

Matematiken vid Sveriges folkskolor och folkskoleseminarier

av Harald Dahlgren
rektor vid folkskoleseminariet i Uppsala

I. Folkskolor ¹

1. Skolorganisation

De skolor som här behandlas är 1) *Folkskolor* 2) *Fortsättningsskolor* 3) *Högre folkskolor*.

Folkskolan omfattar tre olika avdelningar: *småskolan* de två första åren, *den egentliga folkskolan* (eller folkskolan i begränsad mening) de följande fyra skolåren samt *den högre avdelningen av folkskolan*, som vanligen utgör en ett- eller tvåårig överbyggnad till den egentliga folkskolan.

Fortsättningsskolan har som ändamål att ge de elever fortsatt undervisning som har genomgått den egentliga folkskolan men inte övergår till dess högre avdelning. Medan undervisningen i folkskolan under hela året bedrivs så att skolarbetet utgör barnets huvudsakliga sysselsättning är fortsättningsskolan avsedd för de elever som redan gått ut i praktisk verksamhet. Den lagstadgade årliga omfattningen av denna skola är minst 180 timmar. I regel koncentreras dessa till en period av 6 veckor under vintern, men ofta och särskilt i städerna organiseras fortsättningsskolan som kvällsskola och lektionerna fördelas på större delen av läsåret.

Den högre folkskolan har till ändamål att ge barn som genomgått den egentliga folkskolan tillfälle att tillägna sig ett större mått av praktisk och samhällsorienterad bildning. Den utgör alltså i likhet med den högre avdelningen och fortsättningsskolan en överbyggnad till den egentliga folkskolan, men den är i organisatoriskt avseende skild från

denna och sammanförs bäst med de skolformer som tillhör det högre skolväsendet och kallas realskola, samskola eller kommunal mellan-skola.

Barnets *skolålder* räknas med början det kalenderår under vilket barnet fyller 7 år och fram till slutet av det år då det fyllt 14 år, varvid dock det barn fortfarande är skolpliktigt som vid slutet av skoltiden inte tillägnat sig de kunskaper som erfordras för avslutad skolgång. Eftersom den för tillägnandet av dessa kunskaper beräknade skolkursen är 6-årig, omfattar den skolpliktiga tiden normalt endast 6 år.² Den högre avdelningen och fortsättningsskolan förekommer inte i alla skoldistrikt och där den finns är skolgången frivillig. Således är skolplikten begränsad till småskolan och den egentliga folkskolan.

Småskolan och den egentliga folkskolan har en mängd *olika former*, som skiljer sig från varandra dels genom olika utbildning av läraren, dels genom förekomst eller avsaknad av samtidig undervisning av olika årskurser. Om sådan undervisning förekommer, så varierar även antalet samtidigt undervisade klasser, från två till fyra.

Några av dessa skolformer måste anses som mindre tillfredsställande, men i avlägsna delar av landet kan de ursäktas med den ringa folktätheten eller av ogynnsamma ekonomiska förhållanden. Speciellt bör man notera den s.k. mindre folkskolan (en undantagsform), en mycket utbredd skolform, som kännetecknas dels av i viss mån reducerade läroplaner, dels och huvudsakligen av att den använder lärarkrafter som endast har den för småskolan avsedda utbildningen.

Skolåret skall enligt lagen omfatta minst 34,5 veckor och den dagliga undervisningstiden inte överskrida 5 timmar i småskolan och 6 timmar i den egentliga folkskolan. Några enklare skolformer, bland dem de mindre folkskolorna, ger undervisning varannan dag (eller periodvis), varvid elevens undervisningstid begränsas till föga mer än hälften av den lagstadgade tiden. Å andra sidan är undervisningstiden på många orter, särskilt i städerna, utsträckt över den påbjudna.

På landsbygden förekommer *allmänt samundervisning av båda könen*; i städerna och i stadsliknande orter utnyttjas sådan vanligtvis endast i folkskolans småskoleklasser.

Det svenska skolväsendet kännetecknas lyckligtvis ej av någon strängare *examination*. Åtminstone kan man fastslå detta beträffande folkskolorna. Visserligen föreskriver skollagen årliga "offentliga förhör" under ledning av ordföranden i en skolstyrelse. Dessa offentliga förhör har dock i stort sett karaktär av skolhögtider och man kan knappast anse att de utövar något väsentligt inflytande på undervisningen. I varje fall kan deras inverkan inte bedömas som ogynnsam. Vidare skall de elever som går ut ur skolan genomgå "en speciell prövning". Denna har sällan karaktär av rigorös examen; i regel är det läraren själv som prövar och han bestämmer elevens betyg, liksom han tidigare gjort efter återkommande prov varje år.

För att bli anställd som *lärare* i småskolan och den s.k. mindre folkskolan och i vissa fall som bitr. lärare i den egentliga folkskolan krävs genomgåendet småskoleseminarium. För varje annan lärartjänst – i folkskolan och fortsättningsskolan – måste examen ha avlagts vid ett folkskoleseminarium. Småskoleseminariet är ett- till tvåårigt, folkskoleseminariet fyraårigt. Den svenska folkskolan använder inte endast manlig lärarkraft utan i stor utsträckning även kvinnlig. Alla som utbildats vid småskoleseminarium är med få undantag kvinnor, likaså den största delen av lärare vid småskolor och mindre folkskolor. Av de lärare som gått på folkskoleseminarier är ungefär en tredjedel lärarinnor.

Antalet småskolor var år 1907 något över 6.000, antalet (egentliga) folkskolor något över 8.000, varav ca 2.000 s.k. mindre folkskolor. Antalet fortsättningsskolor uppgick till knappt 2.000. Hela antalet elever i folkskolor överskred 770.000. Antalet lärare som avlagt examen vid folkskoleseminarium var 8.350, av vilka ca 5.500 var män. Övriga, med lägre kompetens (företrädesvis lärarinnor) var ca 10.000. Varje lärare undervisade i genomsnitt 42 barn.

I den fortsatta redogörelsen skall de högre folkskolorna tills vidare inte behandlas utan tas upp senare i ett särskilt avsnitt. Beträffande folkskolorna skall rapporten, såvida inte annat anges, begränsas till de bäst utvecklade skolorna och i samband med deras utbredning även ta upp de viktigaste skolformerna.

Med hänsyn till alla de i förbigående nämnda folkbildningsenheterna bör det observeras att de för närvarande är föremål för ett reformarbete. En av regeringen tillsatt kommission, "Folkbildningskommissionen" har fått i uppdrag att inte endast utarbeta en ny normalplan för undervisningen utan även att inkomma med yttranden och förslag rörande allmänbildande undervisning. Den förordning som f.n. gäller för denna skrevs 1897 och den nu gällande normalplanen för folkskolans olika avdelningar härrör från år 1900.

2. Matematikundervisningens mål och innehåll

A. Mål

Målet för folkskolans matematikundervisning är inte speciellt uttalat i skolförordningarna, men man kan helt enkelt anse att målsättningen är att bibringa eleverna de för det praktiska livet nödvändiga kunskaperna och färdigheterna i räkning samt i fråga om geometrin att förmedla en beprövad och praktiskt användbar kunskap om de viktigaste objekten och sammanhangen i två och tre dimensioner.

Även om det rent formella intresset – syftet må vara utveckling av åskådningsförmågan eller övning i abstrakt tänkande – endast kommer i andra hand, kan man säga att lärare och lärarinnor i allmänhet har en stark känsla för matematikens krav på klar förståelse och för det oriktiga i att inhamra mekaniska *tankemönster* utan att ange skälen för dem. För närvarande förefaller det som om allmänt återkommande klagomål snarare gäller för mycket resonering på bekostnad av mekanisk säkerhet än brister i lärarnas försök att förklara.

Emellertid är det helt naturligt fortfarande nödvändigt att rikta en maning till lärarna angående det första kravet som skall ställas rörande matematikundervisning, nämligen att den ska ge tankeövning och verklig insikt – ett krav utan vilket det praktiska syftet med undervisningen inte nås. Det saknas ej heller en sådan maning i normalplanen för undervisningen. Men redan den lilla formella ändring som inleddes år 1878 och noterades i den nuvarande planen av år 1900, tyder på en utveckling till det bättre. "Undervisningen har", säger

normalplanen av 1878, ”icke sällan mindre åsyftat att öva barnens förmåga att behandla praktiska uppgifter, vilkas lösning krävde klar uppfattning och eftertanke, än att bibringa dem en för deras utveckling föga båtande mekanisk färdighet att efter given regel och uppställning uträkna vissa tal.” Normalplanen av år 1900 finner formen för denna förebråelse oberättigad: ”Undervisningen skall i första rummet åsyfta att öva barnens förmåga att behandla praktiska uppgifter, vilkas lösning kräver klar uppfattning och eftertanke; och övningarna att bibringa dem nödig räknefärdighet få icke nedsjunka till en blott mekaniskt sysslande med uträkning av vissa tal efter given regel och uppställning.” På det hela taget kan man väl säga att äldre tiders uppfattning av matematikundervisning för barn och därur härledd dogmatisk metod (”så och så skall du säga och skriva, för om man gör så, så blir det rätt”) har försvunnit från våra skolor. I sin *syftning* är den genomförda matematikundervisningen intellektuell och för tänkandet är den bildande. I vilken grad det lyckas att förverkliga denna syftning är en annan fråga, som närmast hör till avsnittet angående undervisningsmetoden, till vilken vi återkommer.

B. Matematikundervisningens innehåll

Normalplanens matematikkurs är något olika i enskilda skolformer. Kvantitativt är skillnaden oviktig, åtminstone bortsett från de till antalet minskande enklaste formerna, men kvalitativt är den inte obetydlig. Först skall här den aritmetiska delen av läroängsen i *räkning* tas upp.

I småskolan har man överallt samma inlärningspensum: huvudräkning i talområdet 1–50 och skriftlig räkning i talområdet 1–100, dock så att endast ensiffrig multiplikator och divisor förekommer i multiplikation respektive division.

I de bättre samt beträffande utbredning viktigare formerna för den egentliga folkskolan, d.v.s. där den årliga undervisningstiden för varje barn lägst är den lagstadgade, omfattar läroplanen i räkning de fyra räknesätten, heltal, decimalbråk och allmänna bråk ”med tillämpning på praktiska uppgifter av lättfattligt innehåll”.

I de skolformer som just nämnts, där man undervisar tre årskurser eller alla fyra gemensamt, har man gjort den begränsningen i lärogången att multiplikator och divisor vid räkning med allmänna bråk skall vara heltal. Den begränsning av läroplanens omfång som görs i de enklare skolformerna innebär främst att räkning med allmänna bråk tas med endast såtillvida att deras beteckningar och betydelse tas upp och deras användning på division av heltal med rest behandlas, varvid dessutom deras förvandling till decimalbråk lärs ut.

I folkskolans högre avdelning tillkommer en mer fullständig behandling av allmänna bråk och fortsatt övning i att lösa praktiska problem, främst på områdena för ränteräkning och proportioner, samt slutligen numeriska ekvationer av första graden med övnings- och tillämpningsuppgifter.

Lärogången i fortsättningsskolans räkning åsyftar för närvarande vidare inövning och komplettering av folkskolekursen med tillämpning på "blandade praktiska uppgifter".

Såväl i folkskolans högre avdelning som i fortsättningsskolan ingår en liten kurs i *bokföring* i matematikundervisningen.

