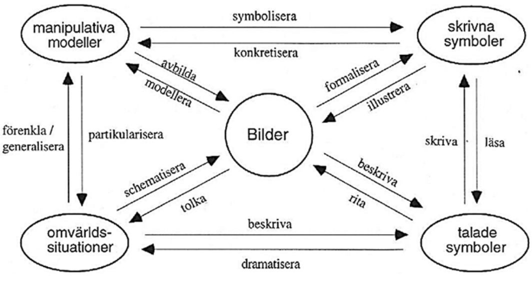
KERSTIN HAGLAND

Rita en bild!

Ofta ger lärare sina elever tipset att rita en bild när de har kört fast på ett problem. Men vad menas egentligen med det? Här ges exempel på olika typer av bilder som kan förekomma vid problemlösning. Kanske kan en inspirerande diskussion om olika sätt att använda bilder även öka arbetsglädjen och lusten att lära matematik?

Skolans styrdokument, från förskolan och upp genom hela ungdomsskolan, poängterar att det är viktigt att de unga får utveckla sin förmåga att kommunicera och då använda flera olika uttrycksformer. Vilka olika matematiska uttrycksformer finns när det gäller matematiken i förskola och skola? Göran Emanuelsson har sammanfattat så här:



Flexibel användning av mångahanda matematiska uttrycksformer har, bland annat av forskarna Brenner m fl (1999), beskrivits som en nyckel till kompetent matematiskt tänkande och förmåga att lösa matematiska problem.

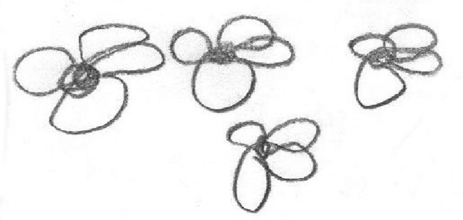
Till de matematiska uttrycksformerna hör bilder. Lärare uppmuntrar ofta sina elever, som brottas med ett matematiskt problem: Rita en bild! Vilken sorts bild läraren tänker på står inte alltid klart för eleverna.

Jag vill här ge exempel på tre olika typer av bilder som används vid matematisk problemlösning: *dekorationer*, *illustrationer* och *schematiska bilder*.

Min förhoppning är att detta ska inspirera den som vill upptäcka, undersöka, använda, diskutera och utveckla de olika typerna som tankeredskap vid problemlösning.

Dekoration

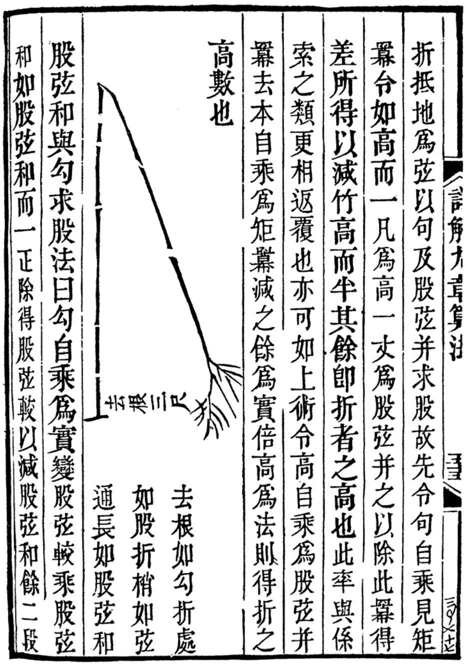
Här är ett exempel på en dekoration, ritad av en elev som löste ett problem där tal i bråkform ingick. Det handlade inte om blommor.



En dekoration vill jag definiera som en *ren utsmyckning*. Typiskt för en sådan är att den kan men inte alls behöver ha något med problemet att göra. Problemet blir varken lättare att uppfatta eller enklare att lösa genom dekorationen. I sämsta fall kan dekorationen istället distrahera och göra det svårare för eleven att uppfatta problemet eller finna en lösning.

Illustration

Här är en berömd bild, hämtad från en kinesisk matematisk text, *Chou Pei Suan Ching*, som är minst ett par tusen år gammal.


