samlas alla till konferens, tillsammans med skolledningen. Under halvtimmen innan visas *Donald Duck in Mathematics land* på lärarrummet. Vid mötet går man laget runt och alla får berätta vad de gjort och vad de har för planer för resten av veckan. På så sätt får man nya idéer och också synpunkter och stöd om man behöver. En ambition är att lyfta fram ”småsaker” med matematikanknytning, sådant som dyker upp, och genomgången visar att det finns gott om sådana möjligheter.

Matematik i slöjd och idrott

På slöjden är det referensmått i rummet som betonas. Hur hög är dörren? Hur högt är ett bord? En stol? Begreppen höjd, längd, djup och bredd, som alltid är centrala i träslöjd får extra uppmärksamhet. Praktisk problemlösning blir det kring uppgiften att mäta, om det bara finns en 30 cm linjal att mäta med. Hur ska man göra för att mäta längre än så?

Skolan ligger fint invid ett skogsområde och det är en ovanligt vacker oktober. På idrotten ägnar de sig åt orientering och skala. Efter ansträngande pass mäter man pulsen. För att den inte ska hinna ändras sker mätningen bara under 10 sek. Hur många slag blir det då på en minut?

Förskoleklassen tappar tänder

Borgens förskoleklass startade veckan med "mattegympa". En övning var att ställa upp sig i längdordning och en annan att gruppera sig efter olika instruktioner: tre barn tillsammans, 24 barn tillsammans ... . De lekte också Kinesiska muren och samlade skatter som de sedan ritade av och undersökte vidare: tre blåa halsband och fyra gula blir sju halsband tillsammans.

Klassen har gjort ett tandtappardiagram som visar hur många tänder som barnen har tappat. Just nu är det 36 tappade tänder, men de känner sig ganska säkra på att det talet kommer att öka.

... och väger sten

På torsdagar går de till skogen, så också denna torsdag. Den här dagen var de tillsammans med Borgens årskurs 3 som är klassens faddrar. Dagens uppdrag var att, tillsammans med sin fadder, hitta en sten som vägde 1 kg. Det var en svår uppgift. Det blev många stenar som vägdes: några alldeles för tunga och några alldeles för lätta. De hittade dock två stenar som vägde precis 1 kg! Den ena ligger numer i förskoleklassens glasskåp ifall man blir sugen på att känna hur mycket 1 kg känns. Några barn blev intresserade och fortsatte att väga saker.

– *En kotte väger ju inte ett dugg*, sa Isak.
– *Jo, men du måste nog ha fler än en om det ska synas på vågen.*

Isak samlade ihop 1 kg blöta kottar, som han sedan bar med sig hem.

Ettorna bär en ryggsäck

Ettorna har läst en bok om Edvins ryggsäck. Det stod i boken att det var en "rejäl" ryggsäck, så gruppen börjar med att diskutera det ordet. Nu ska de undersöka hur stor den kan ha varit och jämföra med sina egna ryggsäckar. De tittar på bilden och jämför hur stor del av ryggen som täcks av ryggsäcken och kommer fram till ungefär hur stor den kan ha varit. Edvin har plockat ner 15 böcker i sin ryggsäck och nu ska klassen göra det också. Kommer det att gå? Läraren, Katharina, har redan packat ner böcker i sin ryggsäck men när de kontrollerar är det bara 13 st, så ytterligare 2 måste hämtas. Först undersöker de en av pojkarnas ryggsäckar, de lägger ner böckerna en efter en. Snart återstår 3 böcker. Hur många är då i ryggsäcken? En av flickorna resonerar:

– *Det ska bli 13 med den* (pekar på en av de 3). Att 15 är 13 + 2 blev konkret då det saknades 2 böcker från början.

Men, hur många är det i säcken om det ska bli 13 när man lagt i ytterligare en? Det är inte helt lätt, men efter lite resonemang kommer gruppen fram till att det är *det som kommer före 13, 12*. Sen är pojkens ryggsäck helt full och en annan, större, ryggsäck plockas fram.

När alla böcker är nerpackade i den plockar läraren fram stenar. Edvin plockade nämligen också ner glitterstenar i sin ryggsäck. När också stenarna är nedstoppade, nu får det knappast rum, ska alla prova. Det är tungt och "man ramlar nästan baklänges!” Det är för mycket att bära så klassen gör som Edvin, fördelar bördan på två väskor. Men att dela 15 på 2 är inte helt lätt. De började med att ta varannan tills en återstår. Vems är den?

Är det rimligt?

I Förberedelseklassen och gruppen svenska som andraspråk har Gun arbetat med sina elever kring måttenheter, längd, volym och temperatur. Barnen har fått uppskatta olika längder, volymer och temperaturer och sedan har de mätt och jämfört. Ett viktigt begrepp som behandlats speciellt är ”rimligt”. Är det rimligt att springa 100 m på 5 sek? Kan ett träd vara 200 m högt?

Treorna stegar sig fram

Treorna ska undersöka hur långt det är till deras ställe i skogen, dit klassen ofta går. Först får de gissa, och gissningarna blir snabbt väldigt lika: 270 m, 275 m, 283 m ... Det gäller att inte avvika för mycket. Någon vågar chansa och gissar på 1 mil, det låter långt. På skolgården mäter klassen upp en sträcka som är 10 m. Sen får alla räkna hur många steg de tar på 10 m. För de flesta är det 17 steg men någon tar färre och någon fler. Med papper och penna och stadig blick påbörjar de sen sin mätning av vägen till skogen – gå 17 steg, stanna och sätt ett streck på pappret, gå 17 steg, stanna och sätt ett streck på pappret ... . Så fortsätter de hela vägen. Väl framme jämför de sina resultat och på vägen tillbaka tar läraren, Lennart, fram mäthjulet och mäter sträckan som är 420 m. Och faktiskt, en av pojkarna i klassen hade gissat precis 420 m och en annan stegade sig fram till 420.

Hur långt är Sverige?

Lena och Åsa i fyrorna inledde veckan med en kluring som barnen fick med sig hem. De fick gärna ta hjälp av någon hemma för att lösa den och lösningarna presenterades och diskuterades på fredagen. Varje dag spelade de sen ett mattespel, bl a ”Vem säger 20?”

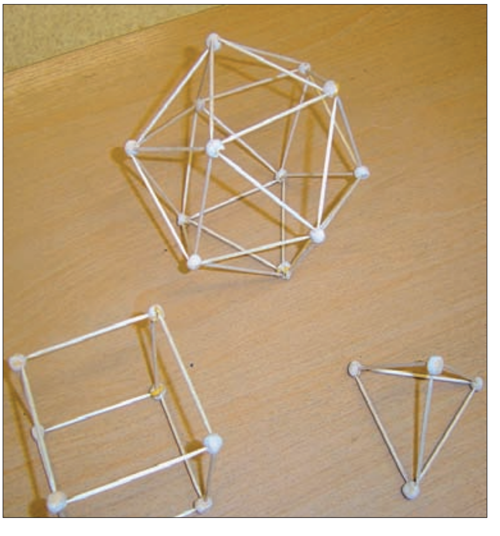
Ett stort område för fyrorna är Sveriges geografi. Där finns många möjligheter att använda och integrera matematik. Den här veckan undersöker de skalan i kartboken. Först mäter de hur långt Sverige är från norr till söder i kartboken och sen räknar de ut hur långt det är i verkligheten.

Personnummer och byggen

Ett problem hämtat från vardagen rör personnumret. Eleverna i femman får lära sig hur kontrollsiffran räknas ut och kontrollerar på sina egna och kamraternas personnummer. Det var inte helt lätt att tänka siffersumma, att 16 blir 1 + 6 .

På bilden bygger de tredimensionella figurer, de fem platonska kropparna kub, tetraeder, oktaeder, ikosaeder och dodekaeder, med hjälp av ärtor och tandpetare. De räknar antal hörn och sidor. Sen bygger de fantasifigurer och undersöker vilka geometriska former dessa innehåller.

Nämnarens Uppslag i nummer 3, 2005 kommer fram en dag och klassen viker lådor. Först med ett helt pappersark, sen ett halvt, sen ett fjärdedels ... Storleken på lådorna antecknas på tavlan, pappersstorlek och lådstorlek. Uppgifterna diskuteras och jämförs. Finns det möjligen ett mönster här? Jo, strax innan det är dags att packa ner för dagen kommer en hypotes om nästa lådas storlek.



Mat och matematik

Även bespisningspersonalen är engagerad i matematikveckan. ”Mattanten”, Nasreen, har formulerat ett problem för varje dag. Dessa anknyter till dagens meny och finns i två versioner, ett för Förskoleklassen, ettorna och tvåorna och ett för åk 3 – 5. Problemen är mycket uppskattade. Varje morgon ligger dagens problem i ett igenklistrat kuvert i klasslärarens fack och i några klasser inleds dagen med att läraren rituellt sprättar upp det hemliga kuvertet. Detta tyckte inte minst de elever som brukar ha svårt med matematiken mycket om. Lösningarna presenterades i matsalen på fredagen.

Några problem från Nasreen:

Nu ska jag koka soppa till lunch åt er elever. Om alla elever får 2 dl soppa, hur mycket soppa blir det totalt? Svara i liter eller dl. (F – 2)

När jag serverar soppa till lunch går det åt 78 liter soppa. Hur många dl får varje elev? Antal elever på skolan är 390 st. (3 – 5)

Jag undrar hur mycket ris jag måste koka till er i klassen. Det går åt 1 dl ris till 2 elever. Svara i liter eller dl. (F – 2)

Jag undrar hur mycket ris måste jag koka till fisken? Det går åt 1,5 dl ris till 2 elever. Antal elever på skolan är 390 st.
Jag vill ha svaret i liter. (3 – 5)

Hur mycket mjölk måste jag beställa så att det räcker hela veckan? Varje elev som dricker mjölk till lunchen dricker 2 dl varje dag. 60 elever dricker vatten varje dag. Jag vill ha svaret i liter. (3–5)

Kanelbullens dag

Mitt i veckan firar skolan Kanelbullens Dag. Inför det ska barnen baka. Det finns en hel del matematik att uppmärksamma i bullbak: att mäta rätt när man gör degen och passa tiden när man gräddar. Det går också att göra problem kring baket, och formulera de frågor som annars kanske förblir outsagda. Förskoleklassen funderade på:

Hur ska 6 barn dela på 3 kavlar? (Det finns inte bara en lösning på det om någon trodde det.)

Hur kan lika stora degbitar bli 6 bullar när Frida bakar men 23 bullar när Ann-Sofi bakar?

Hur kan lika stora degbitar få olika form och bli olika ”stora” när man kavlar ut dem?

Förskoleklassen ritar kanelbullar och räknar att de tillsammans gjorde 63 bullar. De passar på att räkna baklänges också, från tio till noll.

Alla förskolor i Skarpnäck är inbjudna för att fira Kanelbullens Dag och förskolan Kotten blir engagerade i matematikveckan då de besöker förskoleklassen. Gästerna var lätt räknade, 7 barn och 1 fröken. Klassen var 23 barn och 3 fröknar, Eva, Tina och Anders. ”Tillsammans åt vi ... många bullar. Där tappade vi räkningen.”

Hur gick nu veckan?

När jag lämnar skolan för den här gången återstår flera dagar och utvärderingen är ännu inte gjord. Det hände förstås mycket mer än det som finns med här, på lektioner i engelska och bild, i historia och svenska och i korridoren och på raster också. Lärarna har delat med sig av anteckningar och kommentarer. Så här skriver några:

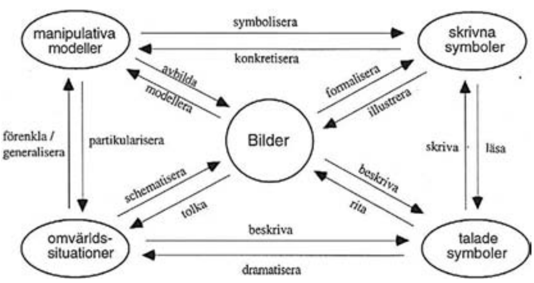
– Barnen ville ha mattevecka igen.
– Vi har haft en mycket trevlig och rolig vecka. Vi hann inte alls med allt vi hade tänkt oss under veckan, men vi fortsätter naturligtvis att ”räkna” även om det inte är matematikvecka.

KERSTIN HAGLAND

Rita en bild!

Ofta ger lärare sina elever tipset att rita en bild när de har kört fast på ett problem. Men vad menas egentligen med det? Här ges exempel på olika typer av bilder som kan förekomma vid problemlösning. Kanske kan en inspirerande diskussion om olika sätt att använda bilder även öka arbetsglädjen och lusten att lära matematik?

Skolans styrdokument, från förskolan och upp genom hela ungdomsskolan, poängterar att det är viktigt att de unga får utveckla sin förmåga att kommunicera och då använda flera olika uttrycksformer. Vilka olika matematiska uttrycksformer finns när det gäller matematiken i förskola och skola? Göran Emanuelsson har sammanfattat så här:



Flexibel användning av mångahanda matematiska uttrycksformer har, bland annat av forskarna Brenner m fl (1999), beskrivits som en nyckel till kompetent matematiskt tänkande och förmåga att lösa matematiska problem.

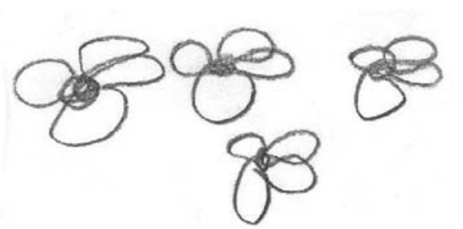
Till de matematiska uttrycksformerna hör bilder. Lärare uppmuntrar ofta sina elever, som brottas med ett matematiskt problem: Rita en bild! Vilken sorts bild läraren tänker på står inte alltid klart för eleverna.

Jag vill här ge exempel på tre olika typer av bilder som används vid matematisk problemlösning: *dekorationer*, *illustrationer* och *schematiska bilder*.

Min förhoppning är att detta ska inspirera den som vill upptäcka, undersöka, använda, diskutera och utveckla de olika typerna som tankeredskap vid problemlösning.

Dekoration

Här är ett exempel på en dekoration, ritad av en elev som löste ett problem där tal i bråkform ingick. Det handlade inte om blommor.



En dekoration vill jag definiera som en *ren utsmyckning*. Typiskt för en sådan är att den kan men inte alls behöver ha något med problemet att göra. Problemet blir varken lättare att uppfatta eller enklare att lösa genom dekorationen. I sämsta fall kan dekorationen istället distrahera och göra det svårare för eleven att uppfatta problemet eller finna en lösning.

Illustration

Här är en berömd bild, hämtad från en kinesisk matematisk text, *Chou Pei Suan Ching*, som är minst ett par tusen år gammal.


折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘卽折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也
去根如勾折處
如股折梢如弦
通長如股弦和
股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股弦
和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二段

Bilden illustrerar följande problem enligt min tolkning:

> Ett 10 fot högt bambuträd är avbrutet på ett sådant sätt att toppen når marken 3 fot från stammen. Hur högt ligger brottet?

En illustration vill jag definiera som en *förklarande bild*. Typiskt för en sådan är att det matematiska problemet blir lättare att uppfatta men bilden ger för övrigt ingen direkt hjälp till lösningen av problemet. Indirekt kan ändå en god illustration ibland ge en vink om en lösningsväg. En del problemlösare kanske ser att illustrationen av det brutna bambuträdet liknar en rätvinklig triangel och därmed kommer de in på Pythagoras sats och tar sina kunskaper om den till hjälp.

Schematisk bild

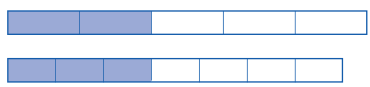
En schematisk bild vill jag definiera som en *översiktlig bild*. Typiskt för en sådan är att det matematiska problemet genom den kan förtydligas och därigenom lättare gå att lösa. I bästa fall leder en lyckad schematisk bild till upptäckter av tydliga matematiska mönster som i sin tur kan ge upphov till förenklande generaliseringar. Här följer några exempel på schematiska bilder och hur de använts för att lösa problem.