Geometrin som särskilt läroämne vid sidan av räkningen förekommer endast i de ovan nämnda bättre skolformerna. Lärogången är anpassad till folkskolans klass 3 och 4 (skolår 5 och 6) och formuleras i normalplanen (1900): "Uppritning, beskrivning och mätning av linjer, vinklar och parallelogrammer; beskrivning och mätning av sådana solida figurer, som hava nämnda firsidingar till bas och mot grundytorna vinkelräta sidor." Beträffande skolor, som tillhör de enklare skolformerna, innehåller normalplanen en anvisning om att "geometriska räkneuppgifter som äro av större praktisk betydelse" kan behandlas i samband med räkneundervisningen.

Som framgår av detta är den egentliga folkskolans lärogång i geometri empirisk med praktiska mål.

I folkskolans högre avdelning för man studierna vidare och övar geometriska konstruktioner, varvid kursen tar upp "geometriska satser med bevis" med tillägget att dessa satser främst skall vara av det

slaget att de har praktisk betydelse. Dessutom finner man här det anmärkningsvärda kursmomentet ”enklare övningar i fältmätning”.

Fortsättningsskolans geometrikurs är däremot som i den egentliga folkskolan helt och hållet empirisk. Här tillkommer månghörningar och ellipser och därutöver rymdgeometri med kroppar vars baser är månghörningar eller ellipser och vars sidoytor bildar rät vinkel med grundplanet. Kursen omfattar dessutom sådana kroppar vars volym utgör en tredjedel av de förut behandlade kropparna.

I läroplanen är *linearritningen* inte anknuten till geometrin utan till ämnet teckning. Liksom geometrin tillhör den de två senare årskurserna i den egentliga folkskolan, men den förekommer även i skolformer, för vilka ingen speciell geometrisk lärogång är förutsedd.

Ingenstans anses dock linearritningen nödvändig varje år utan den ges omväxlande med ett fortsatt frihandstecknande (konstnärlig teckning). Uppgifterna omfattar teckning av enkla kroppar ”i anslutning till geometriundervisningen” samt enklare föremål. Därvid tillkommer i de bästa skolformerna slöjdade modeller, husgeråd och byggnader med angivande av skala. Teckningen utförs, som det heter, efter förlagor eller verkliga objekt. I den högre avdelningen är linearritningen avsedd endast för gossar. Även i fortsättningsskolorna, i vilkas läroplan teckningen kan göra anspråk på ett ganska stort utrymme, kan linearritning förekomma.

Antalet *veckotimmar* för matematiken i normalplanen för de skolor, där man undervisar hela den lagstadgade tiden, är

I småskolan, klass 1: 6 eller 7 veckotimmar av totalt 23

Dito, klass 2: 6 veckotimmar av 23

I den egentliga folkskolan, klass 1 och 2: 5 veckotimmar av totalt 28

Dito klass 3 och 4: 5 eller 6 veckotimmar av 28

Av de sistnämnda timmarna i klass 3 och 4 anslås endast 1 timme för geometrin.

I den s.k. högre avdelningen har gossar 6 veckotimmar matematik, flickor endast 4, då deras geometri är begränsad. Slutligen, i fortsättningsskolan har matematiken tilldelats ungefär 4 eller 3 femton-

delar av timantalet med lika fördelning på räkning och geometri. Tiden för linearritning, där sådan förekommer, är inte inräknad i ovan nämnda siffror.

Av det sagda framgår att geometriundervisningen har ställts i närmaste sammanhang med räkneundervisningen. Inom geometrin gör man ingen indelning i planets och rummets geometri av sådan art att de skulle få ett år vardera, utan varje år behandlar man några figurer i planet och de kroppar som har dessa som basytor. I vilken utsträckning en samverkan mellan matematik och de övriga ämnena äger rum, är däremot beroende av lärarens bedömning och av den exempel-samling han använder; någon direkt anmodan att åstadkomma ett sådant sammanhang finns inte i den officiella läroplanen. Ett undantag utgör linearritningen; det faktum att denna tilldelats teckningen och inte geometrin spelar uppenbarligen inte någon nämnvärd roll eftersom det i regel är samma lärare som undervisar i båda ämnena.

Med hänsyn till lärogången skall det slutligen framhållas att normalplanens bestämmelser inte är obligatoriska utan har endast syftet att tjäna som vägledning vid utformandet av läroplanen, som enligt skolförordningen skall göras för varje skola av befintlig skolstyrelse. Avvikelser från normalplanen förekommer ofta men de är sällan stora.

3. Undervisningsmetod

A. Räkning

Om man vill skaffa sig en riktig kunskap om den ståndpunkt som intas i metodiskt avseende i de svenska folkskolornas räkneundervisning, måste man åtminstone rörande vissa huvudaspekter gå tillbaka några decennier i tiden och följa det utvecklingsarbete som ägt rum sedan dess. Detta arbete – delvis gemensamt för folkskolan och den högre skolan – har varit fyllt av liv och erbjuder mycket av intresse. Det är uppenbart att den utveckling som skett hos oss är förknippad med den rörelse som utgått från Pestalozzi och helt visst kommer man också att mer eller mindre kunna påvisa ett direkt inflytande från 1800-talets tyska pedagogik (Diesterweg, Hentschel, o.s.v.). Men på det hela taget

och fastän vi i allmänhet har varit och är beroende av de stora kultur-
länderna i pedagogiskt hänseende, speciellt Tyskland, förefaller ban-
den till utlandet i detta fall ha varit relativt svaga. Ingen lärobok, ej
heller någon exempelsamling bland dem som fått en betydande an-
vändning i våra folkskolor eller seminarier, var såvitt jag vet en över-
sättning eller bearbetning av ett utländskt verk och sällan finner man i
debatten mellan företrädare för olika riktningar en referens till utlan-
det. De som framträtt är män som tänker med sitt eget huvud och som
drivs av sitt matematiska eller pedagogiska intresse.

Den svenska matematikundervisningens historia är ännu ej skriven
och ett yttrande om det som hör till detta rapportkapitel skulle kräva
ett större utrymme än det som rapporten kan ge. Det skulle också ta
mer omfattande studier i anspråk än dem som författaren har kunnat
bedriva. Endast alltför ofullständigt kan den historiska aspekten här
beröras.

Vid den tid, då den svenska folkskolan år 1842 fick en lagstadgad
struktur, var det den *Bell-Lancasterska* växelundervisningsmetoden
som i början blev den allenarådande metoden. Först sedan denna
metod ca 20 år senare helt övergavs, främst genom *Torsten Ruden-
schölds* verksamhet, kunde det speciella reformarbetet på matematik-
undervisningens område med större intresse vända sig mot folkskolans
undervisningsuppgifter.

Den goda utvecklingen av detta arbete som mot slutet av 60-talet
och i början av 70-talet präglades av den tidskrift för matematik och
fysik som utgavs av *F.W. Hultman* m.fl. verkade befruktande även på
folkskolan. Likaså utövade den för *undervisningen i matematik och
fysik vid högre lärosäten beställda kommissionen*, som avgav sitt
yttrande 1871, ett viktigt inflytande även på folkskolans läroboks-
litteratur. En senare, särskilt för folkskolornas behov beställd *läro-
bokskommission av år 1887* inverkade väsentligt normerande på under-
visningen i folkskolan, liksom förstås även de olika officiella normal-
planerna åren 1878, 1889 och 1900.

Det är för övrigt i första hand läroboksförfattarna som har givit de
viktigaste impulserna till det progressiva arbetet. Särskilt genom

lärobokslitteraturen har man fått insikter om utvecklingens inriktning och sättet att undervisa. Läroböcker som räkneläran av *Zweigbergk*, utgiven i 31 upplagor under åren 1839–1909, och räkneläran av *Nyström*, vars första upplaga kom år 1853 och vars tjugonde upplaga för närvarande finns i bokhandeln, har haft en omedelbar eller indirekt betydelse för räkneundervisningen och den matematiska folkbildningen i Sverige.

Av övriga bland det för våra förhållanden stora antalet läroböcker bör en bok av *Bergius*, *Siljeström*, *Bäckman* och *Alfred Berg* nämnas, liksom nyare läroböcker av *Larsson–Lundahl*.

Till de föga spridda men genom sin originalitet och sin betydelse för den pedagogiska debatten nämnvärda böckerna hör en lärobok av *Otterström* (1849 och 1880). Det viktigaste namnet i de fyra senaste decenniernas arbete och debatt på detta område är *K.P. Nordlund*. I en lång serie av läroböcker, exempelsamlingar, uppsatser och metodikarbeten har Nordlund med en outtröttlig reformsträvan särskilt behandlat den grundläggande räkneundervisningen. Den stimulans som han har givit värderades olika, men ett är säkert: att den är lika beaktansvärd som originell.

I det följande skall de viktigaste metodiska frågorna beträffande räkneundervisningen tas upp i korthet. Därvid skall också en antydning ges rörande den nyss nämnda stimulansen.

Åskådningsundervisning

Det behöver väl knappt nämnas att man i den grundläggande räkneundervisningen inte börjar med abstrakta tal utan anknyter talbegreppet till olikartade konkreta föremål. Vår äldsta metodiska handbok för seminarieutbildningen (*Oldberg* 1843) ville bana väg för Pestalozzis grundregel rörande nödvändigheten av åskådning. Kulramen³ ("den ryska räknemaskinen") är i varje småskola det ständiga hjälpmedlet i småskolan. Olika talillustrationer, tärningar, meterstock o.s.v. kan också utnyttjas beroende av omständigheterna. På liknande sätt inleds varje nytt område, t.ex. läran om bråkräkning, med åskådningsövningar. De vanliga exempelsamlingarna påminner läraren om detta behov, om

han nu inte skulle tänka på det själv. I de äldre räknelärorna kom uppgifter med obenämnda tal (sifferexempel) före räkning med benämnda tal (textexempel), men nu är ordningsföljden alltid den motsatta.

Den fullständiga inläringen av metersystemet hör enligt normalplanen till skolåren 3 och 4. Om sättet för inläringen sägs att det måste ske "åskådligt och om möjligt genom användning av adekvata mått". Man borde dock kunna säga att man i större utsträckning och väl även tidigare än vad som idag sker skulle stödja räkneundervisningen genom att låta barnen öva sig i mätning och vägning.

Huvudräkning och skriftlig räkning

Numera är det också självklart att huvudräkning med eller utan åskådningsmaterial kommer före den skriftliga räkningen. Det borde ses som tvivelaktigt, om den skriftliga räkningen börjar lite för tidigt till nackdel för talbegreppet och en mer intuitiv bekantskap med talen. I den egentliga folkskolan är i normalplanen huvudräkning inte angiven som ett speciellt moment i lärogången utan som ett metodiskt inslag i hela undervisningen.

I vilken omfattning den utnyttjas på det sättet beror av lärarens förmåga; inte sällan torde det finnas anledning att säga att den används sparsamt.

I allmänhet blir barn av samma årskull sammanhållna, så att varje årsklass bildar en räkneavdelning. När två eller fler årsklasser undervisas samtidigt, kan läraren oftast inte ägna sig åt alla elever. En del av dem måste bedriva "tyst räkning". De tysta övningarna, som förstås innebär skriftlig räkning, har det goda med sig att eleverna på egen hand kan arbeta i lugn och ro. Men å andra sidan saknar barnen därvid den nödvändiga handledningen, vänjer sig vid att arbeta på vinst och förlust utan klar kunskap om varför de skall göra så eller så, såvida inte deras arbete är helt begränsat till rent mekaniska övningar, vilket ofta är nödvändigt. I de bästa skolformerna förekommer tysta övningar inte i större utsträckning än önskvärt, men i vissa andra medför en övervikt av sådana övningar inte bara en alltför stor brist på omedelbar undervisning utan också ett eftersättande av den muntliga räk-

ningen bakom den skriftliga till nackdel för elevernas matematiska skolning.

