

Matematiken vid Tekniska Högskolan i Stockholm

av H. von Koch

professor vid Tekniska Högskolan i Stockholm

I Sverige finns det två högre läroanstalter, vars ändamål är att utbilda till ingenjörsyrket, nämligen *Tekniska Högskolan* i Stockholm och *Chalmers Tekniska Läroanstalt* i Göteborg. Båda arbetar i huvudsak efter ett likartat program. Dock är antagningsvillkoren för den förstnämnda högre och mer omfattande än för den senare. Därtill kommer att kurserna i Göteborg i allmänhet är treåriga, medan de är såväl tre- som fyraåriga i Stockholm. Därigenom kan undervisningen vid Tekniska Högskolan ges något mer specialiserade och mer fullständiga än vad som är möjligt vid Chalmers Tekniska Läroanstalt.

Tekniska Högskolan och i än högre grad Chalmers anstalt står dock i fråga om laboratorier och lärarkrafter i betydande grad tillbaka för flertalet modernt utrustade tekniska högskolor i utlandet. När en kommitté tillsattes år 1906 med uppdraget att undersöka den högre tekniska undervisningens situation i riket och ge förslag till dess reglering, hade den först att pröva frågan i vilken riktning läroanstalternas utveckling skulle gå: skulle båda högskolorna jämföras i fråga om studieplan och studieomfång och utrustas på ett sätt som motsvarade den nya tidens krav, eller skulle man tills vidare nöja sig med *en* sådan högskola. Med hänsyn till landets finansiella hjälpmedel kom kommittén till resultatet att den chalmerska läroanstalten, som i sin hittillsvarande organisation hade visat sig motsvara ett verkligt behov av högre teknisk utbildning hos dem som inte önskade eller hade möjlighet att genomgå en fullständig högskolekurs, måste få bibehålla sin ställning och uppgift, beträffande lärarkrafter och materiell utrustning

dock med de förbättringar som syntes nödvändiga och tidsenliga för uppfyllandet av dess uppgift. För Tekniska Högskolan däremot lämnade kommittén ett genomgripande förslag till utvidgning och reorganisation, enligt vilket inte endast ett större antal elever skulle få plats utan även, och detta huvudsakligen, undervisningen skulle bringas i samklang med de höga krav som den nya tiden ställer på högre ingenjörsutbildning. Därvid avses inrättande av maskiner och försökslaboratorier bilda ett huvudmoment. Detta förslag, vars förverkligande förorsakar betydande kostnader och således ställer stora krav på landets offervilja, torde under året 1911 läggas fram för behandling i riksdagen.

Den framställning som följer här gäller matematikens *nuvarande* ställning vid Tekniska Högskolan.¹

För inträde som ordinarie elev i första avdelningen är enligt statuterna den berättigad som:

1) vid studentexamen inom reallinjen fått betyget ”godkänd” i ämnena matematik, fysik och kemi samt godkända vitsord om färdighet i linear- och frihandsteckning i den omfattning som föreskrivs för studentexamen vid de allmänna läroverkens reallinje;

2) avlagt studentexamen på latinlinjen samt efter föreskriven kompletteringsprövning i en omfattning motsvarande studentexamen på reallinjen erhållit betyget ”godkänd” i ämnena matematik, fysik och kemi samt förvärvat godkänd färdighet i linearritning och frihandsteckning;

3) avlagt avgångsexamen vid Chalmers Tekniska Anstalt i Göteborg eller vid en statlig teknisk elementarskola samt enligt föreskriven prövning vid en högre allmän statlig skola blivit godkänd i svenska, levande främmande språk, historia och geografi i en omfattning motsvarande studentexamen på reallinjen.

För tillträde som ordinarie elev till en högre avdelning av högskolan krävs förutom det som ovan nämnts bevis för att den inträdesökande i fråga om kunskaper och färdigheter är i nivå med eleverna i den avdelning som han vill antas till.²

Högskolan omfattar

a) en fackskola för maskinbyggnad och mekanisk teknologi med tre underavdelningar, nämligen

1° en maskiningenjörsavdelning med såväl tre- som fyraårig lärogång

2° en avdelning för mekanisk fabriksindustri med såväl tre- som fyraårig lärogång

3° en avdelning för skeppsbyggnadskonst med fyraårig lärogång

b) en fackskola för elektroteknik med 3,5-årig lärogång

c) en fackskola för kemisk teknologi med såväl tre- som fyraårig lärogång

d) en fackskola för bergsvetenskap med treårig lärogång, nämligen för 1° bergsmekanik med fyraårig lärogång

2° metallurgi och hyttbyggnadskonst med såväl tre- som fyraårig lärogång

3° gruvvetenskap med såväl tre- som fyraårig lärogång

e) en fackskola för väg- och vattenbyggnadskonst med fyraårig lärogång

f) en fackskola för arkitektur med fyraårig lärogång.