Del-helhetsbilder

> Syskonen Tova och Ture åker till mormor. De betalar var sin lika dyr bussbiljett. Tovas biljett kostar två femtedelar av hennes veckopeng och Tures tre sjundedelar av hans veckopeng. Vem har högst veckopeng?

Den lika biljettkostnaden ritas först i dubbel upplaga och delas sedan in i två respektive tre delar. Därefter bygger man på delarna till en hel veckopeng för var och en.

Tovas veckopeng



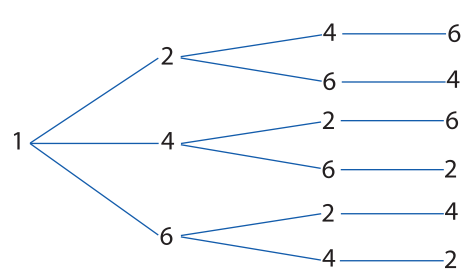
Tures veckopeng

De blå partierna motsvarar biljetterna som kostade lika mycket. Med hjälp av bilden går det nu att se att Tova har den högsta veckopengen.

Träddiagram

> Ninas nya cykel har ett kodlås med fyra siffror. Hon har glömt koden, men minns att den började med en 1:a och sedan kom siffrorna 2, 4 och 6. Ordningen på dem har hon glömt. Vilka olika koder kan det ha varit?

Man kan rita ett träddiagram över valmöjligheterna:



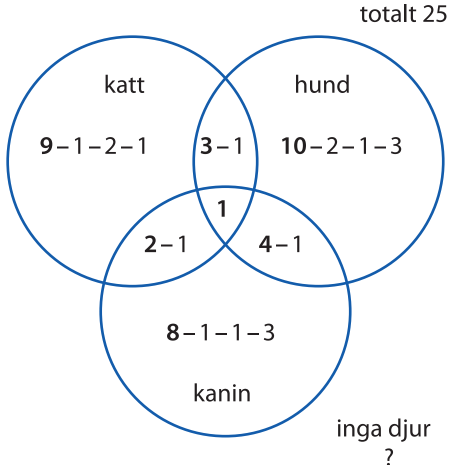
Det går nu att se i högerkanten av figuren att det finns sex möjliga koder: 1246, 1264, 1426, 1462, 1624 och 1642.

Venndiagram

Vid en liten undersökning framkom det i en klass att av de 25 eleverna hade 9 katt, 10 hund och 8 kanin. Av dessa hade 3 både katt och hund, 2 både katt och kanin och 4 både hund och kanin. Av dessa hade 1 elev katt, hund och kanin. Övriga elever hade inga djur alls. Hur många av de 25 eleverna var det som inte hade några djur?

För att sortera alla dessa data kan det vara bra att använda ett så kallat Venndiagram. Varje cirkel representerar ett av de djur eleverna har hemma. Där cirklarna överlappar varandra finns de elever som har två eller tre sorters djur.

Börja med att placera den som har alla tre sorternas djur där alla tre cirklarna går över varandra. Räkna sedan ut hur många som har två sorters djur och därefter hur många elever som har bara en sorts djur.

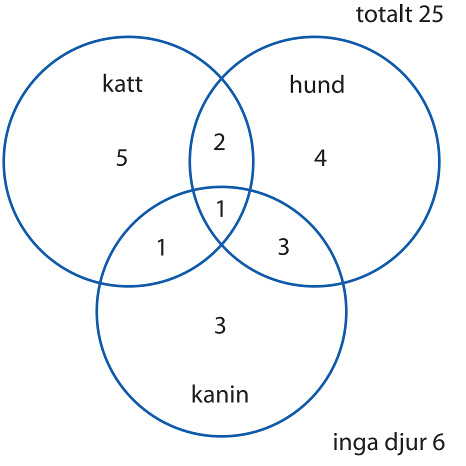


Exempel på hur en del av uträkningen kan ske:

- katt, hund och kanin (enligt texten): 1
- katt och hund: 3 (enligt texten) – 1 (den som hade tre sorters djur) = 2
- katt och kanin: 2 (enligt texten) – 1 (den som hade tre sorters djur) = 1
- katt: 9 (enligt texten) – 1 (katt, hund och kanin) – 2 (katt och hund) – 1 (katt och kanin) = 5

Gör sedan på samma sätt för att få fram hur många elever som bara har hund eller bara kanin:

- hund: 10 – 2 – 1 – 3 = 4
- kanin: 8 – 1 – 1 – 3 = 3



Räkna slutligen ut hur många elever som inte har några djur:

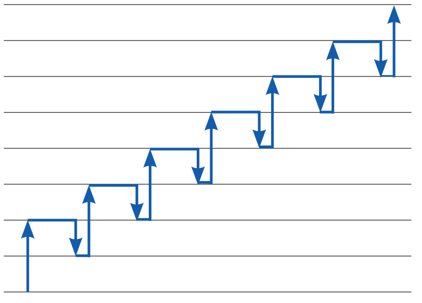
25 – (2 + 1 + 1 + 3 + 5 + 4 + 3) = 6

Alltså är det 6 av de 25 eleverna som inte har några djur alls. Venndiagrammet ger en översiktlig och lättavläst bild av elevernas djurinnehav.

Händelsekarta och flödesschema

Dessa kan se ut på många olika sätt, här är ett exempel:

> En snigel sitter knappt 8 meter ner i en brunn. Den tar sig upp 2 meter varje dag. På natten sover den och glider ner 1 meter. Hur lång tid tar det för den att komma upp?



Det är 1 meter mellan varje streck och snigelns förflyttning visas med hjälp av pilarna. Av bilden framgår att snigeln, eftersom brunnen är knappt 8 m djup, kan krypa över kanten efter 6,5 dygn.

Steg-för-stegbild

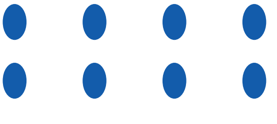
En annan typ av översiktlig bild visas nedan. Här ritas symboler för de fakta det handlar om och sedan utnyttjas bilden som arbetsredskap när man steg för steg närmar sig lösningen.

> I ett skåp har läraren skalbaggar och spindlar i en låda. Totalt finns där 8 småkryp. Det går att räkna till 54 ben. Hur många av småkrypen är spindlar och hur många är skalbaggar?

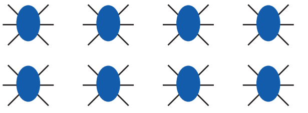
[Spindlar har åtta ben och skalbaggar har sex ben.]

Så här kan problemet lösas med hjälp av en steg-för-stegbild:

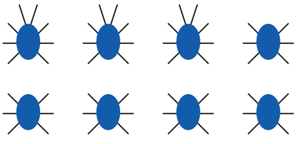
Steg 1
Åtta ovaler får symbolisera de åtta småkrypen.



Steg 2
Sex streck får symbolisera sex ben. De ritas på varje kropp eftersom alla småkrypen måste ha minst sex ben var.



Steg 3
De återstående sex benen fördelas parvis på krypen.



Nu syns lösningen! Det är 5 skalbaggar och 3 spindlar i burken.

Den här typen av lösningsmetod i bild kan man se mycket unga elever använda sig av. De verkar många gånger ha en vidare syn på hur matematiska uppgifter kan uttryckas än vad äldre elever har.

Tabell

Till grafiska och geometriska representationer räknas också tabeller. En tabell är i problemlösningssammanhang ett mycket bra hjälpmedel för att man ska få översikt, hitta matematiska mönster och kunna generalisera. En tabell kan även användas för att sortera fakta som gör den enklaste lösningsvägen mer uppenbar.

> En påskresa till fjällen har 50 resenärer och följande är känt om dem:
> 29 är kvinnor
> 15 av resenärerna är från Falun
> 15 av resenärerna är varken från Falun eller från övriga Dalarna
> 7 av de manliga resenärerna är från Falun
> 8 av de manliga resenärerna är från övriga Dalarna.
> Hur många manliga resenärer är från orter som inte ligger i Dalarna?

Vi gör en tabell för att få översikt och fyller i det vi vet.

personer	från Falun	från övriga Dalarna	från andra orter	summa
kvinnor				29
män	7	8		
summa	15		15	50

Sedan gör vi några enkla beräkningar av

- totala antalet män: 50 – 29 = 21
- män från orter som inte ligger i Dalarna: 21 – 7 – 8 = 6

personer	från Falun	från övriga Dalarna	från andra orter	summa
kvinnor				29
män	7	8	6	21
summa	15		15	50

Det är alltså sex manliga resenärer som är från orter som inte ligger i Dalarna. Observera att det inte är nödvändigt att fylla i hela tabellen för att få fram ett svar på frågan.

Andra matematiska bilder

Naturligtvis finns det många andra typer av matematiska bilder som också kan vara till stor hjälp vid problemlösning: matriser, grafer, andra typer av diagram och geometriska bilder samt även rörliga bilder av olika slag. De bilder som presenteras i den här artikeln är bara några exempel.

Några personliga reflektioner

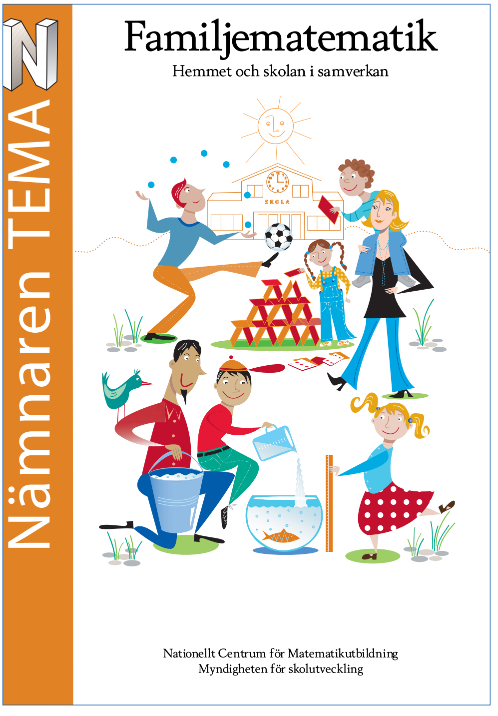
Det skulle kanske kunna gå att öka elevernas lust att lära matematik om vi mer tydligt lyfter fram, diskuterar och provar exempel på matematiska bilder som en hjälp i tänkandet. Fokus skulle då även kunna förskjutas från att finna ett facitkorrekt svar på problemet till olika tolkningar av problemet samt olika vägar fram till lösningen. Kanske kan det i sin tur ge upphov till intressantare och mer givande matematiska diskussioner, där en mångfald av lösningsvägar och uttrycksformer uppfattas som en tillgång.

Flexibel användning av mångahanda matematiska uttrycksformer har av samstämmiga forskare beskrivits som en nyckel till kompetent matematiskt tänkande och förmåga att lösa matematiska problem. Då är det anmärkningsvärt, tycker jag, att det inte i något av de svenska styrdokumenten tydligt står uttalat att det till matematiska kunskaper även hör förmåga att kunna växla mellan olika uttrycksformer. Om det vore ett av de uttalade målen och tydligt nämndes även i bedömningskriterierna skulle kanske elever och lärare bli uppmärksammade på denna viktiga kompetens. Att fritt och kreativt kunna välja och växla mellan olika uttrycksformer i matematik kan även, anser jag, vara en viktig faktor för att öka arbetsglädjen och lusten att lära matematik. Se även DPL, s 52.

LITTERATUR

Brenner, Mary E., Herman, Sally, Ho, Hsiu-Zu & Zimmer, Jules M. (1999). Cross-National Comparison of Representative Competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), s 541–557.

Emanuelsson, Göran (1995). Måltavlan: Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnaren 22* (2), s 2–3.



Familjematematik

Hemmet och skolan i samverkan

Den syn på matematik och matematikutbildning som signaleras av föräldrar har stor betydelse för hur barn och ungdomar tar till sig ämnet och bibehåller intresset genom skolåren. Föräldrars stöd och engagemang är därför viktigt.

Samverkan mellan hemmen och skolan kring barn och matematik är bokens huvudtema. Tyngdpunkten ligger på *Kvällar med matematik* till vilka föräldrar och barn bjuds in. Förslag ges på hur dessa kvällar kan planeras och genomföras av skolbarnsföräldrar och lärare tillsammans utifrån erfarenheter som gjorts under ett omfattande *Family Math*-projekt i Australien.

Förutom bakgrund och svar på frågor från föräldrar, presenteras trevliga och roliga aktiviteter med varierat matematikinnehåll. Dessa aktiviteter är tänkta som huvudinslag på kvällarna, men kan naturligtvis användas även i andra sammanhang. Gemensamt för aktiviteterna är att de genomförs samtidigt av alla deltagare. Samtal och samarbete poänteras liksom avslutande diskussioner om vad som är viktigt i barns matematiklärande och varför.

Dessutom finns välkomstaktiviteter och kortare aktiviteter kallade Kaffe med matte. Boken avslutas med exempel på andra former av samverkan. Ett sådant är hur en skattpåse kan uppmuntra till trevliga matematikstunder i hemmen om den fyllts med spännande spel och utmanande problem.

Dyrbara knappar

Miniräknaren som metodiskt hjälpmedel

Taluppfattning

Huvudräkning

Samtal och samarbete

I den här aktiviteten används miniräknare för att arbeta med tal och öva huvudräkning. Deltagarna måste tänka på olika sätt för att med hjälp av enbart ett begränsat antal knappar på miniräknaren nå givna måltal. Låt arbetet ske i par eller smågrupper så att samtal och samarbete blir en betydande del av arbetet redan från början. Deltagarna kommer att göra värdefulla upptäckter och dessa är viktiga att avslutningsvis lyfta fram och diskutera.

Gör så här

Förklara att aktiviteten går ut på att nå måltalen som finns till vänster på protokollet. För att göra aktiviteten rolig och mer utmanande får endast knapparna som visas på arbetsbladet användas. Alla knappar utom 2, 8, de fyra räknesätten och likhetstecknet är trasiga! Eftersom varje knapptryckning kostar en krona gäller det att finna olika vägar som blir så billiga som möjligt. För att enkelt kunna beräkna kostnaden för varje måltal ska *alla* knapptryckningar skrivas in i protokollet.

Bestäm från början hur lång tid som ska avsättas för aktiviteten och se då till att det finns tid att diskutera de erfarenheter som görs.

Diskutera

- Vilket måltal var svårast att nå? Varför?
- Redovisa några olika vägar som användes för att nå de första måltalen.
- Vilka strategier har använts?
- Tal kan skapas på många olika sätt. Ge exempel!
- Olika miniräknare kan fungera på skilda sätt och därför kanske en strategi fungerar på en miniräknare men inte på en annan. Det är viktigt att man vet hur just den miniräknare man använder fungerar – t ex om den prioriterar räknesätten eller ej.
- De knapptryckningar som gjordes på miniräknaren är inte nödvändigtvis exakt samma väg som om problemet skrivs på papper. Det är viktigt att barnen på sikt lär sig göra korrekta anteckningar, så att de kan berätta om sina tankar och olika sätt att lösa matematikproblem. Vilka krav som bör ställas varierar med barnens ålder.

Har några grupper hunnit nå alla måltalen? Vilken grupp har i så fall lyckats pressa priset mest?

Uppmuntra slutligen deltagarna att fortsätta aktiviteten hemma. Kan de finna fler goda strategier att utveckla för att nå de olika måltalen? Be dem också fortsätta tänka på vilken kunskap om tal de använder under arbetet med denna aktivitet och vilken roll miniräknaren spelar. Att sänka priset ytterligare kan bli en utmaning som följs upp via veckobrev under en tid eller som frivillig ”läxa” till nästa *Kväll med matematik*.

Materiel

Arbetsblad – ett per par eller grupp

Miniräknare – en per par eller grupp

Fortsättning

Aktiviteten är enkel att ändra genom att måltal byts ut eller att andra knappar får användas. Aktiviteten kan då göras svårare även om ursprungsvarianten kan vara nog så utmanande. För äldre barn kan även decimaltecknet, parenteser och/eller minnesknapparna användas.

Dyrbara knappar

Miniräknaren är delvis trasig! Enbart följande knappar kan användas:

2 8 + – x ÷ =

Varje knapptryckning kostar 1 krona. Undersök hur måltalen kan nås på billigaste sätt.