Tillämpningsövningar

Striden mot den gamla analogimetoden vid lösning av s.k. reguladetriuppgifter utkämpades egentligen redan på 50- och 60-talen, även om nämnda metod stannade kvar ända in på 80-talet. Den samman-satta reguladetri som t.o.m. vid användning av enhetsmetoden (sluträkningsmetoden) innefattar en hel del onatur kan lyckligtvis betraktas som definitivt avskaffad. I stort sett finner man inte längre de gamla kapitelrubrikerna reguladetri, ränteräkning, samhällsräkning, alligationsräkning o.s.v., som alltför ofta uppfattades om beteckningar för olika sätt att räkna. Redan lärobokskommissionen av år 1871 önskade att de uppgifter som gavs under dessa rubriker blott skulle betecknas och behandlas som "blandade exempel" och lärobokskommissionen av år 1887 ville ha dem infogade som exempel inom ramen för de fyra räknesätten med heltal och bråk, vilket i regel sker idag.

I samklang med detta står även det faktum att räknelärorna från äldre tider, där regler gavs åtföljda av mer eller mindre väl utförda anvisningar och av övningsexempel, vid vars lösning reglerna skulle användas, alltmer tagits ur bruk i skolorna och ersatts av exempel-samlingar i vilka uppgifterna är så ordnade att de steg för steg utveck-lar elevernas matematikkunskap och därvid även gör dem förtrogna med räkneuppgifter i det praktiska livet. När man ger regler i dessa exempelsamlingar, så är de infogade som sammanfattningar av det som måste inses genom en rad exempel. Ordningsföljden i tankarna är inte mer matematisk kunskap, tillämpad på praktiska uppgifter, utan matematisk kunskap i anslutning till och genom lösning av praktiska uppgifter. Sålunda har *den heuristiska metoden* alltmer kommit till ett genombrott.

Decimalbråk

Först år 1863 fick Sverige ett på decimalsystemet baserat lagstadgat måttssystem. Det varade till år 1889, då metersystemet slutgiltigt

infördes. Det gamla, främst på duodecimal- och vigesimalindelning⁴ grundade systemet, som folk på landsbygden inte utan grund omhulade, hade ett omfattande sortförvandlingskapitel i räknelärorna och krävde räkning med allmänna bråk, däremot ej användning av decimalbråk.

Först med det decimala måttssystemet har väl decimalbråken mer allmänt tagits upp i folkskolekurserna. De fanns redan tidigare i mer fullständiga räkneläror och man hade debatterat frågan om deras riktiga plats i läroängsen. Då det ligger närmast till hands att betrakta dem som ett specialfall av de allmänna bråken, hade de behandlats efter dessa, men då å andra sidan deras behandling vid räkning helt och hållet överensstämmer med heltalsräkning, hade man börjat ge dem en plats i direkt anslutning till heltalen. Redan mot slutet av 1850-talet är detta ganska vanligt och man finner försök redan då att undanröja aspekten på bråk som "decimaler" till förmån för begreppet decimalbråk. Lärobokskommissionen av år 1871 fastställde såväl plats som benämning och normalplanen av år 1878 låter utan vidare decimalbråken komma före de allmänna bråken.

Detta förfarande, att göra läran om decimalbråk till "läran om utvidgning av positionssystemet nedåt" är dock utan tvivel en mycket abstrakt behandling av dessa tal och man kan inte förebygga det bråkbegrepp, som eleven f.ö. redan tagit med sig vid division med heltal. Den speciellt för folkskoleundervisningen arbetande lärobokskommissionen av år 1887 förordade också att en allmän behandling av bråkbegreppet måste gå före läran om decimalbråken i undervisningen. Denna uppfattning kom även till uttryck i normalplanen av år 1889 och sedan dess praktiserades den i folkskolans undervisning: i läroplanen går "betydelsen och beteckningen i fråga om allmänna bråk" före decimalbråken.

Så långt förefaller man vara i stort sett enig. Men man kan ifrågasätta, om inte en grundligare behandling av de allmänna bråken än den i normalplanen angivna skulle erbjuda en klarare och säkrare inblick i decimalbråkens natur och regelsystem. Det går inte att finna något praktiskt behov som skulle tvinga fram ett tidigare införande av deci-

malbråken i undervisningen, eftersom decimalsystemets olika enheter för mynt och vikter antingen kan behandlas var för sig eller reduceras så att man undviker bråkräkningen, så som det vanligtvis sker vid räkneuppgifter i det dagliga livet.

Multiplikation och division med bråktal

Vad som erbjuder det största intresset ifråga om bråkräkning i metodiskt avseende är den gamla stötestenen som innebär svårighet eller omöjlighet att överföra de från räkning med heltal medförda multiplikations- och divisionsbegreppen, nämligen i de fall då multiplikatorn och divisorn utgör bråktal.

Förfarandet att i småskolan presentera allmänna definitioner, t.ex. ”produkten bildas ur multiplikanden på samma sätt som multiplikatorn från enheten” (Lärobokskommissionen av år 1871) är självfallet till ingen nytta. Även om en sådan definition kan uppfattas av enstaka elever, i likhet med divisionen, att den är det räknesätt varigenom man vid given produkt och kännedom om en faktor kan finna den andra faktorn, så visar den sig föga nyttig när det gäller att lösa en *benämnd* uppgift. Man måste instämma i läroboksförfattarens mening (Nyström 1873) enligt vilken man får finna sig i att ”formellt medge vad som reellt föreligger, nämligen att såväl multiplikation som division med bråk är en dubbel räkneoperation, som inte gärna låter sig definiera som en enkel”. Det metodiska tillvägagångssättet består väl också i regel i att utgå från enkla *benämnda uppgifter* och därvid först uppdelar räkningen i två delar, så som den delar upp sig vid ett naturligt resonemang, därefter framställa multiplikationen eller divisionen med bråktal själv som ett *överenskommet* (och med lätt uppvisade analogier motiverat) sätt att teckna det sökta svaret och slutligen ur det i förväg insedda resultatet finna reglerna för utförandet av den tecknade räkningen.

Den omnämnda stötestenen är i varje fall ännu förhanden. Barnet blev kanske utan att märka det fört förbi hindret, men förr eller senare står det åter i vägen: de begrepp som först förknippats med multiplikation och division, kan inte upprätthållas vid multiplikation och

division med bråk; barnet måste använda tecknet för mångfaldigande, fastän det egentligen rör sig om en delning, och det måste använda delningstecknet, fastän sakförhållandet anger att det sökta värdet är större än det bekanta. Då barnet inte har någon möjlighet att samlat bibehålla definitioner och föreställningar som omfattar båda operationerna, blir den oundvikliga följderna förvirring och osäkerhet. Här står man uppenbarligen inför svårigheter av betänklig art, som väl inte kan undanröjas utan en vittgående metodisk omläggning av den elementära aritmetiken, varvid de kategorier som vetenskapen reducerat till ett minimantal helt eller delvis måste överges.

Det har inte saknats försök i den riktningen. Nordlunds försök, om vilket mer följer nedan, går ut på att övervinna nämnda svårigheter och många andra genom ett radikalt bortopande av principen för de fyra räknesätten. Andra har försökt att nå målet genom åtgärder som ingriper i mindre grad. Ur de senaste årens debatt må en utläggning av *G. Hellsten* antydast.

De två skilda tankegångar som man möter i *benämnda* exempel på division med heltal och som ofta betecknas med det föga lämpliga uttrycken "delningsdivision" och "innehållsdivision" måste enligt Hellsten hållas isär. Samtidigt måste man avskilja de fall från den egentliga innehållsdivisionen då divisorn är större än dividenden; i dessa fall är föreställningen om innehåll onaturlig. Med andra ord bör man skilja mellan "innehållsberäkning" ($a:b$; $a > b$) och "förhållandeberäkning" ($a:b$; $a < b$). Om divisorn är ett bråk, kan man i båda dessa fall överföra räkningen i räkning med heltal genom att göra liknämngt. "Delningsdivision" med heltal kallas "delberäkning" och tecknas enligt formeln $\frac{1}{n} \cdot a$, varvid man måste lägga märke till att räknetecknet inte är $\times$. Detta tecken förbehålles multiplikation i egentlig mening och delberäkning ansluter sig som ersättning för "multiplikation med bråk" till "bråkdelsberäkningen" $\frac{m}{n} \cdot a$. Det för barnet helt obegripliga räknesättet "delningsdivision med bråk" försvinner i det att uppgifter av form $a:\frac{1}{n}$ förs över till multiplikation med heltal ($n \times a$) och uppgifter av form $a:\frac{m}{n}$ löses genom uppdelning

enligt det vanliga resonemanget, varvid de överförs till räkning med heltal eller (sammanfört till en räkning) till bråkdelsberäkning ($\frac{n}{m} \cdot a$). Sammanräkning, fråndragning, mångfaldigande, bråkdelsberäkning (delberäkning), innehållsberäkning och förhållandeberäkning blir sålunda de nödvändiga kategorierna och man erhåller uttrycks- och räkneshätt som stämmer med de tankegångar som är naturliga för barnet vid lösning av folkskolans räkneuppgifter.

Tyvärr har man i våra folkskolor ringa tid till att mer ingående tala om bråkräkningens betydelse. Man sysselsätter sig övervägande med decimalbråken, vid vilka den yttre likheten med heltalsräkning lättare döljer deras olikartade betydelse, uppenbarligen en fördel av mycket tvivelaktigt värde. En mer fullständig lärogång kring allmänna bråk ingår, som redan nämnts, enligt normalplanen endast i de bästa skolorna. I övrigt försöker man så långt som möjligt att ta hjälp av heltalen, om vilket man endast kan säga gott.

Nordlunds metod

En strävan efter ett heuristiskt tillvägagångssätt är omisskännlig för all utveckling alltsedan åtminstone 60-talet. I praktiken förkunnades den heuristiska grundsatsen redan under första delen av 1800-talet av den utmärkte matematikläraren *Kjelldahl* och dess innehåll formulerades klart av *Hultman*. I såväl folkskolan som den högre skolan har antalet lärare blivit allt större som i mer eller mindre genomförd form har använt grundsatsen, d.v.s. försökt leda sina elever till att inte endast klart inse de matematiska lagarna utan finna dem på egen hand. Mest känd bland dessa lärare och den mest betydande, när det gäller frågan om den grundläggande undervisningen, är den nyss nämnde läraren och läroboksförfattaren *Nordlund*.

Med sina anspråk på en helt genomförd heuristisk lärogång förbinder Nordlund en idealistisk uppfattning om skolmatematikens betydelse. Dess uppgift skall inte i första hand vara att tjäna den praktiska nyttan utan verka intellektuellt fostrande. Inte kännedom om allehanda sätt att räkna och tankebesparande metoder skall vara dess huvudmål utan den omedelbara bekantskapen med talen. Räkneupp-

gifter skall behandlas syntetiskt, skall lösas så att eleven vid varje steg bibehåller en klar åskådning av de förekommande storheterna och varje uppgift skall lösas med en tankegång som motsvarar den individuella naturen.