I samtliga fackskolor erhåller eleverna under första och delvis andra året undervisning i de grundläggande ämnena, matematik, beskrivande geometri, fysik o.s.v., därefter börjar undervisningen i specialämnena.

För flertalet fackskolor omfattar matematikkurserna en tidrymd av tre terminer med 9 veckotimmar under första terminen (10/9–19/12), 10,5 veckotimmar under andra terminen (10/1–10/6) och 3 veckotimmar under tredje terminen (10/9–19/12). Undantag bildas av fackskolorna för kemisk teknologi, för arkitektur och för bergsvetenskap (de treåriga underavdelningarna) för vilka en kortare kurs om endast en termin (10/9–19/12) med 9 veckotimmar är inrättad.

Den *längre kursen* omfattar:

Analytisk geometri i planet och rummet. Differentialräkning. Algebra jämte determinantteori. Integralräkning. Geometriska tillämpningar av differential- och integralräkningen.

Ordinära differentialekvationer, huvudsakligen av första och andra ordningen. Geometrisk tillämpning.

Den *kortare kursen* har följande innehåll:

Analytisk geometri i planet. Elementen av differential- och integralräkning jämte enkla geometriska tillämpningar.

Undervisningen i ren matematik ges i den större kursen av en professor med hjälp av två assistenter, i den kortare kursen av en hjälplärare med en assistent.

För de närbesläktade ämnena gäller likartade inrättningar. Sålunda fördelas undervisningen i beskrivande geometri på en huvudlärare och en biträdande lärare med assistent, likaså undervisningen i allmän fysik. Geodesin företräds av en huvudlärare med assistent. Vid undervisningen i teoretisk mekanik är eleverna fördelade på samma sätt som i ren matematik. Den större kursen hålls av professorn i vederbörande ämne, den kortare kursen av en lektor.

Undervisningen utgörs omväxlande av föreläsningar och övningar. Sålunda faller i den större kursen i matematik tre lektioner i veckan (vardera 1 1/4 timme) på föreläsningar, två på repetitioner och övningar rörande föreläsningarna vid svarta tavlan och en på problemlösning, varvid eleverna lämnar skripta som förbättras av assistenterna.

Då antalet elever i den större kursen är ungefär 100, gör man en indelning i åtminstone två grupper vid övningarna, som vardera leds av en assistent. Föreläsningarna däremot hålls samtidigt för alla elever av huvudläraren i respektive ämne. På grund av det stora elevantalet läggs därvid särskild vikt vid att vidmakthålla ett spänt intresse hos åhörarna. Man har försökt uppnå detta dels genom att ordna olika kursavsnitt så att de mer abstrakta kapitlen om möjligt växlar med enkla tillämpningar och exempel såsom kurvritning, dels genom att inskjuta frågor till eleverna rörande något moment av det behandlade stoffet. Det senare sättet har visat sig vara ett nyttigt medel inte bara för att öka auditoriets intresse utan även för att visa föreläsaren om det behandlade stoffet har uppfattats rätt.

Utformningen av de olika delarna av ett ämne kunde variera mellan olika år. Som exempel följer här programmet för beskrivande geo-

metri och linearritning enligt underrättelser från professor *P.H. Henriques*.

Ren matematik

Analytisk plangeometri: Repetition och komplettering av gymnasiekursen. Övningar i grafisk framställning av några enkla funktioner.

Differential- och integralräkning: Begreppet gränsvärde. Funktionsbegreppet och indelning av funktioner. Kontinuitet och diskontinuitet. – Begreppet derivata och derivatans geometriska tolkning. Deriveringsregler. Derivering av rationella, inversa och sammansatta funktioner.

Binomialteoremet. – En funktions växande och avtagande. Maxima och minima och deras uppsökande genom derivering. – Begreppet derivata av andra ordningen och högre ordning. Tillämpningar på undersökning av maxima och minima, av konkavitet, konvexitet och inflexionspunkter. – Definition och egenskaper hos trigonometriska och cyklometriska funktioner (spec. derivering). Införande av talet e . Funktionerna a^x och $\log x$. Logaritmisk derivering. Bestämning av några gränsvärden. – Begreppet differential och dess tolkning. Differentialer av andra ordningen och högre ordning. Leibniz' formel. Differentiering av implicita och sammansatta funktioner. Införande av nya variabler. – Rolles sats. Medelvärdessatser.