Måltal	Knapptryckningar	Kostnad
32		
12		
4		
50		
1,5		
15		
80		
9		
39		
100		
1000		
	Total kostnad:	

Dela godis

På hur många olika sätt kan tre personer dela 12 godisbitar mellan sig så att varje person får minst en bit?

På hur många olika sätt kan tre personer dela 25 godisbitar mellan sig så att varje person får minst en bit?

Skattpåse

En skattpåse, eller skattkista, passar bäst att använda under barnens första skolår. Idén är att det finns några speciella skattpåsar i klassen som innehåller intressanta aktiviteter och spännande spel. Varje elev får enligt en uppgjord lista ta hem påsen med jämna mellanrum. Hur ofta beror på klasstorleken och antal påsar, men det ska inte vara varje vecka – kanske en gång varannan eller var tredje månad. Påsen ska kännas ny och spännande varje gång! Påsen bör innehålla en anteckningsbok där varje familj kan skriva ner sina idéer och kommentarer. På så sätt kan innehållet utökas och ändras allt eftersom förslag ges och förfrågningar görs.

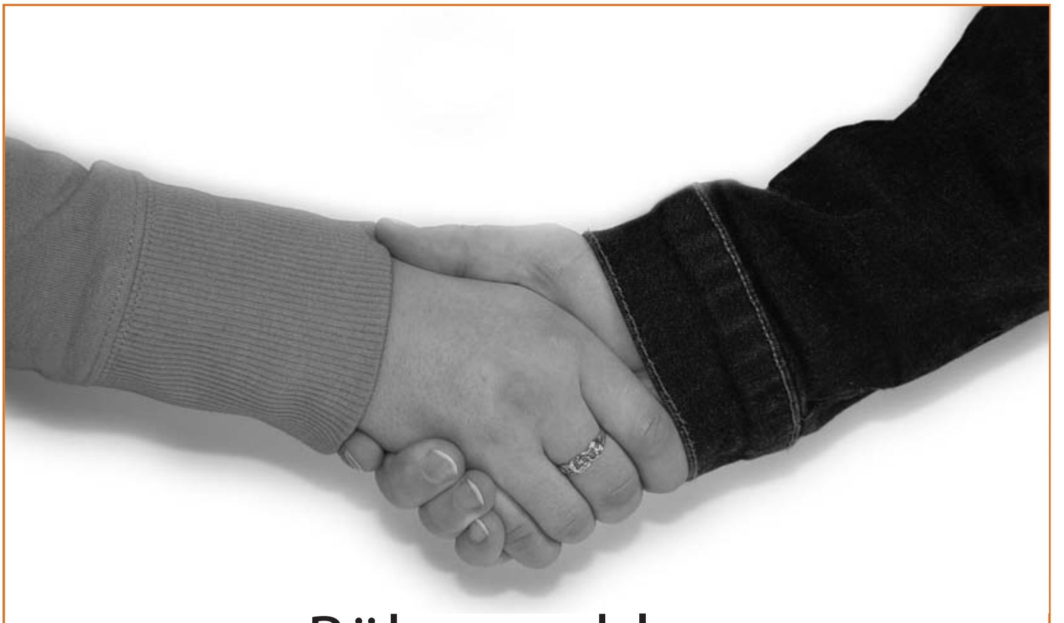
Fördelarna med en påse jämfört med en kista är att barnen lättare kan få ned påsen i sin ryggsäck. Påsen kan vara allt från enklaste tänkbara tygkasse som ofta kan köpas mycket billigt eller fås gratis med större eller mindre reklamtryck på. En mer dekorerad och "riktig" skattpåse, kanske rent av i guldtyg, kan säkert tillverkas i samverkan med textilslöjden.

Påsen ska kännas ny och spännande varje gång!

Innehållet i påsen måste vara förhållandevis smått, enkelt att byta ut och kunna kompletteras allt eftersom idéerna utökas. Här ges ett förslag på innehåll som är enkelt att ta fram och billigt. Se förslaget som en utgångspunkt och förändra så det passar era önskemål.

Beskrivningarna här i boken är ordnade så att en eller två aktiviteter finns på varje sida. Dessa sidor kan sättas samman till små häften.

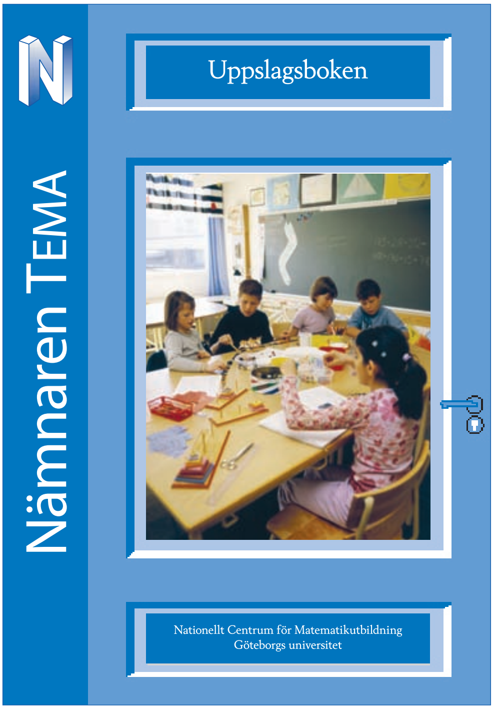
På ncm.gu.se – klicka på *Familjematematik* – finns fler förslag presenterade. Skicka gärna in de aktiviteter och spel som ni kompletterar med så fler kan ta del av dem.



Räkneproblem

Sex vänner träffas och skakar hand med varandra, varje par bara en gång. Hur många handskakningar blir det allt som allt?

Sju personer i en familj planerar att ge varandra var sin present. Hur många presenter blir det?



Uppslagsboken

Uppslagsboken innehåller 50 utvalda matematikaktiviteter för grundskolan och början av gymnasieskolan. De har valts och redigerats med tanke på kursplanernas *Mål att sträva mot*. Uppslagen utgår i många fall från lektionsförslag som publicerats i Nämnaren under rubriken *Uppslaget*. Varje Uppslag är enkelt att använda direkt i matematikundervisningen men idéerna kan också förändras och anpassas till innehåll, elever eller klasser. Till stöd för detta finns förslag på variationer, fördjupning och litteratur. Se även Nämnarens webbplats. Boken är tänkt att ge inspiration för den enskilde läraren och för lokal skolutveckling. Uppslagsidéerna kan prövas, diskuteras, utvecklas och fördjupas i arbetslag och vid ämnesseminarier.

1A

Hur mycket är 100 knappar?

Att arbeta med i smågrupper och diskutera i helklass under en eller flera lektioner • 100 knappar per grupp och burkar i olika storlekar

Intresse, tilltro, användning – Grundläggande talbegrepp

Etthundra

Etthundra är ett tal som både barn och vuxna kommer i kontakt med varje dag. Vi använder det när vi mäter, anger storlek och som en referenspunkt när vi exempelvis bestämmer area och avstånd. För att förstå och göra tal begripliga behöver elever en mängd olika erfarenheter. För barn som håller på att lära sig talen genom att räkna och arbeta laborativt är 100 ett stort tal. Att upptäcka hur mycket 100 är kan vara en värdefull erfarenhet när det gäller att utveckla en god taluppfattning.

På nästa sida ges idéer om hur man kan använda 100 knappar för att engagera eleverna i olika upptäckter kring talet 100. Låt eleverna arbeta i grupper och lösa uppgifterna på sitt sätt. Samla eleverna så de kan berätta för varandra hur de löste uppgifterna.

Variationer

Samma idéer kan naturligtvis användas för andra tal, 1000, 10 000, 100 000 och 1 miljon. Förändra uppgifterna så de passar det tal som ska undersökas.

Övningarna kan också varieras och anpassas så att de blir olika svåra. I samma klass kan man behöva ge både mycket lätta uppgifter och mer avancerade, för att alla elever ska engageras. Med utgångspunkt i den ursprungliga uppgiften, att få en uppfattning om talets storlek, kan man också utveckla exemplen till andra områden i matematiken.

Några exempel:

- Hur många fattas när vi har fått 87?
- Hur många skulle vi få om var och en samlade 10, 15, 20 etc?
- Hur många måste vi samla i genomsnitt?

Fortsättning

Vad kan man mer göra med 100 knappar?

- Dela upp i olika eller lika delmängder.
- Använda dem som räknemateriel.
- Göra mönster med dem och beskriva med ord.
- Sortera efter olika kriterier, t ex antal hål, färg, storlek, material.
- Göra ett halsband.
- Göra uppgifter till varandra, kanske till en annan klass.

Litteratur

McIntosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1996). Uppslaget: Hur mycket är 100 knappar? *Nämnaren 23(3)*, 24-25.

Anghileri, J. (2000). *Teaching Number Sense*. London: CONTINUUM.

Bergius, B. & Emanuelsson, L. (2001). Undringar om hundringar. *Nämnaren 28(1)*, 9-15.

Wallby, K., m fl (Red.) (2000). *Matematik från början*. NämnarenTema.

Hur mycket är 100 knappar?

100 är ett tal som används ofta. Vi ska titta på olika exempel och ni ska också hitta på egna.

Mitt block har 100 papper.
Det går 100 cm på en meter.
Vår kusin bor 100 mil härifrån.
Hans gammelfarmor är nästan 100 år.
Jag skulle kunna äta hundra sådana kakor!

- Hur många knappar skulle var och en av oss behöva samla, om vi vill ha 100?
- Hur stor burk behövs för att 100 knappar ska få rum?
  - Kontrollera om 100 knappar får plats i alla föreslagna burkar.
- Hur långt skulle 100 knappar räcka om de låg i en rad kant emot kant?
  - Över klassrumsgolvet?
  - Är du längre eller kortare?
- Om 100 knappar fyller burken, hur stor burk eller hur många burkar skulle behövas till 1000 knappar? 10 000? 100 000?
- Visa en knapp som är medelstor.
- Hur långt räcker 100 knappar om alla är lika små som den minsta?
- Hur långt räcker 100 knappar om alla är lika stora som den största? Går det att kontrollera?

1C

Tangrampussel

Ett laborativt arbete enskilt och i par från del av lektion till flera lektioner • Färgat papper och lamineringsplast för att tillverka tangrampussel

Intresse, tilltro, användning – Geometriska begrepp och relationer

Tangrampussel

Tangrampussel kan användas för att införa, befästa och fördjupa ett flertal matematiska begrepp. Pusslet kan användas för att utveckla form- och rumsuppfattning, men också för bråk-, procent- och areabegreppen.

Detta pussel sägs vara mycket gammalt, men det finns inte omnämnt i någon litteratur före 1800-talet. Ordet tangram kommer förmodligen från tang, som betyder kines, och gram, som betyder något som är skrivet eller ritat. Tangram skulle fritt kunna översättas med kinesiskt pussel.

Egen tillverkning

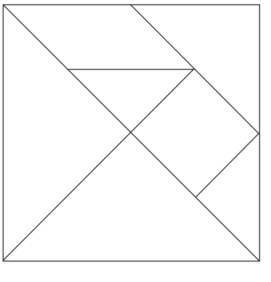
Eleverna kan tillverka egna tangrampussel i papper. Använd gärna vackra, exempelvis marmorerade, papper. För extra hållbara pussel kan det vara en bra idé att laminera dem innan de klipps ut. I vissa fall kan det vara en fördel att tillverka pusslen på centimeterrutat papper. Extra rejäla pussel tillverkas med fördel i slöjden. Ett flertal läromedelsförlag säljer tangram i olika material, ofta plast och vissa avsedda för OH.

Variationer och fortsättning

- Tangrampusslet tillverkades av en kvadrat med sidan 10 cm. Beräkna arean av hela tangrampusslet och de olika polygonerna som eleverna lagt.
- Hur stor blir arean av de olika bitarna om hela tangrampusslets area är 1 areaenhet?
- Det är enkelt att hitta nya användningsområden, övningsuppgifter, utmaningar och problemställningar för tangram. Lyssna på elevernas förslag om nya användningssätt. En Internet-sökning på ordet tangram ger mängder av träffar. Många av sidorna är interaktiva och ett roligt alternativ till det egna pusslet. Sök också i Nämnarens artikeldatabas på Nämnarens webbplats.

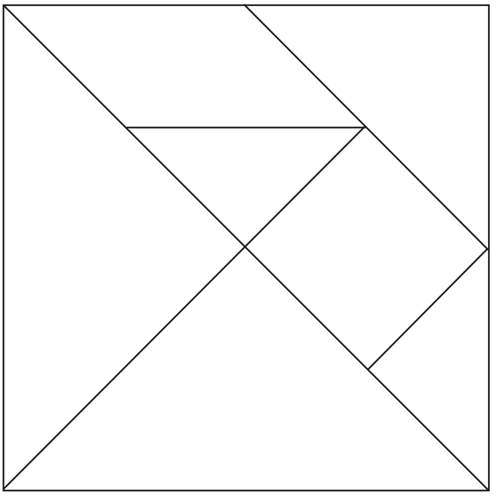
Litteratur

Pehkonen, E. (1994). Uppslaget: Övningar med tangrampussel. *Nämnaren 21(3)*, 26.



Tangrampussel

Här ska vi undersöka olika geometriska former



Tillverka ett tangrampussel som det i figuren. Längden på kvadratens sida ska vara 10 cm.

Kan du namnen på de olika delarna i ditt tangram? Peka på och beskriv kvadrat, rektangel, triangel, cirkel, parallellogram, parallelltrapets, romb.

Vilka av de större bitarna kan du lägga med hjälp av de mindre? Rita av dina lösningar.

Hemliga figurer

Lägg en "hemlig" figur genom att använda alla sju tangrambitarna och rita av den. Beskriv figuren för en kamrat som ska lägga sina bitar så att det blir en likadan figur. Ni får bara använda ord, inte peka på bitarna. En extra utmaning är att sitta rygg mot rygg. Jämför skillnaden om kamraten bara får lyssna eller om det är tillåtet att ställa frågor också.

Skriv tillsammans en instruktion till en "hemlig" tangramfigur. Ge beskrivningen till en annan grupp och se om den fungerar!

Välkända polygoner

Vilka välkända polygoner (månghörningar) kan du lägga med hjälp av

a) två b) tre c) fyra d) fem e) sex f) sju bitar?

Rita av dina lösningar!

Försök att lägga en kvadrat, en triangel, en rektangel, en parallellogram genom att använda *alla* sju bitarna.

Rita av dina lösningar!

Kan figurerna läggas på mer än ett sätt?
Vilka andra polygoner kan du lägga med hjälp av alla sju bitarna?

Matematikverkstad

En handledning för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder

Ett laborativt arbetssätt i en matematikverkstad ger elever tillfälle att utveckla nyfikenhet och lust att lära, vilket är ett av läroplanens mål att sträva mot. I en matematikverkstad får elever möta olika aspekter av matematikämnet och de kan lära med hjälp av fler sinnen än vad som är möjligt om lektionerna enbart består av arbete med siffror och tal i en lärobok. En väl fungerande matematikverkstad underlättar också för läraren att planera och genomföra en omväxlande undervisning som leder till att fler elever får ett fördjupat och vidgat kunnande i och om matematik.

Matematikverkstad. Ja, men hur …?

Denna handledning är en resurs för alla lärare, och skolledare, som vill bygga en matematikverkstad på den egna skolan. Boken diskuterar praktiska frågor kring organisation, lokal, inredning, material och aktiviteter. Arbete i en matematikverkstad behöver struktur. Det ges därför förslag på system för att ordna allt material, planeringsunderlag för lektioner samt hur elever kan dokumentera och utvärdera sitt eget lärande, allt kopplat till grundskolans styrdokument samt nationella diagnoser och prov.

Matematikverkstad

Matte är kul när man fattar och tråkigt när man inte förstår. Ja, så uttryckte många elever sin syn på matematik i Skolverkets kvalitetsgranskning *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Laborativa aktiviteter i en matematikverkstad kan skapa förståelse och leda till att matematikens olika sidor upptäcks och synliggörs.

Matematikverkstad – vad är det?