詳解九章算法

折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與係索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之高數也

股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股弦和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二段

Bilden illustrerar följande problem enligt min tolkning:

> Ett 10 fot högt bambuträd är avbrutet på ett sådant sätt att toppen når marken 3 fot från stammen. Hur högt ligger brottet?

En illustration vill jag definiera som en *förklarande bild*. Typiskt för en sådan är att det matematiska problemet blir lättare att uppfatta men bilden ger för övrigt ingen direkt hjälp till lösningen av problemet. Indirekt kan ändå en god illustration ibland ge en vink om en lösningsväg. En del problemlösare kanske ser att illustrationen av det brutna bambuträdet liknar en rätvinklig triangel och därmed kommer de in på Pythagoras sats och tar sina kunskaper om den till hjälp.

Schematisk bild

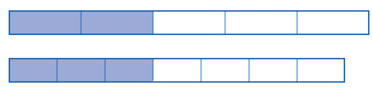
En schematisk bild vill jag definiera som en *översiktlig bild*. Typiskt för en sådan är att det matematiska problemet genom den kan förtydligas och därigenom lättare gå att lösa. I bästa fall leder en lyckad schematisk bild till upptäckter av tydliga matematiska mönster som i sin tur kan ge upphov till förenklande generaliseringar. Här följer några exempel på schematiska bilder och hur de använts för att lösa problem.

Del-helhetsbilder

> Syskonen Tova och Ture åker till mormor. De betalar var sin lika dyr bussbiljett. Tovas biljett kostar två femtedelar av hennes veckopeng och Tures tre sjundedelar av hans veckopeng. Vem har högst veckopeng?

Den lika biljettkostnaden ritas först i dubbel upplaga och delas sedan in i två respektive tre delar. Därefter bygger man på delarna till en hel veckopeng för var och en.

Tovas veckopeng



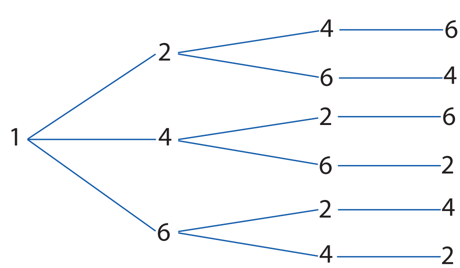
Tures veckopeng

De blå partierna motsvarar biljetterna som kostade lika mycket. Med hjälp av bilden går det nu att se att Tova har den högsta veckopengen.

Träddiagram

> Ninas nya cykel har ett kodlås med fyra siffror. Hon har glömt koden, men minns att den började med en 1:a och sedan kom siffrorna 2, 4 och 6. Ordningen på dem har hon glömt. Vilka olika koder kan det ha varit?

Man kan rita ett träddiagram över valmöjligheterna:



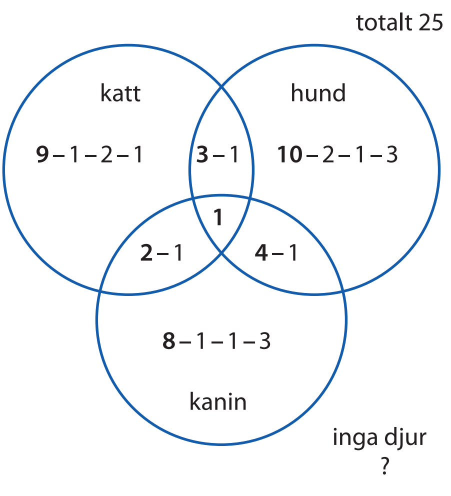
Det går nu att se i högerkanten av figuren att det finns sex möjliga koder: 1246, 1264, 1426, 1462, 1624 och 1642.

Venndiagram

Vid en liten undersökning framkom det i en klass att av de 25 eleverna hade 9 katt, 10 hund och 8 kanin. Av dessa hade 3 både katt och hund, 2 både katt och kanin och 4 både hund och kanin. Av dessa hade 1 elev katt, hund och kanin. Övriga elever hade inga djur alls. Hur många av de 25 eleverna var det som inte hade några djur?