Tillämpningar på s.k. obestämda uttryck. – Taylors formel med några av dess enklaste tillämpningar. Begreppet oändlig serie, speciellt Taylors serie. Enkla exempel. Numerisk beräkning av logaritmer och andra elementära funktioner. – Användning av Taylors formel vid undersökning av kurvor. Bestämning av asymptoter till några enkla kurvor.

Obestämda integraler. Direkt integration. Integration genom substitution, partiell integration. – Geometrisk tolkning av en integral, beräkning av vissa ytor och volymer. – Begreppet bestämd integral och dess viktigaste egenskaper. Härledning av en integral genom gränsövergång av en summa. Exempel. – Egenskaper hos integralen, härledda ur den nya definitionen.

Substitutionsmetod, partiell integration av bestämda integraler. Wallis' formel.

Utvidgning av begreppet bestämd integral. Fall då integranden eller integrationsgränsen blir oändlig. Integration av vissa diskontinuerliga funktioner.

Beräkning av kurvlängder. Introduktion av hyperboliska funktioner.

Införing av de komplexa talen. Gränsvärden till komplexa tal. Komplexa funktioner av en reell variabel. Differentiering och integration av en komplex funktion.

Satser ur algebran. – Uppdelning av rationella funktioner i partialbråk. Integration av en rationell funktion. – Integration av vissa irrationella och transcendent, speciellt trigonometriska, funktioner.

Satser ur teorin för serier. – Approximativ beräkning av integraler. Cotes' och Simpsons regler. – Beräkning av en integral genom serieutveckling. – Amslers polarplanimeter. – Cauchys integralkriterium. – Tillämpning av integralräkning vid beräkning av moment och tyngdpunkter. – Pappus sats (Guldin). Teori om kedjekurvan.

De enklaste satserna för numerisk lösning av ekvationer.

Grundläggande definitioner och formler beträffande permutationer och kombinationer. Introduktion av läran om determinanter av andra, tredje och fjärde ordningen. Lösning av linjära ekvationssystem.

Funktioner av flera variabler. Differentiering. Taylors formel. Maxima och minima.

Analytisk geometri i rummet. Koordinatsystem. Räta linjen och planet. Huvudformerna för ytor av andra graden. – Cylinderytor, koniska ytor, rotationsytor. – Andra speciella ytor. Normaler och tangentplan. Tangent och normalplan till kurvor. – Båglängder hos rumskurvor.

Krökning hos plana kurvor. Kurvhöljen. – Krökning hos rumskurvor. Huvudnormaler, binormaler.

Införing av dubbelintegraler och trippelintegraler. Beräkning av volymer och ytor.

Introduktion av läran om *differentialekvationer*. Integration av de enklaste typerna. – Geometriska tillämpningar. – Historisk översikt.

Beskrivande geometri. Första året

A. Inledning

Ändamål och betydelse rörande den beskrivande geometrin. Olika avbildningsmetoder.

B. Punkten, linjen och planet

Projektionerna av en punkt i de fyra projektionskvadranterna. Projektioner av en linje. Speciella riktningar för den avbildade linjen. En krökt linjes projektioner. En linjes spår. Avbildning av en plan figur. Några speciella ställningar hos avbildade plan. Incidens mellan punkt och linje.

Metrisk problem. Bestämning av avståndet mellan punkter, vars projektioner är givna. Att dra en normal genom en given punkt mot ett givet plan. Att projicera en given linje så att en av projektionerna blir en punkt. Att avbilda ett givet plan så att detta blir ett projektionsplan. Att genom en given punkt dra normalen till en given linje. Att bestämma avståndet mellan två linjer. Att bestämma storleken av en vinkel mellan två linjer eller två plan, som går genom sina spårlinjer. Vinkeln mellan en linje och ett plan. Oändligt avlägsna element. Bestämning av spårlinjen till ett plan, när vissa villkor är givna. Sidoprojektioner, första och andra bisektrisplanet.

Incidensproblem. Att genom en given punkt dra en linje parallellt med ett givet plan. Att lägga ett plan genom en punkt parallellt med ett givet plan. Att bestämma skärningslinjen till två plan. Att bestämma skärningspunkten mellan en given linje och ett plan eller till tre plan. Bestämning av skärningspunkterna mellan en polyeder och en linje.