En *matematikverkstad* kan se ut på många sätt men ska alltid vara en plats för lustfullt lärande. Den ska vara till hjälp för att locka fram nyfikenhet, fantasi och kreativitet och bidra till positiva upplevelser och erfarenheter av matematik. Elevernas lärande är centralt och aktiviteterna ska leda fram till ett vidgat och fördjupat kunnande i matematik. En verkstad ska vara till för *alla* elever – såväl de som behöver extra utmaningar som de i behov av särskilt stöd.

Den optimala matematikverkstaden är till det yttre en större, inspirerande inredd och med laborativt matematikmaterial välfylld lokal vars innehåll ständigt utvecklas av lärare och elever. På en del skolor finns bara förutsättningar för ”en skrubb i källaren”, ett avskilt utrymme i en större studiehall, en del av ett klassrum eller ett välorganiserat skåp och det mesta är naturligtvis bättre än inget. Ibland kan verkstaden främst fungera som materialrum, vilket kompletterar klassrum och matematiksalar.

Matematikverkstad – varför då?

Det brukar sägas att ”repetition är all inlärnings moder” men travesteringen ”variation är all inlärnings moder” passar bättre i en matematikverkstad. Ett laborativt arbetssätt med utgångspunkt i en matematikverkstad kan vara *ett* sätt bland flera för att vidga synen på matematikämnet. Genom att använda *flera* arbetssätt ges *fler* möjligheter till olika sätt att lära och *fler* elever kan upptäcka matematikens spännande sidor. Att arbeta enskilt med papper och penna i en lärobok passar en del, medan andra elever föredrar betydligt mer omväxlande lektioner. Många elever tycker om att arbeta praktiskt med händerna, göra undersökningar, samtala, debattera och argumentera, samarbeta med kamrater, uttrycka sig med hjälp av bild, färg, form, drama och musik – de behöver växla mellan arbetssätt. Elever är olika och behöver därför möta olika innehåll, arbetssätt och material för att nå målen såväl i matematik som i andra ämnen.

Hands on – minds off?

Ibland används uttrycket *hands on – minds off* då matematikverkstäder diskuteras. Att det i verkstaden råder febril aktivitet under trevliga former behöver inte betyda att eleverna verkligen lär sig matematik. Aktiviteter och laborationer uppfattas ofta som ”en kul grej”. Det kan med andra ord vara enkelt att skapa tillfällen för *hands on*-arbete, men risken finns att det stannar vid aktiviteter där det kunnande som ska utvecklas åsidosätts: *minds off*. Det kan bli mer av att göra än av att förstå och lära. Läraren måste vara medveten om denna risk, uppmärksamma de återvändsgränder som kan uppstå och istället genomföra en matematikundervisning med fokus på mål och innehåll: *minds on*.

Laborativt material är ingen mirakelkur i sig utan läraren måste göra medvetna, didaktiska val utifrån frågor om

- *vad* som ska läras – vilket matematikkunnande elever ska utveckla
- *varför* det ska läras – i vilket sammanhang aktiviteten ingår
- *hur* det ska läras – på vilka sätt elever ska arbeta för att utveckla förståelse.

Det laborativa arbetet ska fungera som en länk mellan det konkreta och abstrakta, men det sker inte med automatik. Elever behöver både stöd och utmaningar för att upptäcka matematiken i laborativa aktiviteter så att kunnandet kan generaliseras och användas i andra situationer. Det är lärarens uppgift att hjälpa eleverna att stärka dessa samband. Ett svårt, men spännande uppdrag! Vi hoppas verkligen att denna handledning kan bidra till att arbetet i en matematikverkstad blir: *Hands on – minds on!*

Vad är laborativt material?

I den matematikdidaktiska litteraturen finns inte laborativt matematikmaterial entydigt definierat, men ett vanligt sätt är att dela in det i två huvudgrupper:

- *vardagliga föremål* vilka finns som verktyg eller föremål i vardagen, arbetslivet och naturen
- *pedagogiska material* som är speciellt tillverkade – kommersiellt eller av lärare och elever – för matematikundervisningen.

Att skilja på vardagliga föremål och pedagogiska material kan först tyckas enkelt, men snart uppstår frågan var gränsen egentligen går mellan dem. Se på uppräkningen av följande material:

... stenar, kottar, snäckor, bönor, makaroner, knappar, tändstickor, kapsyler, hushållsmått, tärningar, lego, geostrip, multilink, kubikdecimetermodell ...

Det är inte alldeles självklart vad som hör till vilken huvudgrupp. Vardagliga föremål som stenar får en pedagogisk funktion när de används för att visa hur oregelbundna kroppar kan volymbestämmas: Elever sänker ned en sten i ett vattenfyllt kärl, samlar upp och mäter den mängd vatten som rinner över, jämför med den ursprungliga mängden vatten och kanske dessutom gör omvandlingar mellan ml och cm^3.

Ett pedagogiskt material kan hanteras som ett vardagligt föremål, t ex om en kubikdecimetermodell fylls med vatten och får fungera som blomkanna. Det som avgör i vilken grupp ett material placeras är *hur*, och i vilket *syfte* det används. Materialet får sin mening i det sammanhang som det brukas.

I denna handledning förekommer *laborativt material* som samlande uttryck för både vardagliga föremål och pedagogiska material samt de spel som finns i en matematikverkstad.

Att skapa länkar mellan konkret och abstrakt

Laborativt material används ofta för att utveckla matematiska begrepp och tankar samt för att upptäcka mönster och samband. Det kan också brukas som ett åskådligt stöd för beräkningar, vid problemlösning och vara ett sätt att konkretisera matematiska begrepp som eleven redan är bekant med.

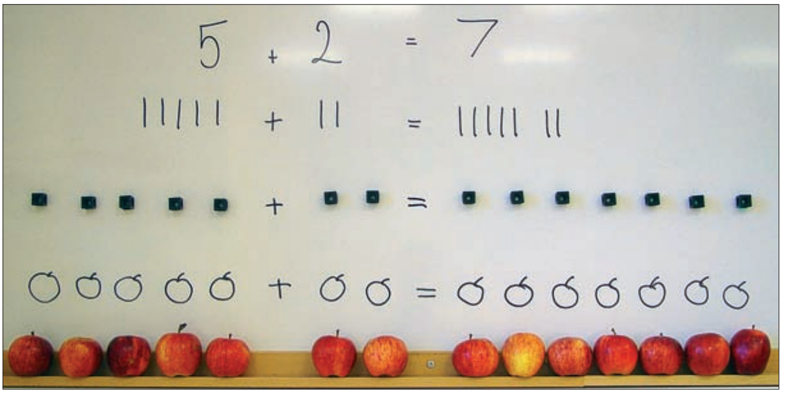
Laborativa aktiviteter

Konkret ⟷ Abstrakt

Laborativa aktiviteter som en länk mellan det konkreta och det abstrakta

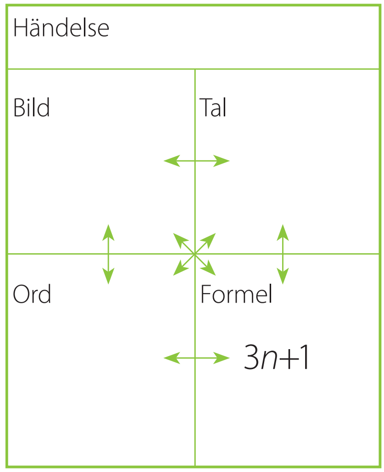
Begreppen konkret och abstrakt i denna skiss ges vida betydelser. Med *konkret* menas sådant som kan uppfattas med våra fem sinnen, sådant man kan se, ta på, flytta med mera, medan *abstrakt* är sådant som vi bara kan uppfatta med våra tankar och fantasier. I det här sammanhanget är föremål och hanterandet av föremål exempel på konkret, medan matematiska begrepp, samband och hur vi tänker med hjälp av dem exempel på abstrakt.

Oftast får eleverna gå mellan det konkreta och det abstrakta flera gånger. En elev kan arbeta med en aktivitet, få förståelse för det abstrakta matematiska innehållet och visa det i sin dokumentation. I en mer utmanande uppgift kan eleven behöva gå tillbaka till det laborativa arbetet för att få en djupare förståelse av de redan kända begreppen och för att utveckla nya. Laborativt arbete är alltså inte bara en angelägenhet för de yngsta eleverna eller för elever med svårigheter: det är angeläget för *alla* elever!



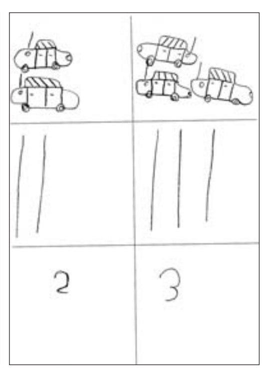
Fyrfältsblad (här återges avslutningen på ett längre stycke)

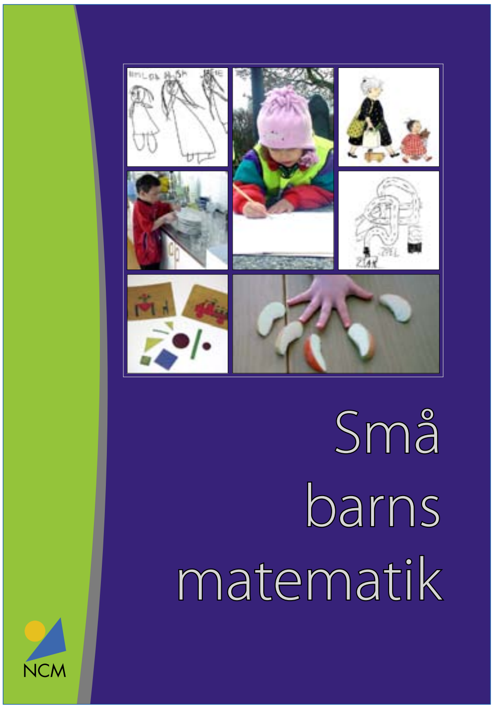
Om elever istället får i uppgift att utgå från formeln och därefter fyller i övriga fält, blir uppgiften öppnare och mer avancerad.



Vid arbete tillsammans med de yngsta eleverna kan arbetsgången förenklas. Ett exempel: Uppgiften är att parkera fem leksaksbilar på två sidor av en parkeringsplats och att hitta så många olika sätt som möjligt. Elevernas förslag på hur talet fem kan delas upp blir till innehåll i samtalet. Två leksaksbilar kan t ex parkeras på ena sidan och tre på den andra. Eleverna ritar hur bilarna står, för att i nästa steg enbart använda sig av egna symboler som t ex ett streck för varje leksaksbil. Därefter sker en övergång till formellt symbolspråk: 2 + 3. En modell för detta blir då:

Laborativt arbete ➛ bild ➛ egna symboler ➛
➛ matematiskt symbolspråk





Små barns matematik

Erfarenheter från ett pilotprojekt med barn 1–5 år och deras lärare

Boken är skriven för lärare i förskola, förskoleklass och tidiga skolår, för lärarutbildning och kompetensutveckling. I 14 kapitel med 130 illustrationer beskrivs mål, innehåll och genomförande av ett pilotprojekt i matematik 2003–2004 med ca 100 lärare. Arbetet tog sikte på att följa hur barn i åldern 1–5 år tillsammans med sina lärare utvecklade intresse för och lärande i och om matematik. I boken beskrivs hur kompetensutvecklingen, med teori och praktik varvad, stimulerade lärarna att utmana barnens lärande i matematik.

Författarna redogör med egna reflektioner för spännande matematik upptäckter med nedslag i den omfattande dokumentationen och i referenslitteratur.

7

GÖREL STERNER & BENGT JOHANSSON

Räkneord, uppräkning och taluppfattning

Enligt förskolans läroplan skall barn få möjlighet att utveckla sin förståelse för ”grundläggande egenskaper” hos tal. Vad detta kan innebära tittar vi närmare på i detta kapitel, som också innehåller en beskrivning av räkneordens innebörd och användning. Avslutningsvis följer vi hur en liten pojke i förskolan utvecklar antalsuppfattning genom erfarenheter av fruktdelning.

Tidiga erfarenheter

Små barn har från födseln en stark vilja och drivkraft att utforska och förstå sin omvärld. De lär sig något om kvantitet redan då de griper efter ett föremål med först den ena handen och så med den andra. När de vill ha en tredje sak så räcker inte händerna till. Då måste de bestämma sig för vilket föremål de skall släppa. Så småningom kan de avgöra om de vill ha två eller tre äppleklyftor. Om något är väldigt åtråvärt, som godisbitar eller kakor, är det bättre att önska sig ”tre” än ”en”. I samspel med andra barn och vuxna får de tillfälle att använda räkneorden och att räkna. De hör orden i samtal, använder dem i rim och ramsor, i sånger och lekar och när de spelar spel. Undan för undan utvecklar barn förståelse för innebörd i uttalanden som ”nu hinner vi bara läsa *två* sidor till i din bok”, ”det är *tre* knappar som vi måste knäppa i din tröja” och ”Olivia är *fem* år och Clara är *tre*”. När läraren i förskolan hjälper de yngsta barnen att klä på sig och säger ”det var *en* sko, och nu har vi tagit på *två* skor” så kan de så småningom koppla ihop situationen med när de t ex dukar till lunch och den vuxne säger – ”Nu har vi tagit ned *en* tallrik och *två* tallrikar”. Genom lärares lyhördhet och vilja att kommunicera skapas sammanhang och mening i tillvaron. Undan för undan upptäcker barn likheter och skillnader i egenskaper i tingen och i talen. De upptäcker mönster och samband, hur tal, rum och geometriska former hör samman. Innehållet i detta kapitel bygger framförallt på artiklar i *Nämnaren* (Johansson, 1983–1986), Lärarhandledning till *Nya Min matematik* (Kilborn, Johansson & Dahlström, 1985) och *Didaktisk ämnesteori del I, Grundläggande aritmetik* (Kilborn, 1989).

Subitizing – en tidig förmåga att uppfatta antal

Människans förmåga att kvantifiera omvärlden och att räkna verkar utvecklas ur en kombination av en medfödd förmåga att uppfatta antal upp till tre eller fyra ”i en blink”, *subitizing* på engelska[1], samt praktiska erfarenheter av att räkna och bestämma antal i den kultur vi lever. Små barn kan, redan från första levnadsveckan, skilja på antal upp till tre, fyra objekt (Wynn, 1990). Så tidigt som vid sex månaders ålder har de i allmänhet utvecklat vad vi kan kalla ”aritmetiska förväntningar” av addition och subtraktion, en slags känsla för effekterna av att de lägger till eller tar bort föremål från en känd mängd. Tidigt kan de också avgöra vilken av två mängder som har flest föremål. Förmågan till subitizing visar sig t ex i att barnet genast uppfattar att de har slagit en ”sexa” på tärningen, fem fingrar på en hand eller att leksaksbilen har fyra hjul. Det handlar alltså om ett automatiserat förhållande mellan räkneord och någon form av talbild. Till skillnad från den aspekt av antalsbegreppet som har sin grund i uppräkning kan vi säga att barnet lärt sig helheten före delarna. Denna omedelbara uppfattning är inte begränsad till enbart synintryck utan har också motsvarigheter i hörsel och känsel.

Gelman och Gallistels fem principer

Abstraktionsprincipen och Ett till ett-principen

Som vi kan läsa om i kapitel 4 hade redan urtidsmänniskan olika sätt att räkna. I ett 30 000 år gammalt vargben har någon ristat in ett antal streck i grupper om fem (Thompson, 1991). Vad som räknats vet vi inte, kanske djur, antal dagar eller ägodelar. Utmärkande för den här tidens kulturer var att de använde yttre redskap och kroppsdelar för att bilda par. Bakom detta förfarande ligger två principer:

Abstraktionsprincipen innebär att föremål, i väl avgränsade och definierade mängder, kan räknas.

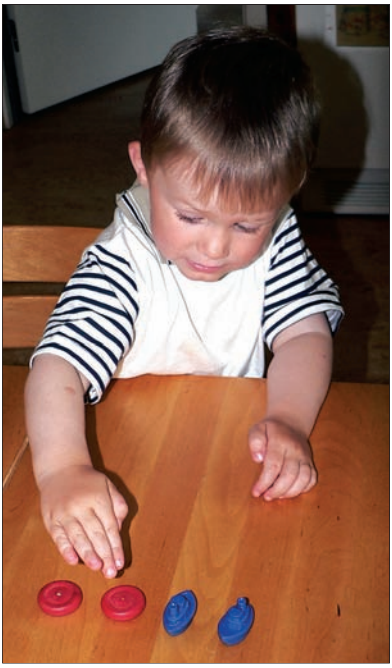
Ett till ett-principen innebär att ett föremål i den ena mängden får bilda par med ett och endast ett föremål i den andra mängden.