I sin kritik av den vanliga skolmatematiken vänder sig Nordlund som sagt mot själva principen rörande de fyra räknesätten. Denna förkastas av främst två skäl: 1) den låter sig inte överföras på bråkräkningen med oförändrade begrepp; 2) den för med sig en förkastlig terminologi som barn har svårt att begripa. Som grund för talläran och dess tillämpning lägger Nordlund inte en operationsprincip utan en åskådningsprincip, "jämförelseprincipen": en storhet jämförs med en annan och därigenom erhåller man samband av skilda slag mellan dem. Inom läran för heltalen låter han jämförelsen (räkningen) röra sig kring de enkla kategorierna, "helheten", "varje del" och "antalet delar", men mest generellt och samtidigt starkast framträder de två begreppen "skillnad" och "förhållande".

Begreppet *förhållande*, som förvisso är ett grundbegrepp i matematiken, vill Nordlund göra till det centrala begreppet även i småskolans matematikundervisning och därvid använda det inte endast som ett uttryck för resultatet av en jämförelse utan som det metodiska huvudmedlet vid lösning av uppgifter. Beträffande den praktiska nyttan av Nordlunds metod finns en viktig, men på samma gång besvärlig punkt. Bråkräkningen behandlas huvudsakligen under aspekten av jämförelse mellan två storheter, "den framförliggande" och "den efterföljande" och det förhållande som de har till varandra. Vid tillämpning på praktiska räknepågifter går förfarandet i allmänhet ut på att uttrycka förhållandet mellan storheterna med enklast möjliga tal ("proportions-tal").⁵

Långsamt framskridande åskådnings- och huvudräkningsövningar enligt en omsorgsfullt utarbetad lärogång utgör den tidigaste undervisningen, vars huvudmål inte är att introducera barnen så snabbt som möjligt i det dekadiska talsystemet, ej heller att lära dem det mekaniska förfarandet vid addition, subtraktion o.s.v. utan att göra dem omedelbart förtrogna med talen och deras ömsesidiga sammanhang

enligt föreställningen om helheten och dess delar. Den skriftliga räkningen spelar en underordnad roll.

Det schematiska förfarandet vid den s.k. reguladetriräkningen, i dess gamla eller nyare form, går naturligtvis mot de krav som Nordlund ställer på elevens matematiska tänkande och vad beträffar ekvationen, så blir den helt förvisad till de högre skolstadierna. Metoden för ekvationer är i mångt och mycket motsatsen till Nordlunds metod; den tillåter en analytisk behandling av uppgiften, ett tänkande steg för steg, och ekvationens lösning är ett rent mekaniskt förfarande, vid vilket sammanhanget mellan räkneoperationerna och uppgiftens sak-innehåll går förlorat. Nordlunds "metod" är i första hand ett avvisande av denna metod; först när ett intuitivt övervägande inte räcker till, är ett speciellt metodiskt förfarande berättigat.

Räkning med decimalbråk enligt grunderna för räkning med heltal kommer först på ett sent stadium och har i stort sett föga utrymme. Beträffande de decimala mått- och myntsorterna finner Nordlund det naturligare att räkna med de små enheterna än med bråkdelar av de större. I allmänhet undviker han så länge som möjligt varje räkning med bråk, t.ex. därigenom att han vid sådan räkning, då en delning och ett mångfaldigande måste ske, genomför tankegången så att delningen kommer sist.

Till Nordlunds arbete hör slutligen ett försök att reformera den matematiska terminologin och de brukliga uttrycken vid måttbestämning av storheter, ett försök som här inte skall tas upp.

Först i framtiden kommer det att kunna avgöras vad som är av beständigt värde i Nordlunds förnyelser och vad man måste betrakta som ensidighet eller överdrift. Hans läroböcker och den fullständigt genomförda användningen av hans metod torde idag förekomma endast i ett ringa antal skolor, i varje fall endast i ett ringa antal folkskolor. Detta skall dock inte utsäga så mycket som att han inte skulle ha utfört ett verk av bestående betydelse och utövat ett i hög grad välgörande inflytande på matematikundervisningen i Sverige.

Algebraisk metod

Redan tidigt har försök gjorts (bl.a. Otterström 1849, 1880) att basera den elementära räkneundervisningen på det algebraiska betraktelsesättet och på användning av ekvationen som allmän metod för lösning av tillämpningsuppgifter. Även i detta fall var skälet för reformen en önskan att undgå de svårigheter som uppkommer genom begreppen multiplikation och division vid övergång från hela till brutna tal och att ersätta de skilda förfaringssätten vid lösning av olika slags tillämpningsuppgifter med ett sätt som passar överallt.

Försöket att slå in på denna väg måste betraktas som lockande nog. Men erfarenheten torde fullständigt ha visat att det algebraiska betraktelsesättet inte är tillgängligt för barnen under de första skolåren och att missbruket av ekvationer eller med andra ord deras förtidiga och onödiga användning utgör en fara för förmågan till en naturlig tankegång vid lösning av enkla praktiska problem.

Folkskolans normalplan har heller inte tagit upp ekvationen i den egentliga folkskolans lärogång. Först i folkskolans högre avdelning visar den sig, som förut nämnts, i läroplanen. Med hänsyn till det förhållandet att denna avdelning av folkskolan vanligen är begränsad till en enda årskurs (skolår 7) är det tvivelaktigt om den överhuvud är på sin plats där.

Terminologi

Man kan inte annat än se den hitförda latinska terminologin som ett hinder för framgång med matematik som skolämne. Den ger barnet intryck av att den annars naturliga sysselsättningen med tal är något besynnerligt och främmande. När därtill kommer att en och samma fackterm ibland måste tydas olika vid olika tillfällen, så växer svårigheten att förknippa utländska ord med klara innebörder. Önskan att så länge som möjligt uppskjuta införandet av facktermer, att begränsa deras antal så mycket som möjligt och att ersätta de främmande orden med svenska i möjligaste mån, att därvid finna korrekta uttryck för de matematiska utsagorna utan att hamna i ett skolspråk skilt från vanligt språkbruk, har lett till bemödanden som engagerat många lärare och

läroboksförfattare. På detta område återstår ännu mycket arbete att utföra.

B. Geometri

Folkskolans geometriska lärostoff, så som det anges i nu gällande läroplan, betecknades tidigare i denna text som en i huvudsak *empirisk lärogång med praktiskt mål*: ”Ritning, beskrivning och mätning”.

Det har inte saknats strävanden eller åtminstone önskemål att redan i folkskolan ta upp *bevisande geometri*, men i stort sett tycks man redan i början ha varit enig om att lärogången skulle ha den karaktär som nämnts. Detta kan man sätta i förbindelse med det faktum att geometriundervisningen vid våra högre läroanstalter i regel började med en propedeutisk kurs: *geometrisk åskådningslära*, fastän geometrin vid tidpunkten för folkskolans organisation alltså, liksom ännu mycket senare, helt och hållet behärskades av Euklides. Redan tidigt tycks man ha kommit till ett erkännande av att den geometriska åskådningsläran hade sin betydelse i folkskolan inte bara som en introduktion till ett högre studium utan ägde ett självständigt berättigande. Och i samma mån som den metodiska behandlingen förbättrades, fann man att den inte behövde vara något osammanhängande och halvbegripligt utan tillät en sammanhållen helhet av betydande såväl formellt som reellt bildningsvärde.

Den förut nämnda *Lärobokskommissionen av år 1887* har utövat ett nyttigt inflytande på det metodiska upplägget av lärogången i tre avseenden. Den har framhävt vanskligheten i det som ofta skedde i äldre läroböcker: att även inleda folkskolans lärogång med en fristående s.k. åskådningslära, fastän hela läroämnet genomgående borde ha karaktären av åskådningslära. Den har vidare uttalat sig emot lärogångens uppdelning i en planimetrisk del och en rymdgeometrisk och den har vidhållit att de geometriska kropparna skall behandlas omedelbart efter de ytor med vilka de hänger samman, en regel som sedan dess upptagits av normalplanerna. Man kan ju även ge denna regel en omvänd ordalydelse, men dess huvudsakliga betydelse, att planimetri och rymdgeometri skall hållas samman, måste man bedöma som en

god grundsats. Slutligen har nämnda kommission kraftigt betonat att det geometriska studiet måste följas av räkneövningar och den har yrkat på en sådan lärogång att mätning och beräkning av ytor och kroppar införs redan tidigt i undervisningen.

Uttrycket "geometrisk åskådningslära" uppfattar man åtminstone idag inte som beteckning för ett endast passivt betraktande av de geometriska objekten, utan som ett tämligen mångsidigt arbete med kunskapsinnehållet. Att lärare och lärarinnor i detta avseende funnit det rätta greppet i fackämnet kan man väl inte påstå. Visserligen använder man "åskådningsmedel" enligt normalplanens föreskrift, man ritar, beskriver och mäter, men ingalunda med den bredd och självständighet hos eleven som vore önskvärda. Förhållandevis sällan finner man samtidigt med linjal och stålåmåttband även saxen, transportören och vågen i geometriundervisningen, ännu mindre ofta mätkedja och korstavla. Med andra ord, man har ännu inte kommit till det "matematiskt laboratoriearbete" som borde prägla undervisningen. Att en sådan lärometod är riktig är dock inte främmande för lärarna och många gånger är det mer brist på företagsamhetslust och på förtroende för den egna förmågan i förening med brist på erforderliga hjälpmedel än en böjelse för det teoretiska och abstrakta som står i vägen.

En bundsförvant har geometrin i *linearritningen*, där denna förekommer. Normalplanens angivelser för anslutning av det senare ämnet till det förra går i rätt riktning och man frågar sig om inte linearritningen i folkskolan helt och hållet skall fogas som en beståndsdel till geometriundervisningen.

Ett annat, i de svenska folkskolorna tämligen allmänt förekommande fackämne med särskild betydelse för geometrin, är *hantverk* (slöjd), speciellt träslöjd. Redan det sätt på vilket den handarbetande undersöker, om en kant är rak, en yta plan eller en vinkel rät, ger ur geometrisk synvinkel nyttiga lärdomar och när en gosse har lärt sig göra en arbetsritning med given skala, så har han därigenom åskådliggjort bl.a. att den geometriundervisning han fått i skolan inte varit gagnlös.

Geometriskt arbete i *det fria* omnämns i normalplanen först då det gäller den högre avdelningen av folkskolan. Men det är uppenbart att exempelvis mätning av skolgården, markering av en rät linje ute på fältet, utstakning av en ar [=100 m²] eller en med enklaste medel utförd nivellering av en höjd är göromål som man inte bör uppskjuta ända till det sista skolstadiet. Ju förr de kan förekomma, desto bättre. Sådana göromål ger eleven inte endast en välgörande känsla för geometrikunskapernas praktiska användbarhet utan bidrar också till att klargöra elevernas teoretiska förståelse.