Att genom en given punkt dra en linje som bildar givna vinklar α och β med horisontal- resp. vertikalplanet. Att genom en given punkt lägga ett plan så att detta bildar givna vinklar α och β med horisontal- resp. vertikalplanet. Bestämning av vinklarna hos en pyramid och ett prisma. Relation mellan projektionen av plana figurer och deras bilder i projektionsplanet. Rotationskoner och rotationscylindrar.

Affinitet. Affina system i affint läge. Affina system i allmänt läge. Horisontal- och vertikalplanets affina relation. Cirkeln och dess affina

system. Problem rörande ellipsen som kan lösas med hjälp av en affin cirkel.

C. *Satser och uppgifter rörande polyedrar*

Allmänna definitioner, Eulers formel för konvexa polyedrar. Mångkantiga hörn. Trianglar. Deskriptivt-geometriska lösningar av de sex grundproblemen för trekantiga hörn. Prismat. Att konstruera projektionerna av ett prisma i olika lägen. Plana genomskärningar av ett prisma. Utbredning av sidoytor. – Pyramiden. Att konstruera projektionerna av en pyramid i olika positioner. Plana genomskärningar av en pyramid. Utbredning av sidoytor. Centrisk kollineation. Cirkelns centriskt kollineära system. Tillämpningar. De regelbundna polyedern. Projektioner, "nät", plana genomskärningar. Genomskärning av två polyedrar. "Kantmetoden" och "Planmetoden". Exempel.

D. *Axonometri och sneda projektioner*

Olika axonometriska projektionsmetoder. Isometrisk, dimetrisk, trimetrisk projektion. Cirkelns, sfärens och jordklotets axonometri. Pohlkes sats för sned projektion. H. Schwarz' bevis i deskriptiv-geometrisk framställning.

E. *Krökta linjer*

Alstring av kurvor. Dubbelpunkter och andra singulära punkter. Algebraiska och transcendent kurvor. Öppna och slutna linjer. Oändligt avlägsna element. Plana och dubbelkrökta kurvor. Sekant, tangent, inflexionstangent, inflexionspunkt. Normal, normalplan. Oscillerande plan. Ordning och klass hos algebraiska kurvor. Projektioner och spår av kurvor. Genomskärning av en kurva med ett plan. Evoluta, involuta. Krökning, krökningscirkel, krökningsradie. Relation mellan krökningen hos en kurva och krökningen hos dess projektion. Skruvlinjer, deras projektioner, tangenter, osculerande plan, krökningscirkel.

F. *Krökta ytor*

Alstring av krökta ytor. Generatriser, styrlinjer, styrytor, styrplan. Tangentplan, normal, normalplan. Elliptiska, hyperboliska, parabol-

iska punkter. Avbildning av ytor. Konturer. Verklig kontur, bildkontur. En ytas spår.

Utbredbara ytor. Den allmännaste alstringen genom okulerande plan av en dubbelkrökt yta. Cuspidalkurva. Utbredning av ytan. Krökningen hos en cuspidalkurva ändras inte genom utbredningen, däremot ändras krökningen av varje annan kurva på ytan. Bevis av formeln $r_0 = \frac{r}{\cos w}$. *Geodetiska linjer.* Allmän sats för vinkeln mellan det oskulerande planet till en geodetisk linje och ytans tangentplan.

Cylindriska ytor. Cylinderytor av andra ordningen. Tangentplan, genomskärning, tangentbestämning. Utbredning av cylinderyta, transformen till en kurva på ytan. Inflexionspunkter och krökningsradier till transformer. *Koniska ytor.* Koniska ytor av andra ordningen. Tangentplan, genomskärning, tangentbestämning, cirkulär kon. Dandelin's sats med tillämpningar. Utbredning av konisk yta, transformen till en kurva på ytan. Skruvlinjen, den geodetiska linjen, den logaritmiska spiralen på en kon. *Utbredningsbara skruvytor.* Tangentplan, genomskärning, tangenter. Utbredning. *Rotationsytor.* Axel, meridian, parallellcirkel. Framställning av en rotationsyta när generatrisen är en dubbelkrökt kurva och a) axeln är vinkelrät mot ett av projektionsplanen b) sned mot de båda projektionsplanen. Tangentplan, beröringskurvor. Plana genomskärningar av rotationsytor, olika fall. *Sfären.* Stereografisk projektion. Torus. Rotationshyperboloid alstrad genom en linjes rotation.