---

1) Försvenskningen ”subitisering” används ibland i svensk litteratur.

Isak leker "russinleken" med tre dockor. Han delar ut russinen till dockorna med hjälp av Ett-till-ett principen. Han kommenterar högt: "En till den, en till den och en till den".

Principerna gör det möjligt att kvantifiera genom att bilda par. Kilborn (1989) ger exempel på stenåldersmannen som ville hålla reda på hur många getter han ägde. För varje get som släpptes ut på bete lade han ett föremål i en skål eller täljde ett streck på en träbit. När getterna kom tillbaka från betet gjordes en ny parbildning mellan djur och föremål – get och sten eller get och streck. På motsvarande sätt kan vi hålla reda på tid. Om ett möte skall ske mellan några personer om en vecka kan var och en samla sju stenar. Dagarna håller vi reda på genom att varje morgon ta bort en sten. När sista stenen plockas bort är det dags för mötet. Vi behöver varken kunna räkneord eller siffror för att klara att hålla reda på antalet getter eller dagar. Genom att använda stenar i en referensmängd kunde man genom parbildning avgöra om getterna eller dagarna var lika många, fler eller färre än antalet stenar. Men när vi behövde ta reda på antalet, dvs hur många getter eller dagar, för att kommunicera utan jämförelsemängder då blev räkneorden ett effektivt redskap för detta.



Isak räknar plastfigurer som ligger på bordet. Han räknar vid det här tillfället med start på den översta högra blå figuren, men en annan gång kan han lika gärna räkna från vänster till höger.

Principen om godtycklig ordning. Antalskonstans

Principen om godtycklig ordning innebär förståelse för att när vi räknar antalet föremål i en mängd, så spelar det ingen roll i vilken ordning uppräkningen sker, eller hur föremålen är grupperade. Men det är viktigt att hålla reda på vilka föremål som är räknade och vilka som återstår att räkna.

Principen om godtycklig ordning är viktig för förståelse av kommutativa lagen för addition, att $a+b=b+a$ för alla naturliga tal a och b. Om getterna delas in i två grupper så kan vi se att fyra getter och två getter

●●●●   ●●

är lika många som två getter och fyra getter

●●   ●●●●

I exemplen med getterna kan vi se att räknandet är omständligt och tar mycket tid. Särskilt problematiskt blir det att hantera stora tal. Det är t ex inte alldeles enkelt att bära med sig ett stort antal stenar. Början till lösningen av problemet finns i det gamla vargbenet. Där var strecken grupperade fem och fem. Det tjugofemte strecket som svarar mot fem femgrupper, var särskilt långt. På så sätt kunde man reducera räknandet av enstaka streck till att räkna femgrupper och streck.

Ett mer effektivt sätt att kvantifiera och hålla reda på antal är att använda språket. Vi kan förstås som Kilborn påpekar ge getterna namn och sedan bilda par mellan getter och getters namn. Men ännu effektivare är att lära sig en generell ramsa med talnamn: ett, två, tre, fyra, ... och sedan bilda par mellan föremål i en mängd och namn i denna ordnade talrad. Med språkets hjälp kan vi sedan bestämma antal genom *uppräkning*.

En viktig aspekt av talbegreppet som är kopplad till principen om godtycklig ordning är *antalskonstans*, som framförallt Piaget (1965) lyft fram i sina studier av små barns taluppfattning. Den innefattar förståelse för att om vi sprider ut föremål som från början ligger tätt samlade, eller om vi flyttar föremålen till en annan plats i rummet så förändras inte antalet. Inte heller om vi tar bort ett antal föremål från en mängd och sedan lägger tillbaka lika många föremål till mängden, påverkas det totala antalet. Och om en mängd A innehåller fler föremål än mängden *B*, och *B* innehåller fler föremål än mängden *C*, så vet vi utan att räkna, att *A* innehåller fler föremål än *C*.

Principen om räkneordens ordning

Principen om räkneordens ordning innebär att orden måste komma i en bestämd ordning och att varje räkneord följs av ett annat bestämt räkneord. Antalet föremål i en mängd bestäms genom att varje föremål som skall räknas paras ihop med ett bestämt ord i *räkneramsan*. Låt oss tänka på bilden av Isak, 2 år och 4 månader. Förståelse för den här principen innebär att Isak pekar på föremål i tur och ordning, samtidigt som han räknar "ett, två, tre, fyra". Han säger aldrig "ett, fyra, två, tre" eller "sju, fem, arton". Varje föremål paras ihop med ett och endast ett räkneord i den ordning de förekommer i räkneramsan.

Antalsprincipen

Antalsprincipen, kardinaltalsprincipen, innebär att när varje föremål i en mängd har parats ihop med ett räkneord så anger det sist uttalade räkneordet antalet föremål i mängden. Vi mäter antalet föremål med hjälp av de ordnade räkneorden.

Bilden på Isak kan illustrera även den här principen. När Isak säger "fyra" så anger ordet "fyra" att det finns så många föremål i mängden som han har räknat. Som vi sett tidigare, kan barn som inte har utvecklat förståelse för den här principen uppfatta "fyra" som benämning eller namn på *ett* föremål i mängden, det är en sak som heter fyra. Vi ger här några exempel på hur förskolebarn kan närma sig förståelse för uppräknandets princip och räkneordens innebörder:

Lina, 1 år och 7 månader, har gjort en sandkaka i form av en fot med fem tår tydligt markerade. Hon har hört sin äldre bror räkna så hon pekar på varje tå med spaden och säger "En två" för varje gång hon pekar. Läraren pekar på varje tå och räknar långsamt "En – två – tre – fyra – fem" och Lina rabblar lydigt efter, något snabbare och helt utan att bry sig om tårna på sandkakan: "En två tre fyra fem". Hon har uppfattat att det är en rad ord som hon skall upprepa. Hon rabblar början på räkneramsan, men den är helt betydelselös för henne. En stund senare får hon av en händelse tag i två spadar, en i varje hand. Hon sticker ner båda på en gång i sanden och tar upp dem och tittar förvånat från den ena till den andra och säger "Två"! Lina kan uppfatta och uttrycka skillnaden mellan ett och två. Hon har däremot inte utvecklat förståelse för att det finns en koppling mellan räkneorden och tårna.

Senare upptäcker barn samband mellan räkneord och antal och gör spännande upptäckter. Hanna, 5 år och 6 månader, räknar fingrarna på ena handen: "Ett, två, tre, fyra, fem." Så räknar hon fingrarna på andra handen, de är också fem. Läraren frågar om hon kan räkna sina tår och hon drar av sig ena strumpan och räknar, de är också fem. Då drar hon av sig andra strumpan och räknar tårna på den foten också och utbrister förvånat: ”Det är fem på allihop.”

Uppräknandets idé bygger enligt Gelman och Gallistel (1978) på nämnda fem principer. De allra flesta barn lär sig använda dessa redan i förskolan. Erfarenheter i vardagen av att räkna och bestämma antal parat med förmågan till subitizing bidrar till att barn i allmänhet behärskar principerna innan de börjar skolan.

Räkneordens innebörd, struktur och funktion

Räkneorden i räkneramsan

Då barn börjar använda räkneorden är detta inte alltid kopplat till antal eller kvantifiering. Det är helt enkelt en ramsa ”ett två tre fyra fem” som vilken annan ramsa som helst t ex ”ole dole doff”. När vi säger att ett litet barn kan räkna till tio, menar vi i regel att de på ett korrekt sätt kan återge räkneramsan till tio. Hur stor del av räkneramsan barn behärskar varierar kraftigt mellan olika barn i olika åldrar. Det visar sig vara starkt beroende av vilka erfarenheter barnen har haft av att möta, pröva och använda räkneorden och räkneramsan i olika situationer. Hos de flesta barn utvecklas den stegvis:

– Räkneramsan är vare sig stabil eller korrekt, t ex ett, två, fem, sjutton och vid ett annat tillfälle tre, åtta, fem, nitton.

– Räkneramsan är stabil men inte korrekt dvs barnet använder vid upprepade tillfällen en inkorrekt del av räkneramsan på samma sätt ett, två, tre, fem, sex, åtta.

– Räkneramsan upp till ett givet räkneord är både stabil och korrekt.

Från början uppfattar barn räkneramsan som en odelbar sekvens av ord. De kan då inte börja räkna från t ex fem utan måste alltid starta från ett. Det är en av anledningarna till att det är svårare att lära sig behärska bakåträkning än framåträkning. Om vi ber ett barn som inte kan räkna ned från tio att ändå försöka, blir det ofta så att barnet först måste räkna upp till tio för att kunna ”hitta” nio, sedan fortsätta från början till nio för att hitta ”åtta” osv.

Räkneramsans struktur

En av svårigheterna med att lära sig räkneramsan är kopplad till dess struktur och relation till vårt siffersystem. Räkneramsan upp till 100 består av fyra strukturellt olika delar:

- Räkneorden mellan ett och tolv följer en språklig struktur som skiljer sig från de övriga räkneorden. När räkneorden skall beskrivas med siffror bryts denna struktur. Tio, elva och tolv skrivs ju genom att vi kombinerar siffror från andra räkneord, 10, 11 och 12. Första delen av räkneramsan bygger på ett talsystem med basen tolv, medan sifferskrivningen bygger på basen tio, jämför indelningen av urtavlan.
- ”Ton”-talen har ett eget mönster. Intressant att notera är att det heter *tretton*, *femton*, *sexton* osv men inte *fyraton* utan *fjorton*. Fjorton är ett gammalt fornsvenskt ord *fiortan*, en sammansättning av äldre former av fyra och tio (Wessén, 1969).
- Vi skriver tal med tiotalssiffran först och entalssiffran sist medan vi har en annan princip för hur vi namnger tal i räkneramsan mellan tretton och nitton. När vi säger femton kommer fem först, men när vi skriver 15 kommer fem sist!
- Räkneorden mellan tjugo och tjugonio följer ytterligare ett mönster. Nu är det visserligen samma ordning mellan siffrorna som mellan räkneordens delar. Men ”tjugotalet” skiljer sig från resten av räkneorden i räkneramsan genom att de saknar ändelsen ”tio”. Det heter inte ”tvåtio” vilket vore logiskt med tanke på att det heter trettio, fyrtio osv.

Räkneorden vid uppräkning

Så småningom får barnet klart för sig att räkneramsan används vid den aktivitet som kallas uppräkning. Föremålen kopplas då ett och ett till de olika räkneorden, ofta med hjälp av pekande eller nickningar. Till en början kopplas räknandet till själva pekandet, men med mer erfarenhet av att räkna blir barnet säkrare och kopplar räkneorden till de enskilda föremålen. Även om barnen har förstått poängen med relationen mellan räkneord och föremål och att endast ett ord får kopplas till varje föremål som ska räknas, så misslyckas de ibland med koordineringen. De hinner alltså säga fler räkneord än antalet föremål som ska räknas. Det behöver inte betyda att barnet gått tillbaka till ett mer ursprungligt tänkande, utan att det helt enkelt har svårigheter med att genomföra själva parbildningen mellan räkneord och föremål.

Det kan också vara så att de har svårt att avgöra vilka föremål som är räknade och vilka som återstår att räkna.

Räkneorden som ordningstal

Vill vi ange en speciell plats eller ett speciellt läge i en ordnad mängd av föremål eller objekt använder vi ordningstal. Bokstaven G är till exempel *den sjunde* bland alfabetets 28 bokstäver. För att ta reda på detta måste vi räkna upp bokstäverna i en *speciell, på förhand bestämd* ordning. Om vi däremot vill ange antalet bokstäver i alfabetet, så kan vi räkna dem i vilken ordning vi vill. Redan de små barnen tycker om att ordna sina leksaker till exempel efter storlek. I förskolan finns det en bestämd ordning i de dagliga rutinerna. Vi äter frukost före samlingen och lunch efter uteleken. I sagorna lär sig barnen snart i vilken ordning saker och ting sker. I *Sagan om den lilla, lilla gumman* går katten först upp på stolen, sedan upp på bordet osv. Att barn tidigt uppfattar ordning och ställer saker i en bestämd ordning innebär inte att de har ord för sina handlingar. Ord som berättar om ordning är t ex först, sist, i mitten, till slut osv.

Ordningstalen möter barnen i många sammanhang. ”Saxen ska ligga i den *tredje* lådan”, ”Idag är det den *femte* januari”, ”Nalle Puh kom på *andra* plats i tävlingen”. Ibland finns det anledning att låta barnen ordna sig i ett led eller i en kö. Då kan vi ta tillfället i akt och fråga efter det *femte, sjunde, tredje* barnet. Hur många står framför det *fjärde* barnet, bakom det *sjunde*, mellan det *femte* och det *sjunde* barnet? Reflektioner och samtal kring sådana frågor stärker kunskapen om antal och ordningstal och sambandet mellan dem. Det är intressant att tillsammans med barnen reflektera över vad som händer om Per som just nu är den *sjunde* i kön, byter plats med Sanela som är den *tredje*. Några små barn kan hävda att Per fortfarande är den sjunde och Sanela den tredje i kön, eftersom de knyter orden till barnen, jämför aktiviteter med Mollan i kapitel 13, s 161.

Räkneorden som antal

När det lilla barnet pekar på gosedjuren, räknar rytmiskt och pekar på en nalle i taget 1, 2, 3 kan det vara ett tecken på att barnet har förstått att ordet tre talar om att så många finns det i den här mängden. Men det kan också vara så att barnet *namnger* tingen, dvs den första nallen som barnet pekar på heter ett, den andra heter två etc. Det innebär att när barnet pekar på den sista nallen i mängden och säger tre, så menas en nalle som heter tre! Att barn kan peka och räkna till tre innebär inte att de automatiskt förstår principen för hur vi räknar och bestämmer antalet i en mängd med fem eller sju föremål. I Pilotprojektet har vi sett att de allra yngsta barnen behöver olika erfarenheter av att undersöka talen till och med tre i varierade situationer innan de tar sig an den fortsatta talserien. Många barn lär sig tidigt en betydligt längre talserie än de kan använda i praktiken. Det kan gå bra att para ihop varje räkneord med ett föremål fram till sju eller åtta men sedan hoppar de plötsligt över något räkneord eller säger samma ord flera gånger.

Vi har sett flera exempel på att barn räknar t ex ett antal bilar alldeles korrekt: En, två, tre, fyra, fem, sex, *sju*. Om läraren strax därpå frågar hur många bilar det var och barnet inte kan svara utan räknar på samma sätt en gång till, har barnet inte lärt sig konventionen att det sist uppräknade räkneordet anger det totala antalet föremål. I förskolan finns många exempel på vardagssituationer: lek, spel och andra aktiviteter där barnen får erfarenheter och tillfällen att räkna och att reflektera över hur vi gör när vi bestämmer antal.

Räkneorden som beteckning

Räkneord används som vi beskrivit ovan också som beteckning, ett namn utan någon direkt numerisk innebörd. Exempel på sådan användning har vi i postnummer, bilnummer, nummer på busslinjer, telefonnummer, nummer på fotbollsspelare etc. Det är bra att vara uppmärksam på att barn ofta söker mening i räkneorden som faktiskt inte finns. De kan t ex uppfatta ”3” i en busslinje så att bussen kör på tre olika gator, eller att det kostar tre kronor att åka med. Det är inte heller så lätt att förstå skillnaden mellan ”treans buss” och ”trebussen”.

Räkneorden som mätetal

När vi anger hur många föremål det finns i en mängd räcker det oftast att tala om antalet, eventuellt följt av ”stycken”. Med mätetal som t ex används då vi talar om längd, area, volym, massa och tid är det annorlunda. Att volymen eller längden är “7”, säger ju ingenting om storleken. Det krävs också en referens, dvs en enhet vi har använt vid mätningen. Vill vi t ex mäta hur mycket vatten som ryms i ett akvarium, så kan vi ju inte ”räkna vatten” utan vi måste först välja en lämplig enhet att mäta med, t ex 1 liter. Därefter räknar vi *antalet* gånger vi måste fylla litermåttet för att fylla akvariet. Detta antal *i kombination med enheten* ger akvariets volym, t ex 40 liter.