Angående undervisningens teoretiska sida, så visar det sig redan i åskådningsundervisningen att man försöker åstadkomma den kemiska förening av åskådning och logiskt tänkande som träffande betecknats som den geometriska kunskapens väsen. Hur långt man skall gå i teoretiskt hänseende måste bero av barnens behov och förmåga; hur intresserat barnen deltar blir därvid den säkraste indikatorn. Det är klart att undervisningen redan på detta stadium blir resonerande. Ett oavbrutet logiskt sammanhang är inte möjligt, men innehållet kan ordnas så att varje ny erfarenhet eller insikt förvärfvas på basis av det som inhämtats tidigare. Det kravet kan ställas att ingenting förmedlas och att ingenting står utan sammanhang med det övriga, som man inte kan ge skäl för, med erfarenhetsskäl eller genom eftertanke eller genom bådadera, varvid den principen knappast kan hävdas på detta stadium att inget bevis vore bättre än ett ofullständigt. Att förena de logiska kraven med psykologiska hänsyn och praktiskt intresse eller "att ge Pestalozzi vad som tillhör Pestalozzi men även Euklides vad som tillhör Euklides" (Siljeström 1867) var och är fortfarande undervisningens huvudproblem, som endast kan lösas tillnärmelsevis.

Förvärvade framsteg, såväl beträffande det man skall förstå med "åskådning" som rörande en förening av åskådningsmomentet med det logiska momentet kommer i dagen vid en jämförelse mellan de äldre, för sin tid förtjänstfulla läroböckerna i geometri som begagnades i våra folkskolor (läroböcker av *Bergius*, *Siljeström*, *Bäckman*, *Segerstedt* m.fl.) och läroböckerna från de senaste åren. En rask överblick av innehållet i någon av de senare läroböckerna är väl bäst lämpad för

att visa både omfånget och det sätt att undervisa som man har som mål idag. För detta ändamål kan man ha skäl för att välja en av *Fridtjuf Berg* och *Hjalmar Berg* utgiven "Lärobok i geometri för folkskolan".

Boken är indelad i fyra kurser. Den första, som behandlar "kroppar med plana ytor och räta vinklar" börjar med att klargöra begreppen kropp, yta, linje och punkt, varvid man naturligtvis utgår från konkreta föremål. Sedan kommer linjen till behandling, dess egenskaper undersöks och vägledning ges att lägga ut räta linjer på marken genom ett sträckt snöre och utstakning. Därefter följer vinkelbegreppet, som introduceras i anslutning till visarens rörelse på en urtavla. Man betonar särskilt den räta vinkeln och man övar sig att konstruera räta vinklar på papperet med vinkellinjal och på marken med korstavlan. Redan här går man in på gradindelningen av en cirkels omkrets och därmed kommer gradskivan (transportören) till användning. Man lär sig slå cirklar med given radie på papperet och på marken och att konstruera en vinkel av samma storlek som en given och därvid pröva konstruktionens riktighet med gradskivan. Den räta vinkeln förstärker föreställningen om parallella linjer: linjer som är vinkelräta mot en och samma linje, och i anslutning därtill övar man de vanliga sätten att med vinkelhake och linjal dra parallella linjer.

Därefter kommer man till begreppet plan, som man studerar med en rätvinklig pelare och man fastslår planets väsentliga egenskaper med hjälp av linjal. Vidare betraktas ytors form, rektangeln och fyrhörningen, vars egenskaper man söker upp och som man lär sig rita och mäta. Sedan beräkningen av rektangelns yta är genomförd, kan räkneövningarna, som ges nästan i början av läroängsen, bli flera och mer innehållsrika. Den rätvinkliga pelaren blir sedan föremål för närmare studier: man gör en sådan av papp, man mäter och beräknar kanterna och sidoytorna i den framställda kroppen och man lär sig slutligen även beräkna dess volym.

Den andra kursen, "Kroppar med plana ytor och sneda vinklar", utgår från den tresidiga pelare som uppvisar en triangelyta. Nu kommer alltså studiet av triangeln, vars egenskaper man uppsöker genom att rita, klippa ut med sax, vika samman o.s.v. Så tillägnar man sig

lärosatserna om vinkelsumman, vinklarna i den likbenta triangeln och kongruens hos trianglar, vars motsvarande sidor är lika långa. I anslutning till detta följer beräkning av ytan hos parallelogrammer och trianglar. Efterföljande avsnitt behandlar de regelbundna månghörningarna samt räta prismor och pyramider. Volymen hos pyramider erfar man naturligtvis genom experiment.

Den tredje kursen, ”runda kroppar”, behandlar i första hand cirkel- linjen. Genom mätningar erhåller man förhållandet mellan omkretsen och diametern, därefter cirkelytan genom resonerande jämförelse med det som man förut lärt sig om ytan hos inskrivna månghörningar.

Fältet för konstruktions- och räkneuppgifter är nu ansenligt vidgat. Man får också lära sig ett och annat om ellipsen. Slutligen kommer man till cylindern, konen och klotet. Så mycket som möjligt lär sig eleven att med hjälp av försök och resonemang mäta och beräkna dessa kroppars volymer. I stort sett försöker boken undvika isolerade och rent mekaniska föreskrifter.

De nyss nämnda tre kurserna, åtföljda av en samling blandade räkneuppgifter, innehåller enligt normalplanen läroängsen för den egentliga folkskolan och fortsättningsskolan. Den övriga delen av boken, den fjärde kursen, är en teoretisk läroäng för skolans högre avdelning innehållande lärosatser med bevis. Den omfattar det väsentliga av innehållet i Euklides tre första böcker jämte några satser om likformiga ytor. Till de senare satserna ansluts några praktiska tillämpningar, bl.a. den elementära grunden för lantmäteri (kartering). Läroboken avslutas med en kort redogörelse över *grafisk framställning*, illustrerad med några enkla exempel. I detta sammanhang kan nämnas att en för folkskolan avsedd läroäng i grafisk framställning nyligen utgivits av samma författare.

Utöver vad som just sagts om geometriundervisningen kan på nytt påminnas om att den ovan berörda svaga ställningen för detta ämne eller dess fullständiga frånvaro blir bekräftad i de mindre goda skolformerna.

4. Reformverksamhet

A. Organisationen

Det finns utsikter att folkskolan i en inte alltför avlägsen framtid kommer att bilda bottenskola till den högre undervisningen, även om denna fråga inte kan anses vara aktuell just nu. Bland de organisatoriska frågor som för närvarande står på dagordningen torde väl den viktigaste vara fortsättningsskolan, dess förändring från en fortsättningsanstalt i den allmänbildande folkskolan till en "Yrkesfortsättningsskola". Därigenom avser man inte att denna skulle bli en yrkesutbildning i egentlig mening men väl att den i den mån som omständigheterna tillåter skulle differentiera sig efter olika yrken eller yrkesgrupper och söka den koncentrerande medelpunkten i elevernas yrkesarbete. Frågan gäller alltså samma utbildning som redan väsentligen genomförts i åtskilliga av de större kulturländerna.

För matematikundervisningen i fortsättningsskolan kommer en sådan förändring uppenbarligen att ha till följd att denna undervisning med användning och utvidgning av det som redan lärts i folkskolan främst riktar sin uppmärksamhet på de ekonomiska och tekniska förhållandena i det aktuella yrket eller yrkesområdet. Därvid kommer behovet av en säkrare grundval än den som nu förefinns i folkskolan att framträda, såvida inte matematikundervisningens intressen i sistnämnda skola samtidigt iakttas bättre. Förhoppningsvis kommer matematiken vid våra folkskolor att nå en något starkare ställning än idag, dels genom en allmännare utvidgning av lärotiden till sju skolår på så vis att schematiden för matematik utökas något och på ett mer ändamålsenligt sätt fördelas mellan tyst arbete och omedelbar undervisning, dels slutligen genom en fortsatt förbättring av lärarutbildningen.

B. Metoder

Beträffande den metodiska utvecklingen har redan ovanstående framställning visat utvecklingslinjerna.

Den elementära räkneundervisningen har under de decennier som förflutit sedan tidpunkten för offentliggörandet av den första folk-

skoleförordningen varit föremål för ett livligt arbete, varvid impulser av diametralt motsatta synpunkter givits.

Å ena sidan har det ideella kravet på utbildningen av elevernas fria oförmedlade matematiska tänkande ställts oberoende av en metod eller minnesregel; å andra sidan finns det praktiska behovet av gruppering och översikt, av fasta hållpunkter för minnet och av ekonomi i tänkandet, ett behov som varit och är känsligt särskilt vid massundervisning i skolorna.

Mellan dessa motstridiga centrala intressen befinner sig alltså frågan rörande metoden för räkneundervisning i vår folkskola och mycket arbete behövs ännu, innan klarhet kan vinnas. För framgång i detta arbete behövs inte bara skolmannens erfarenhet utan även den vetenskapligt bildade matematikerns omdöme. Sannolikt kommer det att visa sig att barnundervisning mer än hittills måste avstå från den vetenskapliga och vedertagna indelningen och terminologin. Förvisso skall varje åtgärd, som underlättar barnets förvärvande av en åskådlig och klar uppfattning, främja inte endast det praktiska syftet, som är folkskoleundervisningens närmaste mål, utan även ge stöd åt ett fortsatt mer vetenskapligt matematiskt studium.

Beträffande geometrin knyts intresset företrädesvis till den praktiska sidan av undervisningen. Det gäller – och varje reformarbete syftar dit – att alltmer förvandla småskolan ”från en skola för inpluggande av givna uppgifter till en fostrande skola”. Därvid visade sig här liksom annorstädes under den senaste tiden nödvändigheten att som mål ha en sådan skolundervisning som främjar övning av elevernas viljeliv och handlingsförmåga och leder dem till självständig aktivitet. Man vill ha mer aktivitet och produktivitet från elevernas sida, man vill att eleven så långt som möjligt tillkämpar sig sin kunskap i och genom arbete mot något praktiskt mål, som intresserar honom. Detta är en utvidgning och utveckling av Frøbels tankar.

Allt eftersom sådana tankar och bemödanden vinner insteg kommer den empirisk-praktiska läroängsen i folkskolans geometri att få gynnsammare förutsättningar. Den kommer då att vid sidan av naturkunskapens ämnen, teckningen, slöjden o.s.v. inordna sig som en

naturlig del av den verksamhet som skolan försöker leda in barnet i för att utveckla dess färdigheter allsidigt. Kanske kommer man då att tidigare än nu försöka utveckla barnets geometriska föreställningar och beträffande utvidgningen uppåt av "åskådningsundervisningen" kommer väl övergången till ett sammanhängande teoretiskt studium snarare att skjutas fram än tillbaka. Om sålunda den allmänna pedagogiska utvecklingen av folkskolans geometri som "åskådningsämne" tycks vara gynnsam, så finns kanske å andra sidan en närliggande fara att den teoretiska sidan, ämnets logiskt fostrande betydelse, kan bli otillräckligt beaktad.

5. De högre folkskolorna⁶

De högre folkskolorna är till antalet förvisso endast en relativt obetydlig grupp av skolor, men deras ställning i skolsystemet liksom deras uppgift och deras i allmänhet goda beskaffenhet ger dem en utomordentlig betydelse. Här kan de dock endast bli föremål för ett kort omnämnande.

Skolornas antal var år 1909 endast 31, antalet elever nästan 1.000, gossar och flickor i nästan lika antal, Lärogången är i de flesta fall tvåårig. Lärarna är dels välmeriterade folkskollärare, dels akademiskt utbildade lärare.

I fråga om läroplan är de högre folkskolorna oberoende av varje normerande föreskrift och de är än mindre bundna av provbestämmelser än folkskolorna. Varje skola kan därför driva undervisningen så långt som organisationen och elevernas begåvning och krafter tillåter. Deras elever utgör ofta ett gott urval bland dem som har genomgått folkskolorna i omgivningen och eftersom antalet elever i en årsklass i regel inte är stort, kan man i görligaste mån beakta de individuella olikheterna.