För att sortera alla dessa data kan det vara bra att använda ett så kallat Venndiagram. Varje cirkel representerar ett av de djur eleverna har hemma. Där cirklarna överlappar varandra finns de elever som har två eller tre sorters djur.

Börja med att placera den som har alla tre sorternas djur där alla tre cirklarna går över varandra. Räkna sedan ut hur många som har två sorters djur och därefter hur många elever som har bara en sorts djur.

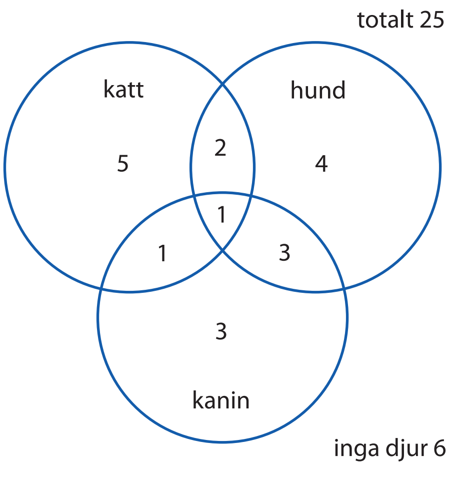


Exempel på hur en del av uträkningen kan ske:

- katt, hund och kanin (enligt texten): 1
- katt och hund: 3 (enligt texten) – 1 (den som hade tre sorters djur) = 2
- katt och kanin: 2 (enligt texten) – 1 (den som hade tre sorters djur) = 1
- katt: 9 (enligt texten) – 1 (katt, hund och kanin) – 2 (katt och hund) – 1 (katt och kanin) = 5

Gör sedan på samma sätt för att få fram hur många elever som bara har hund eller bara kanin:

- hund: 10 – 2 – 1 – 3 = 4
- kanin: 8 – 1 – 1 – 3 = 3



Räkna slutligen ut hur många elever som inte har några djur:

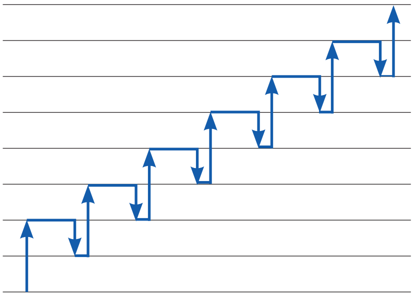
25 – (2 + 1 + 1 + 3 + 5 + 4 + 3) = 6

Alltså är det 6 av de 25 eleverna som inte har några djur alls. Venndiagrammet ger en översiktlig och lättavläst bild av elevernas djurinnehav.

Händelsekarta och flödesschema

Dessa kan se ut på många olika sätt, här är ett exempel:

> En snigel sitter knappt 8 meter ner i en brunn. Den tar sig upp 2 meter varje dag. På natten sover den och glider ner 1 meter. Hur lång tid tar det för den att komma upp?



Det är 1 meter mellan varje streck och snigelns förflyttning visas med hjälp av pilarna. Av bilden framgår att snigeln, eftersom brunnen är knappt 8 m djup, kan krypa över kanten efter 6,5 dygn.

Steg-för-stegbild

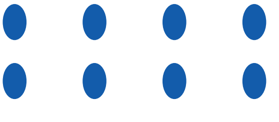
En annan typ av översiktlig bild visas nedan. Här ritas symboler för de fakta det handlar om och sedan utnyttjas bilden som arbetsredskap när man steg för steg närmar sig lösningen.

> I ett skåp har läraren skalbaggar och spindlar i en låda. Totalt finns där 8 småkryp. Det går att räkna till 54 ben. Hur många av småkrypen är spindlar och hur många är skalbaggar?

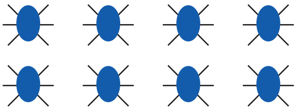
[Spindlar har åtta ben och skalbaggar har sex ben.]