Vi mäter genom att jämföra. Vill vi ta reda på hur långa barnen är, kan vi t ex använda ett måttband eller en tumstock. Genom jämförelse kan vi se att barnets längd svarar mot sträckan upp till 110:e markeringen. Sedan vi konstaterat att enheten är 1 cm, drar vi slutsatsen att barnet är 110 cm långt. Eftersom de flesta personer av erfarenhet vet att enheten i det här fallet måste vara 1 cm, säger vi ofta att barnet är ”en och tio” lång, alltså utan enheter. Enheterna tas för givna.

Gemensamt för de båda exemplen är, att vi först måste bestämma oss för en enhet som referens. Valet av enhet följer i allmänhet en viss konvention som 1 meter, 1 kilogram, 1 liter osv. Det mätetal vi sedan anger består av två delar, en *enhet* och *antalet* sådana enheter vi räknat upp. Detta resonemang handlar om *mätandets princip* dvs vilka konventioner som ligger till grund för hur vi gör när vi mäter.

Vissa storheter låter sig mätas genom direkt jämförelse. Vi kan t ex mäta längden av ett snöre med hjälp av en enmeterssticka eller med hjälp av skalan på ett måttband. För att utveckla förståelse för ”mätandets princip” och vilka enheter vi vanligtvis använder, behöver förskolebarn många erfarenheter av att mäta med icke standardiserade enheter. De kan mäta hur många kaplastavar långa de är, eller hur många glas saft som ryms i saftkannan. På en del förskolor i projektet användes en ”meterstav” som enhet. Det är en träpinne som är en meter lång. Det finns inga graderingar, men barnen vet att ”detta är en meter”. Meterstaven använder barnen för att göra jämförelser. – Är jag längre eller kortare än meterstaven? Är mitt gosedjur längre eller kortare?

Andra storheter är svårare att mäta direkt, men låter sig mätas indirekt. En triangels area kan bestämmas genom att vi beräknar arean av en rektangel eller parallellogram som rymmer två sådana trianglar – vi utnyttjar längden av triangelns bas och höjd och dividerar med två. Storheter som tid, temperatur och hastighet är ännu mer komplicerade att mäta och olika behov har stimulerat och tvingat människan att utveckla raffinerade mätinstrument som klocka, termometer och hastighetsmätare.

Förskolebarn mäter ofta tid genom att koppla den till dagens innehåll. Jag går hem *före* mellanmålet idag, eller jag kommer *efter* samlingen för pappa och jag hade sovmorgon.

Den stora skillnaden mellan antal och mätetal framgår av följande enkla exempel:

5 myror är *lika många* som 5 elefanter

5 meter är *lika långt* som 50 dm

5 meter är *inte lika långt* som 5 dm

Samma räkneord betyder alltid samma antal. Men om räkneorden används som mätetal och enheterna är olika så kan samma räkneord representera olika längd, jfr 3 cm och 3 m. Vårt positionssystem med basen tio är ett slags mätetalssystem med ”talsorterna” ental, tiotal, hundratal osv.

Förskolebarn kommer tidigt i kontakt med mätetal. Till en början uppfattas inte dessa som ett visst antal enheter av en bestämd storlek, utan mera som en storhet eller en kvalitet. Ett barn uppfattar en ”tvåa mjölk” snarare som en speciell förpackning, med visst utseende och viss färg, än att den rymmer dubbelt så mycket som en enlitersförpackning. Även de yngsta barnen i förskolan vet tidigt hur gamla kamraterna är. Men 3 år eller 4 år ses inte som antal hela enheter av storleken ”ett år”, utan är ofta kopplat till barnens längd, utseende, födelsedagskalas etc.

Tal och relationer

Barn lär sig räkna genom att knyta räkneorden till de konkreta föremål som de räknar. Tidigt kan de också förstå och beskriva, att om de har två karameller och får två karameller till, så har de fyra karameller. Men om vi frågar hur mycket två och två till är kan vi få svaret ”en” eller kanske ”tre” eller bara mötas av en oförstående blick. Barnets tidiga språk och tänkande är situationsbundet. Att utveckla förståelse för att ”två” är en abstrakt egenskap och kan behandlas generellt utan att vara knuten till konkreta föremål, är ganska avancerat. Det är en lång och inte alldeles enkel process att lära sig att räkna. Forskning visar att en del barn inte spontant fokuserar på tal i omvärlden, trots att de är med om situationer där de räknar (Hannula & Lehtinen, 2001). Skillnader i barns räkneförmåga i förskoleålder skulle enligt Hannula och Lehtinen kunna bero på att en del barn har få erfarenheter av att räkna och kvantifiera omvärlden. En viktig uppgift för förskolans lärare är därför att försäkra sig om, inte endast att barnen möter tal och räkneord, utan också att de faktiskt riktar sin uppmärksamhet mot och reflekterar över räkneordens innebörder, egenskaper hos talen och vilka principer vi använder i vår kultur när vi räknar. Ett sätt att strukturera god taluppfattning utifrån tre aspekter tas upp av Emanuelsson och Emanuelsson (1997).

Relationer inom tal

Talet fem är ett heltal. Det kan delas upp och grupperas i mindre tal som 4 och 1 eller 3 och 2. Talet 12 kan grupperas i ett tiotal och två ental. Vi kan skriva det som $10+2$ eller 12.

Relationer mellan tal

Talet 5 är ett mer än 4 och ett mindre än 6, två mer än 3 och två mindre än 7, hälften av 10 osv. Förståelse för relationer mellan tal är grundläggande för förståelse av subtraktion. Det vi gör när vi subtraherar är egentligen att vi jämför tal.

Relationer mellan tal och omvärld

Var i omvärlden möter vi talet 5? Vi har fem fingrar på våra händer. Det är fem vardagar i veckan. I ramsan möter vi fem små möss. Lönnlövet har fem flikar osv.

God taluppfattning innebär förståelse för samtliga aspekter av tal. Samtidigt betonas att vi inte kan säga att en person antingen har eller inte har taluppfattning eftersom det är något som ständigt utvidgas och fördjupas även i vuxen ålder. För en mer utförlig beskrivning av olika aspekter hänvisar vi till Nämnarens artiklar om god taluppfattning i årgångarna 1995 –1997.

Addition och subtraktion

Helhet-del-del

Med utgångspunkt i den naturliga heltalsserien kan ett enskilt tal definieras så, att det är lika med det föregående talet i serien ökat med talet ett. Definitionen av talet 2 blir alltså $1+1$, 3 definieras som $2+1$, 4 som $3+1$ ... (Wigforss, 1950).

Men talen har inte bara en seriebetydelse. Talet sju kan inte endast uppfattas som $6+1$ utan som $7+0$, $6+1$, $5+2$, $4+3$ osv. Om man vid antalsbestämning skall kunna ha en annan strategi än att bara räkna upp, måste man kunna dela upp och omgruppera talens delar (Neuman, 1989). En bra fråga är: "Vilka tal ryms inom talet sju?"

När barnen grupperar leksaksbilar tre och tre i garage eller dockor två och två i dockvagnar får de erfarenheter som bidrar till att de utvecklar förståelse för talens helhet och delar. I kapitel 9 kan vi se hur barnen grupperar de nio djuren på bondgården tre och tre då de bygger hagar åt sina djur. I artikeln *Morötter i Bergasalen* (Sterner, 2006) får barnen erfarenheter av att dela upp talet 24. Vi har tidigare nämnt talmönster som barnen upptäcker på tärningar eller dominobrickor. Sådana mönster kan grupperas och kombineras för att bilda nya talmönster. Tio är lika mycket som två femmor, som en sexa och en fyra, eller en sjua och en trea. När barn får vara med och räkna t ex när de skall delas in i mindre grupper får de erfarenheter av att dela upp tal. Tio barn skall para ihop sig två och två. Hur många par får vi? Vad händer om vi skall vara fem barn i varje grupp? Tjugo barn och vuxna skall äta vid fem bord. Hur många blir vi det vid varje bord?

Genom att dela upp talen i grupperingar kan vi uppfatta, systematisera och kontrollera större mängder. I vår kultur har vi valt att ha talet tio som bas, tio ental grupperas som ett tiotal, tio tiotal till ett hundratal etc. Att vi har talet tio som bas beror sannolikt till en del på att vi har tio fingrar och att människan genom historien har använt händerna som räkneredskap.

Genom erfarenheter av att räkna och bestämma antal i hemmet, i förskolans olika aktiviteter och genom nybörjarundervisningen i skolan lär sig barnen att göra beräkningar. Kilborn et al (1985) beskriver ett antal strategier som barnen använder vid problemsituationer kopplade till addition och subtraktion, se också Johansson (2005).

1 Den mest primära strategin bygger på ett beroende av konkret material, såsom fingrar eller knappar. Barnen löser då uppgifter genom att koordinera räkneramsan med föremål ett och ett.

2 Den andra strategin bygger också på olika typer av ramsräkning, men denna sker nu ”i huvudet”. Även i det här fallet förekommer det att barn söker konkret stöd, t ex i sina fingrar. Dessa symboliserar då inte direkt talen, de opererar med, utan används för att hålla reda på stegen i räkneramsan.

3 Den tredje strategin bygger på mer eller mindre automatiserade talfakta. Här förekommer många varianter från långa och komplicerade härledningar till helt automatiserade kunskaper.

Inom var och en av dessa huvudstrategier finns varianter. Förskolebarn använder inte i så stor utsträckning uttryck som ”plus”, ”minus” och ”är lika med”.

Strategier vid addition av typen 3 + 4 = 7

Lägga samman

Barnet räknar först upp tre föremål och därefter fyra föremål. De två mängderna förs samman till (eller betraktas som) en mängd och samtliga föremål räknas upp ett och ett: En, två, tre, fyra, fem, sex, *sju*.

Uppräkning från början

Barnet börjar med att räkna upp till tre och fortsätter sedan direkt med uppräkningen till sju: En, två, *tre*, ..., fyra, fem, sex, *sju*.

Uppräkning från det första talet

Barnet vet att de inte behöver räkna upp det första talet utan utgår från talet tre: *Tre*, ..., fyra, fem, sex, *sju*.

Uppräkning från det största talet

Barnet inser att det inte spelar någon roll om det börjar på tre eller fyra men att det går snabbare och enklare att starta med det största talet: *Fyra*, ..., fem, sex, *sju*.

Härledd tabell

Barnet har automatiserat vissa delar av additionstabellen och kan utnyttja dessa som mellanled. Tre och tre är sex och en till är *sju*.

Automatiserad tabell

Barnet kan kombinationen utantill och behöver inte räkna:
Tre plus fyra är *sju*.

Strategier vid subtraktion av typen 7 – 4 = 3

Ta bort

Barnet räknar först upp sju föremål, tar sedan bort fyra föremål och räknar slutligen upp de återstående: En, två, tre, fyra, fem, sex, *sju*, ..., en, två, tre, *fyra*, ..., en, två, *tre*.

Lägga till

Barnet räknar först upp de fyra föremålen som läggs för sig och fortsätter därefter att räkna tills det blir sju föremål. Därefter räknas den andra mängden på nytt: En, två, tre, *fyra*, ..., fem, sex, sju, ..., En, två *tre*.

Jämföra

Barnet räknar först upp två olika mängder med föremål, t ex sju knivar och fyra gafflar. Mängderna jämförs sedan genom matchning, varefter de överblivna knivarna räknas upp: En, två, tre, fyra, fem, sex, *sju* ..., en, två, tre, *fyra*, ..., en, två, *tre*.

Nedräkning till återstoden

Barnet räknar fyra steg bakåt från sju och håller i huvudet eller med hjälp av fingrarna reda på, hur många steg som tas: *Sju*, ..., sex, fem, fyra, *tre*.

Uppräkning från delen

Barnet uppfattar uppgiften som en öppen additionsutsaga och räknar upp från fyra. Antalet steg hålls i huvudet eller räknas på fingrarna: *Fyra*, ..., fem, sex, sju... *tre*.

Härledd tabell

Barnet har automatiserat vissa subtraktionskombinationer och utnyttjar dessa som mellanled: Sju minus två är fem ... och minus två är *tre*. Eller tre plus fyra är sju, då måste sju minus fyra vara *tre*.

Automatiserad tabell

Barnet behärskar kombinationen utantill: Sju minus fyra är tre.
Tänkandet utvecklas och förändras successivt så att de flesta elever använder tabellkunskaper i 8 –9 års ålder.

Lära och undervisa matematik

– *internationella perspektiv*

Elevers matematiklärande påverkas av många faktorer, men det är det lärare tror på, deras kunskap och det de gör i och utanför klassrummet som mest påverkar elevers förståelse för och självförtroende i matematik. *Lära och undervisa matematik* visar hur forskning kan ge insikter om den viktiga roll som lärare spelar när det gäller att underlätta och stödja inlärning.

Boken innehåller bidrag av lärare och forskare från många länder. Bredden på deras sakkunskap visar tydligt hur varierad, komplex och stimulerande studiet av matematikdidaktik kan vara. Författarna ger många exempel på aktiviteter för klassrummet och knyter på ett unikt sätt samman teori och praktik.

Lära och undervisa matematik – *internationella perspektiv* är skriven för verksamma lärare, för kompetensutveckling och lärarutbildning.

Att undersöka barns geometrikunskaper

ERICH WITTMAN

Epokgörande forskning kring barns utveckling av spatialt tänkande genomfördes av Geneveskolan under 1940-talet. Den speglade tydligt geometrins matematiska struktur så som den uppfattades av gruppen vid denna tid och följde ”matematiska strukturers arkitektur” enligt Bourbaki[1]. Sedan sjuttiotalet, när den nya matematiken, ”the New Math” med skolmatematik i Bourbakiversion, misslyckades, har länken mellan psykologisk forskning och matematikens kunskapsteori alltmer förlorats. Denna artikel är ett försök att återknyta sambandet mellan denna forskning och matematiska strukturer, åtminstone när det gäller elementär skolgeometri.

Eftersom forskning i det tyska projektet Mathe 2000 baseras på den kunskapsteoretiska strukturen i elementär matematik finns stort behov av studier av barns tänkande enligt denna struktur. För aritmetik finns omfattande arbeten om barns taluppfattning som ger tillräcklig grund för att utforma inlärningssituationer. När det gäller kursplaneanknuten kunskap om barns geometrikompetens är det mycket sämre. För att samla nödvändig information har därför ett test utvecklats, som är direkt relaterat till grundläggande idéer i elementär geometri. I det följande ges en beskrivning av detta test och empiriska belägg för nybörjares geometrikunskaper. För att visa hur grundläggande idéer kan användas för att utforma en välstrukturerad kursplan följer i slutet en sekvens av lärandemiljöer kring modellering.

Grundläggande begrepp i elementär geometri

Den huvudsakliga källan för utvecklingsarbetet inom Mathe 2000 har varit Hans Freudenthals arbete. I artiklarna ”Was ist Mathematik und welchen Bildungswert kann sie haben?” (Freudenthal, 1963) och ”Geometry between the devil and the deep sea” (Freudenthal, 1971) utmanade han dogmatiska synsätt på matematisk stringens och förordade att geometri skulle läras ut ”på samma sätt

[1] Nicolas Bourbaki är pseudonym för en inflytelserik grupp franska matematiker som började skriva ett verk som betonade matematikens inre enhetlighet och sammanhang på 1930-talet. Deras arbete kom att ha stor påverkan på hur matematiken kom att presenteras, se t ex Dieudonne, Mathematics: The Music of Reason.

som simning". Freudenthals förhållningssätt, som senare fick en kunskapsteoretisk grundval, utformades mycket snabbt inom ramen för Wiskobasprojektet som genomfördes under hans ledning, se Freudenthal (1983). På kort tid utvecklades det till "Realistic Mathematics Education" (RME), som idag är känd världen över. Kännetecknande för RME har varit konkretisering av didaktiska idéer i substantiella inlärningsmiljöer (substantial learning environments, SLE). En inlärningsmiljö kallas substantiell om den uppfyller följande krav (Wittman, 2001):

1 Den representerar centrala mål, innehåll och matematiska undervisningsprinciper på en bestämd nivå.

2 Den är relaterad till viktigt matematikinnehåll, processer och procedurer bortom denna nivå och är en rik källa för matematiska aktiviteter.