Matematikundervisningen vid de högre folkskolorna utformas tämligen olika vid skilda skolor, såväl beträffande de utnyttjade läroböckerna som undervisningens metodiska upplägg.

I stort sett kan man säga att undervisningsuppgiften är detsamma som i realskolan och i den kommunala mellanskolan, även om omfatt-

ningen är mindre i de högre folkskolorna; ofta motsvarar den väsentligen lärogången i realskolans klass 4 och 5. De metodiska aspekterna på undervisningen och de läroböcker som används är i allmänhet desamma i de tre nämnda slagen av skolor. Därför kan man beträffande matematiken i de högre folkskolorna hänvisa till den rapport som E. Hallgren och E. Göransson lämnat om matematiken i de svenska realskolorna. Vid sidan av den omnämnda skillnaden rörande lärostoffets omfattning kan man kanske påtala den olikheten att undervisningen i de högre folkskolorna mer avser behov i det praktiska livet än undervisningen i realskolorna.

Antalet högre folkskolor har vuxit snabbt under de senaste åren. Av allt att döma kommer dock de högre folkskolorna i stor utsträckning att övergå i den nyare skolformen "Kommunal mellanskola", d.v.s. de kommer att med en fyraårig lärogång, byggd på en sexårig folkskolekurs, föra fram sina elever till realskolans examensmål. En högre folkskola med 4 årsklasser, som följer mellanskolans undervisningsplan, kan nämligen till följd av nyss tillåtna bestämmelser övergå i en examensberättigad mellanskola, en utvecklingsmöjlighet som många av skolorna redan är i begrepp att utnyttja.

II. Seminarier

1. Organisation

För att bli anställd som lärare eller lärarinna vid en folkskola krävs att ha varit elev vid ett *folkskoleseminarium* och där ha godkänts i proven. För att få tjänst som lärarinna (lärare) vid en småskola eller som biträdande lärare i den egentliga folkskolan räcker dock även en utbildning i mindre omfattning, nämligen den som man erhåller vid ett *småskoleseminarium*.

A. Folkskoleseminarier

De statliga folkskoleseminarierna är för närvarande 15 till antalet, varav 9 utbildar lärare och 6 lärarinnor. Vid sidan av de statliga seminarierna finns det 2 privata lärarinneseminarier med rätt att anordna examensprov.

Alla svenska seminarier är externat. Lärogången i de statliga seminarierna är *4-årig*.

Som *antagningskrav* är bl.a. fastställt att den som söker in, skall vara 16–26 år gammal och ha klarat av antagningsproven tillfredsställande. För antagning till den första (lägsta) klassen är dessa än så länge ganska hovsamma, i stort sett motsvarande inlärningsmålen i en god folkskola. Då emellertid antalet sökande i regel är mycket större än antalet som kan antagas, är dock ett bra urval möjligt.

I de städer som har seminarier finns i regel privata preparandkursinstitut, som förbereder för antagningsproven. Det inträffar allt oftare att de elever som tagit realskolexamen eftersträvar antagning vid seminarierna. Till de kvinnliga seminarierna kommer särskilt ett stort antal väl förberedda studerande (de har klarat av en kurs vid ett småskoleseminarium eller en högre flickskola).

Alla som söker antagning och inte har studentexamen måste genomgå ett antagningsprov. Studenter däremot äger rätt att utan prövning tas in i högsta (fjärde) klassen och kan därefter befrias från enskilda undervisningsämnen. Vid två seminarier är en speciell ettårig lärogång inrättad för studenter, den ena för kvinnliga, den andra för manliga studenter.

Filosofie och teologie kandidater kan efter en genomgången kortare praktisk-pedagogisk lärogång bli berättigade till tjänst som folkskollärare.

Som i de flesta andra länder är seminarierna i Sverige samtidigt *allmänbildande och yrkesutbildande* läroanstalter. För att möjliggöra yrkesutbildningen är en övningsskola knuten till varje seminarium. Den omfattar en småskoleavdelning, en folkskoleavdelning och ofta en högre avdelning av folkskolan eller en fortsättningsskola eller båda.

Lärarkåren vid ett folkskoleseminarium består dels av s.k. facklärare, som vid ett seminarium utan parallellklasser utgör rektor och fyra lärare, dels av lärare i tekniska fackämnen: teckning, välskrivning, musik, gymnastik, slöjd och trädgårdsskötsel, dels av lärare vid seminariets övningsskola. Vid lärarinneseminarierna är i regel två av

de fyra ovannämnda lärarna kvinnor. Samtliga manliga facklärare har genomgått en förberedande utbildning vid ett universitet; rätten till anställning som seminarielärare förvärvas under samma villkor som vid anställning som lärare vid gymnasier och realskolor. Lärarinnorna har antingen samma förberedande utbildning som lärarna eller har genomgått en fullständig kurs vid det högre lärarinneseminariet i Stockholm. Lärarna i tekniska ämnen har i stort sett samma utbildning som motsvarande lärare vid gymnasier och realskolor. Vid övnings-skolorna är de anställda lärarna folkskollärare. Medan de undervisar barnen i övningsskolan är de samtidigt behjälpliga i arbetet med elevernas praktiska utbildning, i det att de ger handledning vid några av deras undervisningsövningar. Den större delen av dessa övningar leds dock av de övriga lärarna, varvid i regel varje lärare är ledare vid undervisningsövningar i hans fackämne(n).

Avgångsexamen kan inte ses som en "examen rigorosum". Visserligen står den under speciell uppsikt av den lokala (kyrkliga) myndigheten och äger rum enligt givna bestämmelser. Men uppgifterna vid såväl det skriftliga provet som vid det muntliga och vid undervisningsproven bestäms av rektor i samråd med övriga lärare. Varje lärare prövar i sitt ämne och avgör ämnesbetyget.

Antalet elever är 24–30 i varje klass. Det totala antalet elever vid seminarierna är något större än 1.600 och antalet avgående efter godkänt prov är ca 450 per år.

B. *Småskoleseminarier*

Antalet småskoleseminarier år 1909 var 34. Två av dem var statliga seminarier, avsedda för utbildning av lärare för den lappländska och finska befolkningen i rikets nordligaste delar. Av de övriga drevs 21 av landsting och 11 var privata.

Eleverna vid småskoleseminarierna är nästan uteslutande kvinnor; manliga elever var förut ganska talrika men idag utgör de knappt 1 %.

Lärotiden är endast ett år vid de flesta småskoleseminarierna; en stor del av dem har dock en lärogång på 1 1/2 eller 2 år. Redan härav framgår att förhållandena vid dessa läroanstalter är mycket skiftande.

Liksom folkskoleseminarierna har de som ändamål att meddela inte endast fackbildning utan även ett visst mått av allmänbildning. Deras övningsskolor omfattar endast folkskolans småskoleavdelning.

Småskoleseminariernas föreståndare är i de flesta fall mycket tjänstfulla folkskollärare eller folkskollärarinnor.

Efter godkänt examensprov gick vårterminen 1908 totalt 917 elever ut ur nämnda seminarier.

I fortsättningen av denna rapport skall småskoleseminarierna behandlas mycket kortfattat i en särskild avdelning och framställningen skall i övrigt uteslutande gälla folkskoleseminarierna, speciellt de statliga.

Beträffande dessa skall observeras att de i likhet med de förut behandlade folkskolorna är föremål för ett reformarbete. Den först omnämnda "Folkbildningskommissionen" har också ombildningen av folkskoleseminarierna på sitt program.⁷

Den folkskoleseminarieförordning, som ännu gäller, är daterad år 1886. Väsentliga förändringar i dess föreskrifter företogs emellertid genom senare beslut, bland vilka det viktigaste är ett kungligt cirkulär av år 1894, som samtidigt innehåller seminariernas nuvarande officiella läroplan.

2. Matematikundervisningens mål och innehåll

Målet för folkskoleseminariernas matematikundervisning innefattas i deras allmänna syfte att "utbilda lärare och lärarinnor för folkskolorna i riket". Då seminarierna är såväl allmänbildande som yrkesutbildande inrättningar, måste undervisningen i varje ämne syfta till att bibringa eleven "dels kunskaper och färdigheter som de behöver för sina framtida yrken, dels den erforderliga förmågan att undervisa". Det framgår klart att det mått av kunskaper som en lärare behöver för sitt yrke är ett mycket oklart begrepp, varför den ur förordningarna anförda formuleringen inte verkar särskilt klargörande, innan den får ett närmare förtydligande i den för seminarierna fastställda läroplanen.

Lärogångarna i den officiella undervisningsplanen visar en tämligen snäv uppfattning av vad en folkskollärare behöver i fråga om

kunskaper i sin yrkesutövning. Detta gäller inte minst beträffande matematiken.

Meddelandena om kommissionens ännu inte slutgiltiga förslag rörande matematikundervisningen tas i det följande upp av förf. (medlem av kommissionen) med tillstånd av kommissionens ordförande, fil. dr Fridtjuv Berg.

Undervisningsplanen om läroängsen i matematik ("räkning och geometri", som ämnet heter) har en sammanfattning, om vilken den speciella undervisningsplanen ger en närmare utläggning och en fördelning av innehållet på de fyra årskurserna. Den har följande ordalydelse:

"a) Övningar för vinnande av säkerhet och färdighet vid användning av de fyra räknesätten i hela tal och bråk med tillämpning på de för det praktiska livet viktigaste uppgifter (sorträkning, enkel och sammansatt regula de tri, intresseräkning [ränteräkning] m.m.); kännedom av grunderna för dessa räknesätt; läran om sifferlikvationer av första graden med en obekant; huvudräkning, förnämligast inom talföljden 1–100; utdragning av kvadrat- och kubikrötter; samt handledning i bokhålleri. b) Geometrisk åskådningslära; de viktigaste plana och solida figurers allmänna egenskaper samt sättet för deras mätning och beräkning."

Som man ser överstiger inte denna matematiskkurs, bortsett från inläring av kvadrat- och kubikrotdragning, det stoff som man finner i normalplanen för folkskolan och dess s.k. högre avdelning. Den algebraiska aspekten saknas helt och hållet och beträffande geometrin är det inte utsagt att den kräver en mer vetenskaplig behandling än den som kan förekomma i folkskolan och dess högre avdelning.

Under dessa förhållanden är det tämligen förståeligt att man försöker föra matematikundervisningen längre än de fastställda föreskrifterna fordrar. Vederbörande myndigheter har haft så mycket mindre att invända något mot detta som denna strävan gör rättvisa åt såväl lärarnas som elevernas önskemål. Vid många seminarier finner man sålunda matematikläroplaner som är helt annorlunda gestaltade än de ovan nämnda. Nästan överallt överskrider man föreskrifterna, på

många orter i betydande omfattning. Algebraisk räkning förekommer allmänt och ekvationslösningen utsträcks ofta till andragradsekvationer. På många ställen inbegriper undervisningen potenser och logaritmer samt aritmetiska och geometriska serier med tillämpning på ränteräkning. Geometrikursen omfattar ofta realskolans undervisningsuppslag och en del av det gymnasiala kursstoffet och dess framställning präglas av en teoretisk form, stödd på bevisföring. På sina ställen lär sig eleverna moment i trigonometri.