Så här kan problemet lösas med hjälp av en steg-för-stegbild:

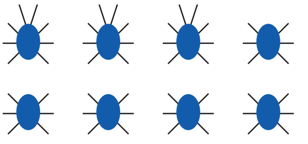
Steg 1
Åtta ovaler får symbolisera de åtta småkrypen.



Steg 2
Sex streck får symbolisera sex ben. De ritas på varje kropp eftersom alla småkrypen måste ha minst sex ben var.



Steg 3
De återstående sex benen fördelas parvis på krypen.



Nu syns lösningen! Det är 5 skalbaggar och 3 spindlar i burken.

Den här typen av lösningsmetod i bild kan man se mycket unga elever använda sig av. De verkar många gånger ha en vidare syn på hur matematiska uppgifter kan uttryckas än vad äldre elever har.

Tabell

Till grafiska och geometriska representationer räknas också tabeller. En tabell är i problemlösningssammanhang ett mycket bra hjälpmedel för att man ska få översikt, hitta matematiska mönster och kunna generalisera. En tabell kan även användas för att sortera fakta som gör den enklaste lösningsvägen mer uppenbar.

> En påskresa till fjällen har 50 resenärer och följande är känt om dem:
> 29 är kvinnor
> 15 av resenärerna är från Falun
> 15 av resenärerna är varken från Falun eller från övriga Dalarna
> 7 av de manliga resenärerna är från Falun
> 8 av de manliga resenärerna är från övriga Dalarna.
> Hur många manliga resenärer är från orter som inte ligger i Dalarna?

Vi gör en tabell för att få översikt och fyller i det vi vet.

personer	från Falun	från övriga Dalarna	från andra orter	summa
kvinnor				29
män	7	8		
summa	15		15	50

Sedan gör vi några enkla beräkningar av

- totala antalet män: 50 – 29 = 21
- män från orter som inte ligger i Dalarna: 21 – 7 – 8 = 6

personer	från Falun	från övriga Dalarna	från andra orter	summa
kvinnor				29
män	7	8	6	21
summa	15		15	50

Det är alltså sex manliga resenärer som är från orter som inte ligger i Dalarna. Observera att det inte är nödvändigt att fylla i hela tabellen för att få fram ett svar på frågan.

Andra matematiska bilder

Naturligtvis finns det många andra typer av matematiska bilder som också kan vara till stor hjälp vid problemlösning: matriser, grafer, andra typer av diagram och geometriska bilder samt även rörliga bilder av olika slag. De bilder som presenteras i den här artikeln är bara några exempel.

Några personliga reflektioner

Det skulle kanske kunna gå att öka elevernas lust att lära matematik om vi mer tydligt lyfter fram, diskuterar och provar exempel på matematiska bilder som en hjälp i tänkandet. Fokus skulle då även kunna förskjutas från att finna ett facitkorrekt svar på problemet till olika tolkningar av problemet samt olika vägar fram till lösningen. Kanske kan det i sin tur ge upphov till intressantare och mer givande matematiska diskussioner, där en mångfald av lösningsvägar och uttrycksformer uppfattas som en tillgång.

Flexibel användning av mångahanda matematiska uttrycksformer har av samstämmiga forskare beskrivits som en nyckel till kompetent matematiskt tänkande och förmåga att lösa matematiska problem. Då är det anmärkningsvärt, tycker jag, att det inte i något av de svenska styrdokumenten tydligt står uttalat att det till matematiska kunskaper även hör förmåga att kunna växla mellan olika uttrycksformer. Om det vore ett av de uttalade målen och tydligt nämndes även i bedömningskriterierna skulle kanske elever och lärare bli uppmärksammade på denna viktiga kompetens. Att fritt och kreativt kunna välja och växla mellan olika uttrycksformer i matematik kan även, anser jag, vara en viktig faktor för att öka arbetsglädjen och lusten att lära matematik. Se även DPL, s 52.

LITTERATUR

Brenner, Mary E., Herman, Sally, Ho, Hsiu-Zu & Zimmer, Jules M. (1999). Cross-National Comparison of Representative Competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), s 541–557.

Emanuelsson, Göran (1995). Måltavlan: Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnaren 22* (2), s 2–3.