3 Den är flexibel och kan anpassas till den specifika klassrumssituationen.

4 Den integrerar matematiska, psykologiska och pedagogiska aspekter i matematikundervisningen och utgör därför ett rikt fält för empirisk forskning.

"Substance" syftar främst på den kunskapsteoretiska rikedomen i det aktuella ämnet, där "rikedom" även innefattar innehåll i de problem eleverna ska utforska. För att få till stånd denna rikedom i matematikundervisningen räcker det inte att analysera olika områden inom elementär matematik endast från matematisk synvinkel. Lika viktiga är kursplanetraditioner, tillämpningar inom olika samhällsområden, den elementära matematikens historia, det matematiska tänkandets psykologi och erfarenheter i klassrummet. Alla dessa områden måste studeras mot bakgrund av allmänna utbildningsplaner.

Den stomme som är nödvändig för att få sammanhang i SLE får man bäst med hjälp av kommenterade listor över "grundläggande idéer". I RME har följande lista använts (de Moor, 1991): iakttagande och planering, orientering och lokalisering, spatiala resonemang, transformering, mätning och beräkning.

I Mathe 2000 valdes en liknande utgångspunkt, men med tillägget att tysk tradition togs med som underlag. I synnerhet påverkades Mathe 2000 av det epokgörande arbetet av "den tyske Freudenthal", Heinrich Winter. Det gav både teoretiska grunder för matematikundervisningen och mycket kreativa SLE för alla nivåer. Ett särdrag i Winters arbete är hans starka betoning av komplementaritet i matematiska strukturer och tillämpningar. Hans grundläggande skrift om generella mål i matematikundervisning har spelat en avgörande roll för denna artikel. De mål han formulerat innefattar de avgörande inslagen i en matematisk process: matematisering, utforskning, resonemang och formulering (Winter, 1975).

En annan viktig referens för Mathe 2000 är den "operativa principen", ursprungligen myntad av Arnold Fricke 1955 och vidareutvecklad av många andra, se t ex Wittman (1993). I grunden är den operativa principen ett kunskapsteoretiskt program: Inom alla matematikområden har vi "objekt" (som är konstruerade på olika sätt), "operationer" (genom vilka objekten kan omvandlas och ”effekter” av operationerna på egenskaper och relationerna mellan dem. Kunskapen om dessa effekter möjliggör ”operativa bevis” av satser innan man kommer till den formella nivån.

Listan på grundläggande begrepp på vilka projektets kursplan i geometri baseras, speglar komplementaritet mellan den rena och den tillämpade aspekten av geometri liksom den operativa principen, se nedan.

För de tidigare skolåren har ett läromedel utarbetats, ”Das Zahlenbuch” (Wittman & Müller, 2003), med utgångspunkt från en komplett studieplan baserad på dessa grundläggande idéer. Från årskurs till årskurs återkommer idéerna i allt mer komplexa inlärningssituationer. Ett exempel ges i slutet av kapitlet.

Grundläggande idéer i geometri

1 **Geometriska former och deras konstruktion**
I det tredimensionella rummet finns en mängd former i olika dimensioner: Punkter, linjer, ytor och kroppar. Geometriska former kan konstrueras och definieras på olika sätt. Genom konstruktionen får formerna vissa egenskaper. Utgående från grundläggande former kan mer komplexa former skapas.

2 **Operationer med former**
Former kan transformeras på olika sätt: parallellförflyttas, roteras, reflekteras, förstoras, förminskas, projiceras, klippas, utvidgas, delas upp, sättas ihop, tvärsnittas.

Vid operationer med former är det alltid intressant att fråga sig vilka relationer som uppkommer, vilka egenskaper som förblir invarianta och vilka som förändras på ett systematiskt sätt. Med ett lämpligt program är det möjligt att rita och experimentera med figurer och studera hur de ”uppför sig” på datorskärmen.

3 **Koordinater**
Med hjälp av koordinatsystem på linjer, ytor och i rymdobjekt kan transformationer beskrivas med hjälp av tal och ekvationer. Geometri sätts in i ett algebraiskt sammanhang.

4 **Mätning**
Längd, area, volym och vinklar kan mätas och numeriska relationer mellan måtten kan uttryckas med hjälp av formler, speciellt för area och volym, liksom med trigonometriska formler.

5 **Geometriska mönster**
Det finns ett oändligt antal sätt att etablera relationer mellan geometriska objekt så att det uppstår geometriska mönster och strukturer, som systematiskt studeras i teorier som euklidisk geometri, kombinatorisk geometri, grafteori, projektiv geometri osv.

6 **Geometriska former i omgivningen**
Verkliga föremål och fysiska operationer med dessa kan beskrivas med hjälp av geometrins begrepp. Teknologin utvecklar procedurer för att tillverka former som ska svara mot bestämda ändamål. Inom konsten används former som uttrycksmedel.

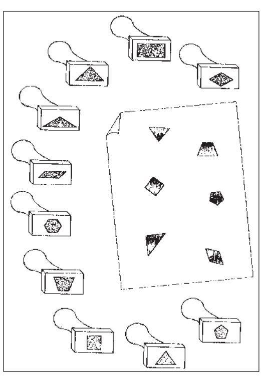
7 **Modellering med geometri**
Problem som rör rummet och abstrakta relationer kan modelleras och lösas med hjälp av geometri. Här spelar beskrivande geometri en viktig roll, och tillämpningar av denna underlättas numera mycket genom datorgrafik.

G-testet

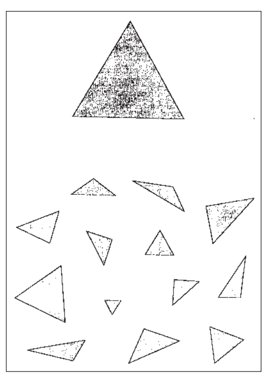
För att få underlag för planering av inlärningsmiljöer utvecklades ett test, ”G-testet i geometri”, bestående av 16 uppgifter, med utgångspunkt från grundläggande idéer i elementär geometri. ”G” kommer från det tyska ordet ”Grundideen”, grundläggande begrepp. Testets utformning är en anpassning av MORE-testet som utvecklades och användes av Marja van der Heuvel-Panhuizen för att utvärdera nybörjares aritmetiska kompetenser. Uppgifterna relateras till de grundläggande idéerna i ovanstående sammanställning på följande sätt:

Idé 1

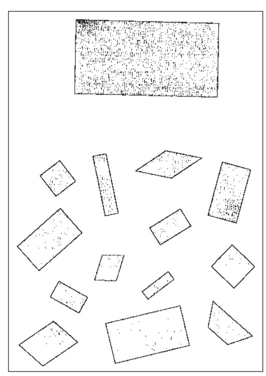
Ark 1, Stämplar, visar sex olika former och tio gummistämplar. Barnen ska förbinda varje form med den stämpel som användes för att trycka den. Ark 7, Likformiga trianglar, visar en stor liksidig triangel och ett antal mindre trianglar. Barnen ska ringa in de små trianglarna som liknar den stora. Ark 8, Likformiga rektanglar, presenterar samma uppgift för rektanglar.



Ark 1



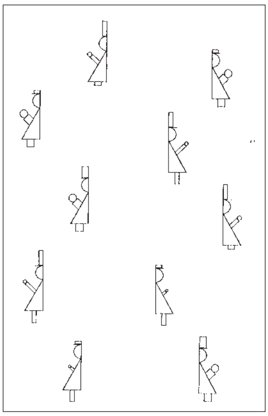
Ark 7



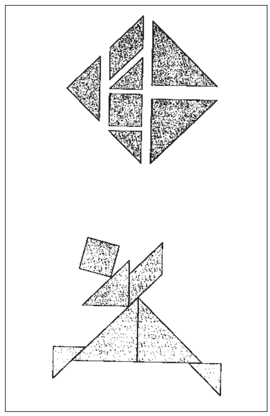
Ark 8

Idé 2

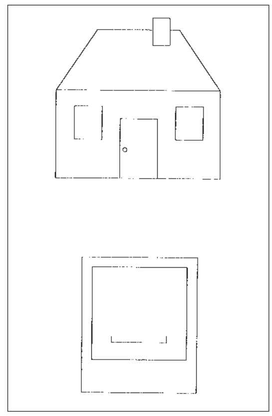
Ark 3, Spegelbilder, visar halvor av olika små gubbar. Barnen ska koppla samman två halvor som ”hör ihop”. Ark 4, Tangram, visar materialets sju former och en figur som är gjord av dessa former. Barnen ska koppla ihop motsvarande former. Ark 9, Hus, visar en ritning av ett hus samt en kamerabild. Barnen uppmanas att rita huset så som det skulle se ut på fotografiet.



Ark 3



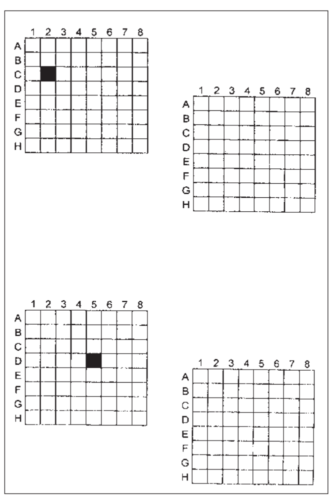
Ark 4



Ark 9

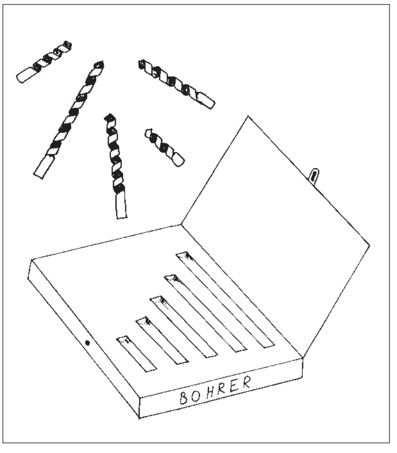
Idé 3

På ark 5, Koordinater, ser vi två rutnät med 8×8 rutor med vissa rutor markerade. Uppgiften är att färglägga ”samma” ruta i det tomma rutnätet.

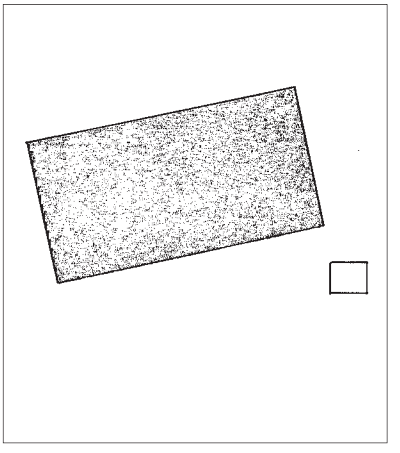


Idé 4

De fem borren på ark 2, Borrar, ska placeras i lådan så att storleken stämmer. På ark 12, Mätning, ska rektangelns långsida mätas med hjälp av en linjal.



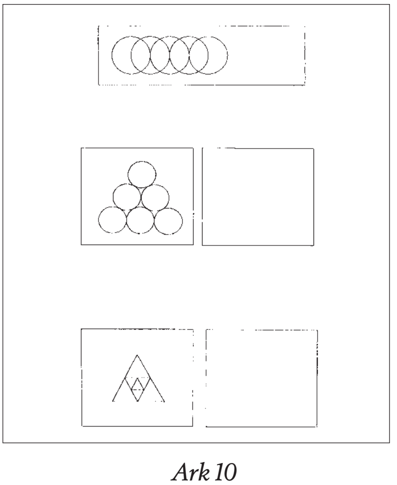
Ark 2



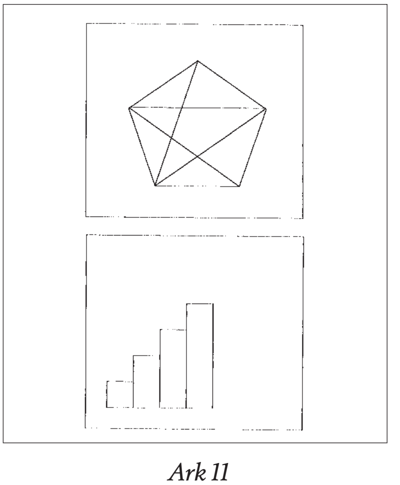
Ark 12

Idé 5

Ark 10, mönster 1,2 och 3, och ark 11, mönster 4 och 5, innehåller geometriska mönster som ska slutföras eller fortsättas.



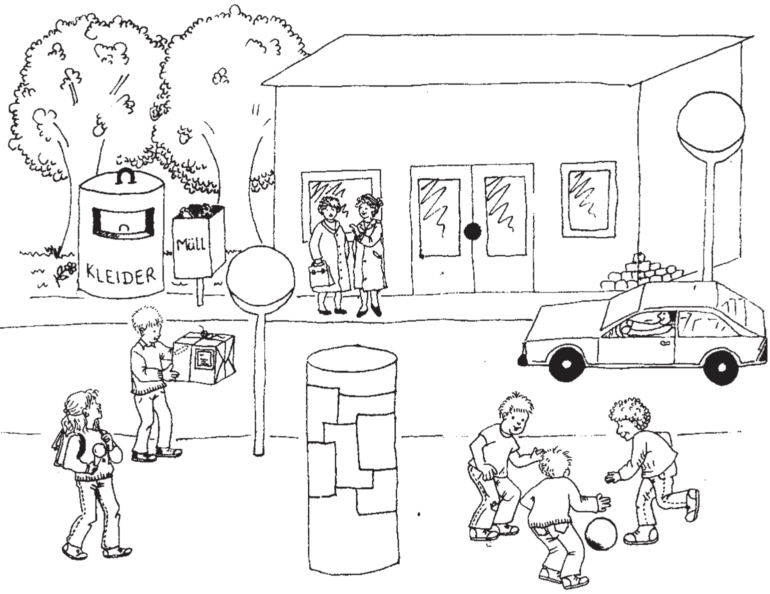
Ark 10



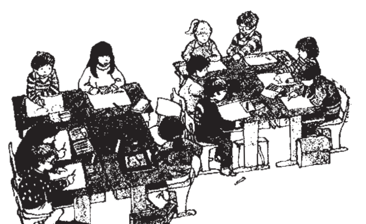
Ark 11

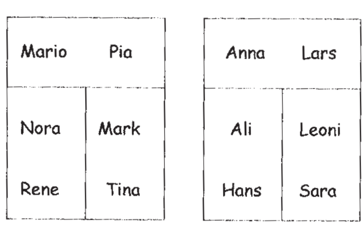
Idé 6

Ark 13 visar geometriska former i omgivningen. Barnen får se modeller av en gul boll, en blå cylinder och ett rött rätblock. Deras uppgift är att färglägga formerna på bilden i samma färg som modellerna.



Idé 7





På ark 6, Ritning, ser vi situationen i ett klassrum och därunder en ritning som visar hur barnen är placerade. Barnen uppmanas att hitta den tomma stolen och ringa in det frånvarande barnets namn.

Arkens ordningsföljd bestäms av uppgifternas natur: Barn uppmanas att dra linjer på ark 1, 2, 3, och 4, att färglägga en kvadrat på ark 5 och att ringa in något på ark 6, 7 och 8. Dessa uppgifter är slutna. På ark 9, 10 och 11 ska barnen rita något, öppna uppgifter. När det gäller ark 12 och 13 behövs extramateriel (linjal, modeller av former). Dessa kan fånga barnens uppmärksamhet så att de inte går vidare till nya uppgifter och måste komma i slutet.

Testet kan genomföras som individuella intervjuer. Denna forskningsmetod är tidskrävande men gör det möjligt att utforska barnens tänkande på ett djupare plan. Liksom Marja van den Heuvels MORE-test, kan det också användas som ett skriftligt test och genomföras med flera barn samtidigt. Man måste dock i förväg visa barnen hur de ska binda samman, färglägga och ringa in föremål. De måste också uppmuntras att rita figurer när det behövs. Tillvägagångssätten kan och bör naturligtvis kombineras, eftersom ett skriftligt test aldrig kan visa barnets fulla potential. De tekniska kraven för att kunna svara är lika låga som på MORE-testet, så det kan ges till nybörjare i skolan.