Sneda ytor. Allmänt fall, en linje glider längs tre kurvor. Andra alstringssätt. Konoiden. Hyperboloider, deras tangentplan, genomskärningar. Sneda skruvytor. Skruvkonoiden. Den skarpa och platta skruven. Sneda valv. Serpentina.

G. Genomskärning till två ytor

Allmän regel. Genomskärning av cylinderytor. Tangentbestämning. Kon och cylinder. Rotationsytor. Sfär och kon. Axonometrisk behandling av sådana problem. Tillämpningar.

Andra året

Centralprojektion. Punkter, linjer, plan. Samma problem som i kursens föregående del löstes med ortogonal projektion. Centralprojektion av polyedrar och krökta ytor. Centralprojektion av cirkeln, olika fall. Centralprojektion av sfären, bestämd genom Dandelins sats. Centralprojektiva lägesproblem.

Projektiv geometri. Perspektiviska punktrader och strålnippen. Projektiva punktrader och strålnippen. Projektiv potens. Dubbel-förhållanden. Fundamentala uppgifter rörande projektiva punktrader och centriskt projektiva strålnippen. Koaxiala projektiva punktrader, koncentrisk projektiva strålnippen. Dubbelelement. Den fullständiga fyrhörningen, den fullständiga fyrsidingen. Harmoniska förhållanden. Den harmoniska punktraden definierad genom ekvationen $(ABCD) = -1$. Egenskaper hos den fullständiga fyrhörningen. *Teori för kägelsnitt.* Kägelsnitt, alstrade av projektiva punktrader och strålnippen. Cirkeln och dess projektioner. Att konstruera ett kägelsnitt när fem punkter resp. fem tangenter är givna. Speciella fall och tillämpningar. *Pascals och Brianchons* satser. Bestämning av dubbelelementen till två koaxiala projektiva punktrader resp. koncentrisk projektiva strålnippen som är givna genom tre par tillordningar. *Steiners* konstruktion. Tillämpningar av dubbelelementkonstruktionen, t.ex.: Om fem punkter är givna, skall man fastställa arten av det därigenom bestämda kägelsnittet. Pol och polar. Konjugerade poler och polarer. Relationen mellan pol och polar ändras ej vid projektion. Kägelsnittets medelpunkt som pol till den oändligt avlägsna linjen, diametern som polar till oändligt avlägsna punkter. Projektion av medelpunkt och diametrar. Reciprocitetssatsen, härledd ur teorin för pol och polar.

Involution. Involutoriska punktrader och strålnippen. Elliptiska och hyperboliska involutioner. Involutoriska egenskaper hos den fullständiga fyrhörningen. Konjugerade diametrars involution. Tillämpningar och uppgifter.

Linearritning

Karta för materialbeteckning. Klotsar i sned projektion. Skruvar.

Stenhuggningskonstruktioner: Raka valvbågar; sneda cylindriska valvbågar. Korsvalv, fönstervalv, nischer. Geometrisk *skugglära*: Grundvalar, skuggor och slagskuggor av polyedrar och runda kroppar. Skuggkonstruktioner på rotationsytor medelst hjälpsfär. Tekniska exempel. *Geometrisk laveringslära*. Isophototeori. Isofoter hos sfären, cylindern, konen. Användning av hjälpsfär vid isofotokonstruktioner på olika ytor. *Tuschlavering*. *Övning i skraffering*. *Axonometrisk ritning*. Större ritning av en arbets- eller kraftmaskin med skuggbestämning och lavering. *Perspektivlära*. Perspektivisk skugglära. Byggnadsperspektiv.

I avdelningen för arkitektur dessutom: toscanisk, dorisk, jonisk, korintisk pelarform enligt *Vignola*.

Fotnoter

1. Matematikens ställning vid Chalmers anstalt motsvarar i många avseenden den vid Tekniska Högskolan. En viktig skillnad är dock att den förra på grund av lättare antagningsvillkor måste använda mer tid för elementär matematik. För närmare upplysningar om läroplan och undervisningsmetod vid Chalmers anstalt hänvisas till en uppsats av dr A. Söderblom (Ped. Tidskrift 1910).

2. Utöver ordinarie elever har högskolan ett ringa antal s.k. *extraordinarie* elever, för vilka antagningsvillkoren är något lättare än för de ordinarie, dessutom s.k. gästelever. I denna rapport omtalas inte dessa grupper, då deras elevantal är relativt obetydligt (hösten 1908 intogs i första avdelningen 1 extraordinarie elev och 62 gästelever mot 124 ordinarie).