Matematikens *schematid* är i allmänhet den som anges i den officiella undervisningsplanen, nämligen 4 veckotimmar i klass 1, 2 och 3 samt 2 veckotimmar i klass 4. Därvid skall man lägga märke till att de i matematikkursen inlagda anvisningarna för bokföring inte inskränker denna tid, eftersom den är tilldelad läraren i välskrivning och inräknas i detta ämnes timmar. *Linearritningen*, som delvis kan anses tillhöra geometrikursen, är som vanligt i svenska skolor anförtrodd teckningsläraren och således helt skild från geometrin.

3. Undervisningsmetod

Den officiella läroplanen innehåller inga metodiska anvisningar och seminarieförordningen ger endast allmänna anvisningar. Man kan för närvarande inte ange någonting karakteristiskt för seminarierna i fråga om undervisningsmetod i matematik, bortsett från hänsyn till å ena sidan elevernas mogna ålder och å andra sidan deras framtida verksamhet, som naturligtvis gör sig gällande. Den gamla olyckliga uppfattningen att seminarieeleverna måste undervisas på samma sätt som barn för att på så vis desto säkrare lära ut de metodiska greppen i barnundervisningen, är sedan länge försvunnen, i varje fall beträffande matematiken.

I stort sett råder en ganska stor likhet mellan matematikundervisningen vid seminarierna och vid övriga läroanstalter. Till detta bidrar särskilt två omständigheter, nämligen lika utbildning av lärare vid seminarier och gymnasier och dessutom seminariernas användning av de läroböcker som är avsedda för de högre skolorna.

Beträffande utbildningen av lärarna skall man speciellt observera att lärarna har genomfört sitt provår, d.v.s. sin praktiska utbildning, vid ett gymnasium; en provårskurs vid ett seminarium anordnades hittills endast för kandidater till kvinnliga skoltjänster.

De utnyttjade läroböckerna ger goda upplysningar om undervisningens metodiska beskaffenhet. Det faktum att seminarierna i stor utsträckning begagnar samma läroböcker som gymnasierna beror väl väsentligen på att antalet seminarister är alltför ringa för att göra en utgivning av läroböcker enbart för dem lönsam. De senaste årens seminarierapporter noterar totalt ca 40 läroböcker, exempelsamlingar och tabeller. Med tanke på den aritmetiska delen av lärogången förefaller *Alfred Bergs* "Räkelära för gymnasier och flickskolor", omarbetad av *K.L. Hagström* (Stockholm 1908) att bli den mest använda. Vid sidan av denna bok används ofta den av *L.T. Larsson* och *N. Lundahl* utgivna samlingen av "Sifferekvationer av första graden med en eller flera obekanta jämte uppgifter" (3:e uppl. Stockholm 1910). Bland de algebraiska läroböckerna märker man i första hand och i full överensstämmelse med de metodiska synpunkterna i de högre läroanstalternas nya matematikläroplan: *J. Möller*, "Lärobok i algebra". I geometriundervisningen använder fem seminarier Euklides *Elementa* (i ny bearbetning av *K. Vinell*, 4:e uppl. Stockholm 1909), några andra en av *K. Asperén* utgiven "Lärobok i geometri" (6:e uppl. Stockholm 1909), som uppvisar nära likheter med Euklides framställning. Vid fem seminarier har läroböcker som skrivits ur nyare synpunkter vunnit inträde ("Lärobok i geometri för realskolan", 3:e uppl. Lund 1909 och "Lärobok i geometri för gymnasier", Lund 1906, båda av *P.G. Laurin*).

Här skall också sägas något om metodikundervisningen och elevernas praktiska utbildning, i synnerhet som den övriga undervisningen påverkas därav i metodiskt hänseende. Vid de svenska seminarierna påbörjas den praktiska utbildningen redan under andra året med hospitering och undervisningsarbete i övningsskolan; under tredje och fjärde året fortsätter man på samma vis och utbildningen läggs upp med tyngdpunkt på sista året. Seminarieundervisningens båda grenar,

den allmänbildande och den fackutbildande, löper sida vid sida under tre år och den förra överväger sista året. Om det finns en brist på koncentration i detta arrangemang, så medför det å andra sidan en fördel i det att arbetet på den pedagogiska utbildningen upprätthåller målet för hela seminariearbetet i elevens medvetande och därigenom ger honom den riktiga aspekten och det riktiga intresset för de allmänbildande studierna. Arrangemanget är även i viss grad betingat av den korta lärotiden.

När nu fackläraren i regel helt eller delvis leder den praktiska utbildningen i sitt fack, så föranleds han själv i sin ämnesundervisning att ta hänsyn till denna utbildning eller med andra ord ta hänsyn till folkskolans undervisning. En sådan hänsyn kan väl i viss mån verka störande, men den verkar även förnyande. Den ger också anledning till nyttiga jämförelser mellan barnets och den vuxnes olika sätt att uppfatta och den manar läraren att inte utgjuta sig i betraktelser, som saknar betydelse för seminarieelevens framtida verksamhet. I fråga om matematiken torde särskilt geometriundervisningen tjäna som exempel i detta avseende.

4. Reformverksamhet

A. Organisationen

Det är tidigare sagt att folkskoleseminarierna befinner sig i en reformfas. Bland de väckta förslagen under den senaste tiden finns även förslaget att utvidga seminarierna till att omfatta fem eller sex årskurser. Det är dock sannolikt att de åtminstone tills vidare förblir fyraåriga. Det förefaller möjligt att uppnå en rätt betydande förbättring av lärarutbildningen genom höjda intagningskrav och ett bättre utnyttjande av lärotiden och man tycks vara böjd att först pröva, i vilken mån en förbättring kan nås inom nuvarande lärotid, innan man försöker med ytterligare åtgärder.

Fastän antalet intagningssökande med högre skolbildning än folkskolans är växande torde man heller inte välkomna åtgärden att låta lärogången i någon s.k. högre skola (t.ex. realskolan) vara en grundval

för seminariekursen. Därigenom skulle man försvåra tillträdet till seminarierna för yngre män och kvinnor ur samhällets bredare skikt, ur vilka folkskolan hittills erhållit sina bästa lärarkrafter. Av samma skäl måste man se till att man vid en höjning av intagningskraven över folkskolans kunskapsmått helt begränsar sig till sådant som kan tillägnas genom självstudier.

B. Lärogång och metoder

De svenska folkskoleseminarierna, som i likhet med folkskolorna daterar sin egentliga tillvaro från år 1842, påverkades starkt av tyska förebilder under sin utveckling. Tyvärr visade sig denna påverkan starkast vid en tid då de tyska folkbildningsanstalterna inte var lyckosamma, nämligen vid tiden för det numera mindre kända Stiehlska regulativet. Läroplanerna i seminarieföreskrifterna 1862 och 1865 har sitt ursprung i detta regulativ, om än inte helt direkt, och den ännu gällande läroplanen skiljer sig föga från den som gavs år 1865. Så kan man förstå den snäva begränsningen i de officiella läroplanerna, som endast innebär en ringa utvidgning och fördjupning av folkskolans läroplaner. Det förut nämnda undervisningsuppdraget i matematik är visserligen ägnat att ge eleven en aktningvärd förtrogenhet inom folkskolematematikens område men förlämnar honom inte ens det mått av matematisk bildning som en gosse eller flicka kan förvärva i realskolan.

Synen på folkskollärarnas bildningsbehov är hos oss liksom i Tyskland nu helt annorlunda än i äldre tider. Erfarenheten har visat att om lärarens kunskaper inte omfattar något större område än det som eleverna skall öva sig i, så bedriver han sin undervisning gärna hantverksmässigt och denna stelnar rentav lätt i de trånga formerna hos en metodisk rutin. Hur de faktiska lärogångarna i matematik för närvarande i regel väsentligt överskrider de officiella läroplanerna har framhållits tidigare. Det är ju uppenbart att detta sker till fördel för seminarieelevernas framtida verksamhet som lärare i matematik. Även i fråga om matematiken är det riktigt att först den vidgade utblicken över kunskapsområdet ger en mer skärpt insikt om det som ligger

närmast i kursen. Och inte endast lärarens yrkesutbildning i en trängre mening gör en utvidgning av seminariernas matematiska lärogång önskvärd. Den är även nödvändig för att eleven skall få ett verkligt intresse för ämnet och för att seminariets matematikundervisning skall nå upp till det formella bildningsvärde som det måste ha. Målet skall därför vara att inte bara ge eleven praktisk säkerhet inom folkskolekursens område, utan även en viss, om än anspråkslös, matematisk bildning och en viss förmåga att tänka matematiskt.

Det råder intet tvivel om att en sådan uppfattning kommer till uttryck i en framtida officiell läroplan. Den omnämnda kommissionens förslag, så som det föreligger fram till nu, går i denna riktning och utgör i stort sett endast ett försök att ge det redan erkända och i större eller mindre omfattning använda programmet för seminariernas matematikundervisning ett mer definierat innehåll och en klarare formulering. Det finns skäl att här ge några antydningar om dess grundidéer.

Räkning med givna tal eller, som man vanligtvis säger i Sverige, aritmetisk räkning, är naturligtvis som förut ett huvudmoment i undervisningen. Men bredvid denna tar man redan i början av lärogången upp räkning med ekvationer och i sammanhang därmed introduceras det algebraiska betecknings- och betraktelsesättet. Talområdet utvidgas till negativa och irrationella tal. Till bråkräkningen och begreppet irrationella tal ansluts en närmare framställning av begreppen mätning och förhållande samt det viktigaste om analogiläran.

Begreppet funktion tas tidigt upp i undervisningen och åskådliggörs grafiskt genom användning av rätvinkliga koordinater. Teorin för potenser och logaritmer genomgås, dock uteslutande med syftet att hjälpa eleven med kortaste studieinsats till insikt och färdigheter i den praktiska användningen av vanliga logaritmer. Ekvationslösningen utvidgas till ekvationer av andra graden. Men deras teoretiska behandling går i stort sett inte längre än vad som är nödvändigt för den praktiska användningen av uppgifter. Slutligen ger man en kort framställning av aritmetiska och geometriska serier, varvid de senare tillämpas på ränteräkning (kapitalvärden, amorteringslån o.s.v.).

Lärogången i geometri har samma praktiska syfte som folkskolans lärogång men inte den senares empiriska karaktär. Den ger med andra ord teoretiskt grundad kunskap om utförandet av geometriska konstruktioner och om beräkning av geometriska storheter. Den är sålunda en genetisk och bevisande lärogång, som omfattar planimetrin och det viktigaste av den elementära rymdgeometrin. Med teorin för likformighet hos plana figurer förknippas de första grunderna av trigonometrin. Planimetriska och rymdgeometriska räkneuppgifter behandlas under hela lärogången, ju förr desto bättre, och till sist med användning av trigonometriska tal och deras logaritmer. Till en lämplig årtid, helst under de två första åren, förlägger man några enkla övningar i fältmätning och nivellerings.

I fråga om räkneuppgifterna, såväl de geometriska som de aritmetisk-algebraiska, träder sakinnehållet, inte det formella övandet, i förgrunden. Vad som särskilt gäller den aritmetisk-algebraiska övningen är att den inbegriper två huvudområden: å ena sidan de just nämnda geometriska räkneuppgifterna jämte uppgifter ur fysik, kemi o.s.v., å andra sidan räkneuppgifter ur det alldagliga praktiska livet, speciellt ekonomi- och handelsräkning (procent, räntor, köprabatt, diskontering, samhällsproblem, blandningar o.s.v.). De fackkunskaper som förvärvas genom handelsräkningen sammanfattar och utvidgar man genom en elementär kurs i handelslära och bokföring, vilken dock helst inte bör tillföras matematiken, där den lätt endast blir ett tråkigt bihang, utan tillsammans med annat lärostoff av ekonomisk natur skall ges åt en lärare som har större erfarenhet på det ekonomiska området än dem som man i regel kan förutsätta hos en matematiklärare.