Nybörjares kunskaper i geometri

G-testet i geometri användes i en pilotstudie för att få en översikt över vilka geometriska kunskaper barnen har när de börjar skolan (Waldow & Wittman, 2001). 83 förstaklassare (40 pojkar, 43 flickor) från fyra olika klasser i Dortmundområdet intervjuades vid skolstarten.

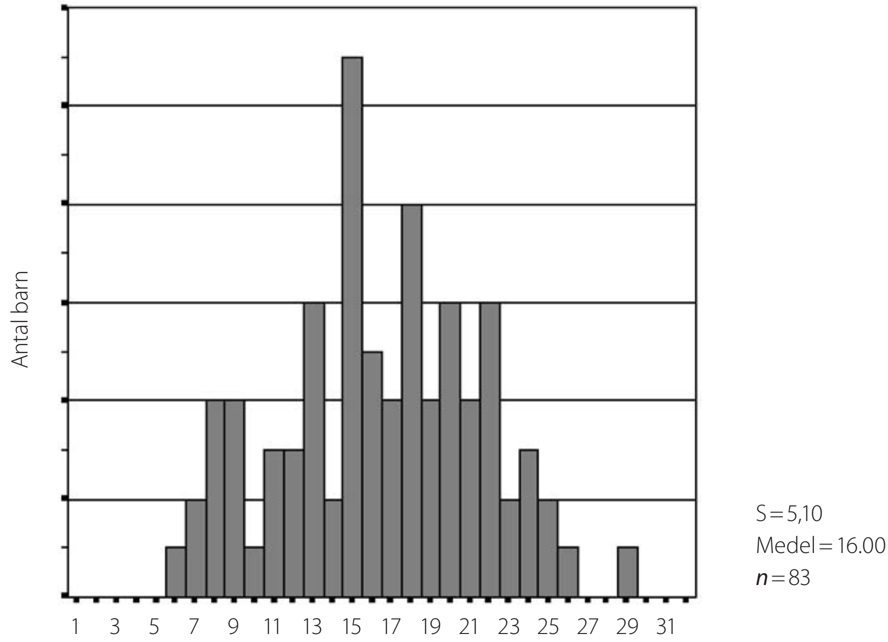
Två klasser (36 barn) kom från en landsbygdsskola, en klass (23 barn) från ett förortsområde och en klass (24 barn, varav 17 invandrarbarn) från ett innerstadsområde. Barnen var i sexårsåldern, den ålder då tyska barn börjar skolan. Testarken samlades ihop till ett häfte. Vid ett tillfälle slutförde fyra barn samtliga uppgifter. Tidsåtgången för de kompletterande intervjuerna varierade från 24 till 42 minuter. Alla barnen var mycket intresserade. Videofilmen visar att koncentrationen endast obetydligt minskade efter hand.

Alla intervjuer videofilmades. De analyserades enligt följande bedömningsmall: Ett korrekt svar gav 2 poäng, ett svar som var nästan korrekt 1 poäng (t ex för 5 fem korrekta stämplar i stället för sex på ark 1). Högsta möjliga poängtal var alltså $16 \times 2 = 32$. Denna grova mall användes av praktiska skäl. I geometriska uppgifter, i synnerhet i dem som har öppna svar, är det knappast möjligt att göra en detaljerad jämförelse av barnens svar.

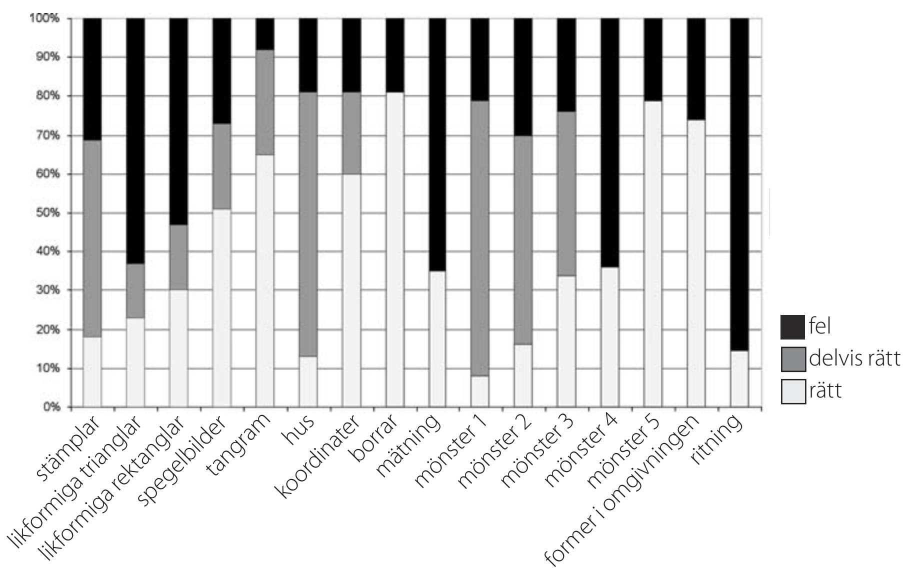
Figur 1 visar fördelningen av de poäng barnen uppnådde (medeltal: 16, standardavvikelse: 5,10). Den högsta poängen var 29 och den lägsta 6.

Figur 2 visar andelen korrekta, delvis korrekta och felaktiga svar för var och en av de 16 uppgifterna. Andelen korrekta svar varierade från 82% (”borrar”) till 8% (”mönster 1”).

Andelen ”felaktiga svar” varierade från 8% (”tangram”) till 85% (”ritning”). Av de svar som bedömdes som ”felaktiga” fanns dock många som i och för sig var rimliga. Ett barn bokförde till exempel resultatet av längdmätningen i ark 12 som ”412 cm”. Hon hade använt sin linjal från 4 cm till 12 cm i stället för från 0 cm till 8 cm.



Figur 1. *Barns resultat (max 32 poäng)*



Figur 2. *Riktiga, delvis riktiga och felaktiga svar i procent*

Barnen från landsbygdsskolorna uppvisade bättre geometriska förmågor än barnen från förortsskolan. En möjlig förklaring kan vara att landsbygdsbarn har fler tillfällen att göra spatiala erfarenheter. Barnen från innerstadsskolan hade sämre resultat än de tre andra grupperna. Detta beror säkert på de icke tysktalande invandrarbarnens speciella situation. De flesta uppgifter visade inga skillnader mellan flickor och pojkar. När det förekom skillnader, som t ex på ark 10 och 11, var de alltid till flickornas fördel.

Diskussion

G-testet i geometri är svårt för nybörjare. Den bedömningsmall som används kan inte visa barnens hela förmåga utan endast deras lägsta nivå. Mot denna bakgrund är testresultaten förvånansvärt goda. I allmänhet är barnen ganska väl rustade för att börja studera grundläggande begrepp i elementär geometri. Det finns dock mycket stora individuella skillnader. Ett barn kunde t ex inte forma en bit lera till en kula. Låga testresultat för vissa elever ska inte tolkas som ett skäl att skjuta upp geometri till ett senare stadium. Det ska snarare ses som en signal att erbjuda barnen aktiviteter med anknytning till den elementära geometrins grundläggande begrepp under förskoleåren. Därför beslöts att i Mathe 2000 utveckla ett häfte med geometriaktiviteter för förskolebarn som komplement till redan befintligt material med aktiviteter kring taluppfattning. Häftet innehåller inte bara arbete med plan och spatiala former, utan även förslag till aktiviter som att forma kulor och att klättra i träd. Inte heller ska de ”svagheter” vi ser i uppgifter om likheter och modellering tolkas som skäl att skjuta upp dessa moment till ett senare stadium. Barn behöver tid på sig för att bemästra svåra innehåll. Därför måste sådana introduceras tidigare, men i lämpliga situationer. Denna rekommendation gjordes redan av Whitehead (1950, s 25):

> It is not true that the easier subjects should precede the harder. On the contrary, some of the hardest must come first because nature so dictates, and because they are essential to life.

Detta sätt att använda testresultaten belyser den holistiska filosofi som präglar Mathe 2000. Att lära matematik ses inte som att lära sig bemästra moment för moment på ett kumulativt sätt, utan att bättre och bättre, bemästra komplexa begrepp och processer på ett holistiskt sätt. Denna process kan naturligtvis stödjas av utvecklade inlärningsmiljöer. De svårigheter som barnen möter när de arbetar med olika uppgifter ger värdefull information om hur man ska förändra undervisning och lärande. För utvecklingsarbetet inom Mathe 2000 har just detta ändamål med G-testet varit av avgörande betydelse.

Slutsatser

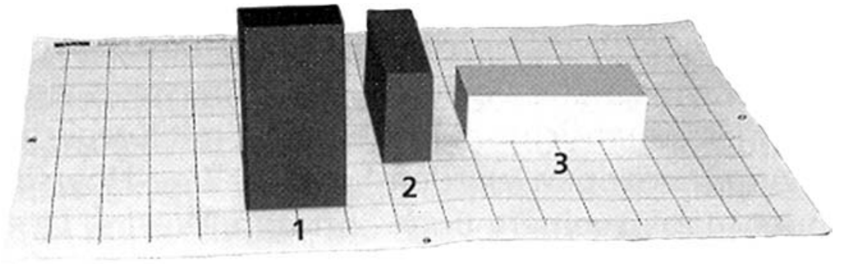
Utgående från erfarenheter från detta pilotprojekt genomförs revideringar av G-testet i geometri. Några uppgifter kommer att strykas, t ex Tangram, andra kommer att modifieras och bedömningsmallen ska förfinas så att kvantitativa analyser möjliggörs.

Ett specialfall av modellering (begrepp 7) är plangeometri. I kursplanen för Mathe 2000 börjar undersökningen av ritningar i årskurs 1 och fortsätter systematiskt genom de följande årskurserna, se (Wittman & Müller, 2003; 2004). En typisk inlärningsmiljö för årskurs 3 och 4 är spelet "Se och Bygg", som syftar till att barnen ska bli bekanta med grundläggande element i beskrivande geometri (vy uppifrån, vy från sidan).

Se och Bygg

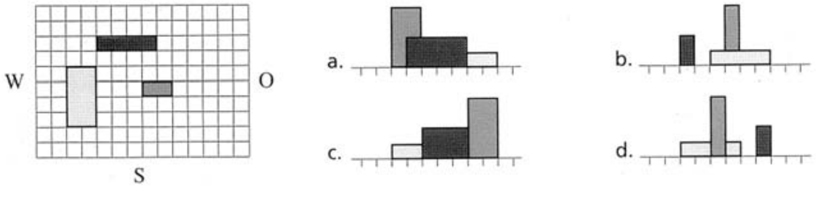
Spelet består av

- Ett rutnät (kvadrater om 2,5 × 2,5 cm) som representerar en byggplats eller markplan på vilket de fyra väderstrecken norr, öster, väster, och söder är markerade.
- 3 byggnader (klossar om 2,5 cm × 5 cm × 10 cm, röd, blå och gul) som kan placeras på rutnätet liggande, stående eller liggande på sidan, se figur 3.



Figur 3

- Uppsättningar av problemkort. Varje uppsättning innehåller fem kort som visar byggnaderna sedda uppifrån och från olika håll, från norr, öster, väster och söder, se figur 4. I några uppsättningar anges väderstrecken, i andra inte.



Figur 4. *Vilken bild stämmer med vilket väderstreck?*

→

”Se och Bygg” är ett spel för fyra barn som sitter runt ett bord med byggplatsen. Varje barn ansvarar för ett väderstreck.

Följande aktiviteter är möjliga, och de markeras med olika färg på problemkorten.

Aktivitet 1: Kombinera bilder från sidan med en given bild uppifrån

De fyra barnen placerar de tre byggnaderna enligt bilden uppifrån. Därefter delas korten med bilder från sidan ut, utan angivelse av väderstreck. Varje barn jämför sin vy med kortet. Korten går runt tills alla vyer stämmer.

Aktivitet 2: Placera byggnader

Bilden uppifrån vänds upp och ned. Korten med bilder från sidan delas ut till respektive väderstreck. De fyra barnen ska nu placera de tre byggnaderna enbart med hjälp av bilderna från sidan.

Eftersom varje bild från sidan bara innehåller delar av den nödvändiga informationen kan ingen ensam lösa problemet, utan barnen måste samarbeta. Som regel får den första placeringen revideras flera gånger. Till en början tar det tid, men barnen lär sig snabbt hur de ska samordna sina aktiviteter. Bilden uppifrån används sedan för att kontrollera resultatet.

Aktivitet 3: Koordinera bild uppifrån med bilder från olika sidor

De fem korten i dessa uppsättningar visar inga väderstreck. Ett barn väljer en bild med vy från sidan och behåller det under lösningsprocessen. Därefter vrids kortet med bild uppifrån tills det stämmer med den aktuella bilden från sidan. Slutligen ska de tre andra barnen välja korrekt sidovykort. Även detta problem kräver mycket samarbete.

Aktivitet 4: Koordinera olika sidor utan bilden uppifrån

Varje uppsättning består av fem kort utan angivelse av väderstreck. Kortet med bilden uppifrån vänds upp och ned och används för att kontrollera resultatet. Ett barn väljer en bild med vy från sidan och placerar det så att de tre andra barnen kan se det. De tre återstående korten delas ut bland dessa som måste förhandla om vilket kort som stämmer med vilket väderstreck.

Att använda ”Se och Bygg” i klassrummet är mycket enkelt. Varje uppsättning problemkort förvaras i separata kuvert, och alla uppsättningar förvaras i en låda. Eftersom uppsättningarna är numrerade uppstår ingen förvirring. Allt läraren behöver göra är att introducera grundläggande begrepp (vy uppifrån, vy från sidan) och de olika aktiviteterna. Barnen kan sedan arbeta med materialet på egen hand: Varje grupp tar upp ett kuvert med en uppsättning kort, löser det aktuella problemet, lägger tillbaka korten i kuvertet, lämnar tillbaka detta och tar nästa kuvert.

Martina Röhr undersökte de sociala processer som spelet lockade fram och kunde rapportera en fantastisk respons från lärarna (Röhr, 1995). En andra del av "Se och Bygg" utformades av Ueli Hirt och Sandra Meister för de följande årskurserna (Hirt & Meister, 2002). Dessa schweiziska matematikutbildare använder Soma-kuben i stället för rektangulära klossar och föreslår ett stort antal olika problem (http://www.mathematische-basteleien.de/somacube.htm).

Referenser

Freudenthal, H. (1963). Was ist Mathematik und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht*, *9*(4), 5–19.

Freudenthal, H. (1971). Geometri between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413–435.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press.

Hirt, U. & Meister, S. (2002). *Schauen und Bauen. Teil 2: Spiele mit dem Soma-Würfel*. Seelze: Kallmeyer.

Moor, E. de (1991). Geometry instruction in the Netherlands (ages 4–14) – the realistic approach. I L. Streefland (Red), *Realistic mathematics education in primary school* (s 119–138). Utrecht: CD-ß Press.

Röhr, M. (1995). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Braunschweig/Wiesbaden: DUV.

Waldow, N. & Wittmann, E. Ch. (2001). Ein Blick auf die geometrischen Vorkenntnisse von Schulanfängern mit dem mathe 2000-Geometrie-test. I W. Weiser & B. Wollring (Red), *Beiträge zur didaktik der Mathematik für die Primarstufe: Festschrift für Siegbert Scmidt* (s 247–261). Hamburg: Dr. Kovac.

Whitehead, A.N. (1950). *The aims of education*. London: Bennett.

Winter, H. (1975). Allgemeine lernziele im Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *7*(4), s 106–116.

Wittmann, E. Ch. (1993). Designing teaching: The Pythagorean theorem. I T. J. Cooney (Red), *Mathematics, pedagogy and secondary teacher education* (s 97–165). Portsmouth, NH: Heineman.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systematic process. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 1–20.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2003 & 2004). *Das Zahlenbuch. Mathematik für die Grundtschule*. Vol 1–4.