För att en matematisk lärogång med sitt i relation till den korta tiden rika innehåll inte skall förfela sitt ändamål, måste man bestämt hålla fast vid två metodiska synpunkter. För det första skall man begränsa sig till enkla, lätt överskådliga uppgifter, som är av typiskt slag eller av praktisk betydelse. De enskilda delarna i lärogången kan inte behandlas så fullständigt, som om de vore ett självändamål, utan de skall medtas endast i den mån de visar sig vara nödvändiga för

undervisningens huvudmål. För det andra skall man så mycket som möjligt hålla samman lärogångens enskilda beståndsdelar till en sammanhängande helhet av kunskaper.

I det senare avseendet måste man uppmärksamma att algebran (bokstavsräkningen) inte skall komma in oväntat utan som en behövd önskad naturlig utvidgning av den aritmetiska räkningen, utan att tränga bort denna. En rundlig tid nöjer man sig med att ur den egentliga algebran (allmän aritmetik) endast ta upp det som visar sig nödvändigt för räkning med ekvationer och för geometriska beräkningar. Först sedan eleverna därigenom blivit förtrogna med det algebraiska betecknings- och betraktelsesättet blir räkning med obestämda tal föremål för en fristående, sammanfattande behandling. Till kursens koncentration hör dessutom förbindelsen mellan geometri, aritmetik och algebra; bevisföringen i geometri övergår från en enbart geometrisk till en geometrisk eller algebraisk, allteftersom den ena eller andra metoden är den bästa att leda till målet; planimetriska och stereometriska räkneuppgifter åtföljer från början till slut den systematiska geometriska lärogången. Inom geometrin har man att eftersträva en sammanhållning av planimetri och rymdgeometri, varvid den senare tas in tidigare i undervisningen än hittills i regel skedde och på det hela taget kommer mer till sin rätt än förut. Slutligen skall användningen av funktionsbegreppet och den grafiska framställningen medföra ett gemensamt betraktelsesätt för olikartade uppgifter och åstadkomma ett starkare samband mellan lärogångens enskilda delar.

Bland de metodiska frågorna av mer speciell natur kommer man att behöva beröra frågan om relationen mellan geometriundervisningen och linearritningen. Det vore i sig önskvärt att kunna inordna linearritningen helt eller i väsentlig grad i geometrin. Den svenska matematikläraren har i allmänhet ingen utbildning för undervisning i linearritning. Dessutom förefaller det att åtminstone vid seminarierna inte vara möjligt att ta upp grunderna för projektions- och perspektivlära i lärogången för geometri så tidigt som vore nödvändigt för att kunna värdera linearritningen, som på grund av sin förbindelse med slöjden måste förekomma tidigt. Det man kan göra för ett närmande av linear-

ritningen till geometrin tycks begränsa sig till att man för över en del av de planimetriska konstruktionerna (som brukar komma före projek-
tionsritningen) till geometrin och till att man slutligen i geometri-
undervisningen ägnar någon uppmärksamhet i teoretiskt avseende åt
de förfaringssätt som eleverna skall bli förtrogna med vid projekti-
ons- och perspektivritning.

Om nu seminariernas lärogång i matematik väsentligen förläggs
utanför eller över folkskolekursen på det sätt man tänkt sig, så tycks
det finnas en fara att denna blir försummad, vilket ju vore betänkligt.
Man skall dock vara medveten om att även fackämnets metodik måste
höra till seminariets matematikundervisning. I överensstämmelse med
detta förläggs ett studium av den metodiska behandlingen i matematik
i folkskolan till den tidigare delen av sista seminarieåret. Vid denna
tidpunkt har eleven nästan genomgått seminariets lärogång i mate-
matik, dessutom har han själv börjat meddela undervisning i matema-
tik och därvid känt behovet av såväl teoretisk som metodisk säkerhet.
Utrustad med en skarpare uppfattning, som han måste ha förvärvat,
går han nu tillbaka till det område inom vilket han har att röra sig som
lärare. Det ligger i sakens natur, att detta område görs till föremål inte
enbart för en metodisk betraktelse utan även för en teoretisk, eftersom
en riktig uppfattning av metodiken i ett fack ju ej är möjlig utan ett
grundligt inträngande i själva fackämnet.

Med hänsyn till den sistnämnda delen av undervisningen återstår
att notera att den bästa möjligheten därvid tycks vara att visa eleverna
grunddragen av matematikens äldre historia, särskilt i fråga om geo-
metrin.

Seminariernas sätt att undervisa präglas alltmer av strävanden mot
att eleverna utvecklar egen aktivitet och en viss grad av självstän-
dighet i sitt arbete. Sålunda har det under de senaste åren allt oftare
förekommit att eleverna vid sidan av arbetet i klassen efter eget val
erhållit studieuppgifter att genomföra på egen hand. Läraren har givit
stöd endast då eleverna själva ansett sig behöva handledning. Arbets-
resultatet har vanligen redovisats i form av ett skriftligt arbete.
Sannolikt kommer denna friare arbetsform att få ökad användning.

Förhållandevis sällan har den hittills förekommit i matematik, men man torde få hoppas att ämnet, allt eftersom den matematiska lärogången får ett ökat innehåll och utblickar i olika riktningar inom den elementära matematiken dyker upp, i högre grad skall fånga elevernas intresse och sporra de mer begåvade till självständiga studier.

Till sist några ord om det skriftliga arbetet i matematik. En skriftlig uppsats i matematik av det slag att det ger övning i att formulera en matematisk tankegång och att använda matematisk skrift rätt har hittills i regel inte förekommit vid seminarierna. I en lärogång i matematik, så som den ovan skisserats, förefaller man inte helt kunna undvara sådan uppsatsskrivning. Ur den formella bildningens synvinkel är den verkligen värdefull och den ger ett gott prov på graden av skärpa och klarhet i elevens uppfattning.

C. Folkskollärarnas fortbildning

Frågan om fortbildning av folkskollärare står på dagordningen. Tills vidare har man endast vidtagit enstaka åtgärder för främja detta ändamål: resestipendier, speciella kurser för slöjd, teckning, trädgårdsskötsel, kurser för nykterhetsundervisning o.s.v. och framför allt de av universiteten anordnade sommarkurserna. Dessa ges årligen sedan år 1893 och besöks flitigt av folkskolans lärare och lärarinnor.

Den starkare utvecklingen av folkskolans överbyggnader: fortsättningsskolor, högre folkskolor, kommunala mellanskolor, som tycks vara att vänta i framtiden, kräver mer verksamma åtgärder, dels för den speciella utbildningen i vissa praktiska ämnen, dels för den teoretiska fortbildningen. I det sista avseendet har man i debatten föreslagit särskilda utbildningsanstalter, men man har alltmer börjat rikta sina tankar och förhoppningar mot universiteten.

Ett förverkligande på något vis av dessa tankar och förhoppningar skulle helt visst innebära den lyckligaste lösningen på denna fråga.

5. Småskoleseminarierna

En lärogång som efter godkänd examen berättigar till anställning som lärarinna (lärare) vid en småskola eller som biträdande lärarinna (bi-

trädande lärare) vid en folkskola, skall enligt gällande föreskrifter av år 1897 och beträffande matematik omfatta: "Färdighet i de fyra räknesätten i hela tal och bråk med tillämpning på enklare praktiska uppgifter jämte övning i huvudräkning". Den fullständiga frånvaron av geometri verkar härvid en smula förvånande. För ett närmare klargörande av undervisningens beskaffenhet må här anföras de anvisningar om matematikundervisningen som förekommer i det tvååriga småskoleseminariets undervisningsplanplan.⁸

"Lärostoff. De fyra räknesätten med heltal. Decimalbråk och allmänna bråk jämte tillämpning på praktiska uppgifter. Enkla yt- och rymdberäkningar."

"Metodiska anvisningar. För att undervisningen skall uppnå sitt dubbla mål att verka för intellektets utveckling och samtidigt tjäna praktiska syften, är det viktigt att eleverna inom varje område av räkneläran dels klart förstår räkneoperationerna, dels lär sig förvärva den nödvändiga färdigheten i räkning. – Uppgifterna för tillämpningsövningar skall genomgående vara naturliga och i regel föra till enkla sifferräkningar. Ökad svårighetsgrad beträffande siffror är onödigt tröttande, stjälar tid och vilseleder ofta i uppfattningen av den givna uppgiften. Tal med många siffror får som regel endast förekomma i rena sifferexempel och i så fall sparsamt. – Huvudräkning skall övas flitigt, dock varje gång endast en kort stund och endast med avseende på enkla uppgifter med låga tal. – Genom praktiskt och systematiskt ordnade mät- och konstruktionsuppgifter kan eleverna bli förtrogna med geometriska grundbegrepp (som linjen och planet, olika slags vinklar, trianglar och parallelogrammer, cirklar o.s.v.), inte genom definitioner utan genom eget arbete med dessa begrepp."

I de aktuella seminarierna är fackämnet tilldelat 3 veckotimmar under det första året och 2 veckotimmar under det andra året.

Fotnoter

1. Författaren är skyldig ett tack till folkskoleinspektör *J. Franzén* som har läst igenom manuskriptet till föreliggande del av rapporten och samtidigt även till rektorena *A. Dalin* och *N.O. Bruce* som har givit förf. underrättelser om de högre folkskolorna.

2. En möjlighet till befrielse från skolgång utan att den egentliga skolkursen avklarats kan ges normalbegåvade i händelse av stor fattigdom (*minimikurs*). Barn som lämnat skolan efter tillägnad minimikurs kan erhålla fortsatt undervisning i en s.k. *ersättningskola*.

3. Se *B. Hartmann*, Rechenunterricht in der deutschen Volksschule, Leipzig, Kesselring 1904, s. 337.

4. Vigesimalsystemet har talet 20 som bas (Ö.a.)

5. Ett exempel må anföras. Ett kapital lånas ut under fem månader och återbetalas jämte 5,5 % ränta med 1816 kronor och 70 öre. Hur stort var kapitalet?

Lösning: Förhållandet mellan startkapitalets ränta och kapitalet självt är

$$\frac{1}{100} \cdot 5 \frac{1}{2} = \frac{11}{200}$$

Förhållandet mellan startkapitalets ränta under 5 månader och kapitalet självt är

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{11}{200} = \frac{11}{480}$$

Proportionstalen för startkapitalets ränta, kapitalet och slutkapitalet är 11, 480, 491.

Startkapitalet är alltså

$$\frac{480}{491} \cdot 1816,7 \text{ kronor} = 1776 \text{ kronor.}$$

Man bör observera att Nordlund från första början använder allehanda åskådningsmaterial som stavar, pappersark o.d. i undervisningen och att han vid lösning av uppgifter som den anförda vänjer eleverna att representera förekommande storheter med linjer av lämpliga längder och därigenom gör deras förhållanden åskådliga.

6. Se sid. 22.

7. Meddelandena om kommissionens ännu inte slutgiltiga förslag rörande matematikundervisningen tas i det följande upp av förf. (medlem av kommissionen) med tillstånd av kommissionens ordförande, fil. dr *Fridtjuv Berg*.

8. Småskoleseminariet i Linköping, enligt underrättelse av föreståndaren, herr *J. Wahlqvist*.