Linda Mannila

Strukturerade härledningar ökar förståelsen

Strukturerade härledningar är ett specifikt format för att presentera beräkningar och bevis på ett klart och tydligt sätt som dessutom lämpar sig ypperligt för elektronisk representation. Modellen har visat sig fungera bra i undervisningen vid försök i Finland.

Medan bevis och exakta definitioner är vardagsmat för en universitetsstuderande, läggs tonvikten i matematikkurser på tidigare utbildningsnivåer (t ex gymnasiet) ofta på att använda existerande formler. Exakta definitioner, logik och bevis undviks då de anses vara för abstrakta och avancerade. Detta kan dock vara en björntjänst gentemot de studerande, eftersom de går miste om chansen att verkligen förstå grunderna för den matematik de ska lära sig. Matematiskt och logiskt resonemang riskerar att förbli en hemlighet och bevis ett magiskt trick när den formella biten utelämnas.

Strukturerade härledningar baserar sig på grundläggande logik och gör det möjligt att presentera lösningar på olika typer av matematiska problem enligt samma format. Då man använder strukturerade härledningar poängteras relationers och motiveringars betydelse, genom att dessa skrivs ut explicit som en lika viktig del av lösningen som de matematiska termerna. Målet är att lösningar och bevis skall bli lätta att förstå, även för personer som ser en lösning för första gången. Ytterligare en målsättning är att göra det lättare att kontrollera om en lösning eller ett bevis är korrekt.

Strukturerade härledningar introducerades i undervisningen första gången år 2001, då en omfattande empirisk studie startades vid ett finskt gymnasium. Testgruppen läste hela gymnasiets matematik med strukturerade härledningar, medan kontrollgruppen studerade enligt det traditionella sättet. Resultaten visade att testgruppen klarade sig bättre i alla kurser och i studentexamensprovet, även då man tar hänsyn till andra potentiellt inverkande faktorer. Efter detta har metoden använts på flera utbildningsnivåer och användningen har utvärderats ur olika perspektiv. Resultaten har överlag varit positiva: studerande uppskattar det nya sättet att skriva matematik och lär sig motivera sina lösningar under en enda kurs.

Vi kommer i denna artikel att ge en inblick i vad strukturerade härledningar är genom att gå igenom tre exempel, medan resultaten från våra empiriska studier kommer att presenteras mer noggrant i en uppföljande artikel.

Centrala egenskaper hos strukturerade härledningar

Det finns flera orsaker till varför strukturerade härledningar kan vara särskilt intressanta ur ett undervisningsperspektiv. Här presenterar vi lösningar på tre matematiska problem som belyser de mest centrala egenskaperna hos strukturerade härledningar. De två första exemplen är enkla och passar i undervisningen på grundskolenivå, medan det tredje är taget ur gymnasiematematiken.

En förstagradsekvation

Lös ekvationen $3x + 7 = 15 - 2x$.

Lösningen av en förstagradsekvation visar den enklaste strukturen hos en strukturerad härledning. Lösningen inleds med den ekvation vi skall lösa, som sedan omvandlas steg för steg till en form som inte längre kan omvandlas eller förenklas.

•	$3x + 7 = 15 - 2x$
$\Leftrightarrow$	{Subtrahera 7 från båda sidorna}
	$3x = 15 - 2x - 7$
$\Leftrightarrow$	{Addera $2x$ till båda sidorna}
	$3x + 2x = 15 - 7$
$\Leftrightarrow$	{Beräkna}
	$5x = 8$
$\Leftrightarrow$	{Dividera båda sidorna med 5}
	$x = \frac{8}{5}$
$\Leftrightarrow$	{Skriv i blandad form}
	$x = 1\frac{3}{5}$
□	

Varje steg består av två termer, en relation och en motivering för varför det gäller att den första termen står i den angivna relationen till den andra termen. För att reservera ordentligt med utrymme för både termer och utförliga motiveringar skriver vi dessa på separata rader. För att strukturera härledningen så att den blir lätt att skriva, läsa och förstå, skriver vi den i två kolumner: den första kolumnen används för relationssymbolerna (i detta exempel ekvivalens, $\Leftrightarrow$), medan vi i den andra skriver termerna och motiveringarna.

Första steget i detta exempel säger alltså att uttrycket $3x + 7 = 15 - 2x$ är ekvivalent ($\Leftrightarrow$) med uttrycket $3x = 15 - 2x - 7$ på grund av att vi subtraherat samma tal från båda sidorna. Genom att utöka lösningen med ytterligare steg byggs lösningen upp till att bilda en logisk helhet där varje steg är motiverat.

Strukturerade härledningar introducerar därmed ett väldefinerat format som ger de studerande en konkret modell för hur beräkningar och bevis ska skrivas. Ett bekant format kan fungera som mentalt stöd och hjälpa de studerande att tro på sin förmåga att lösa ett problem. Detta kan vara särskilt viktigt då det kommer till bevisuppgifter som är en vanlig källa till rädsla; med strukturerade härledningar presenteras bevis på samma bekanta sätt som andra typer av beräkningar. Ett standardiserat format gör det också möjligt att göra matematisk presentation mer konsekevent i textböcker och i klassrummet.

I exemplet ovan har vi gjort lösningen detaljerad, men i en undervisningssituation kan man naturligtvis själv avgöra om man vill göra flera saker i ett och samma steg. Till exempel kunde man lika väl tänka sig följande lösning.

•	$3x + 7 = 15 - 2x$
$\Leftrightarrow$	{Subtrahera 7 från båda sidorna och addera $2x$ till båda sidorna}
	$3x + 2x = 15 - 7$
$\Leftrightarrow$	{Beräkna}
	$5x = 8$
$\Leftrightarrow$	{Dividera båda sidorna med 5 och skriv i blandad form}
	$x = 1\frac{3}{5}$
□	

Att använda antaganden och observationer

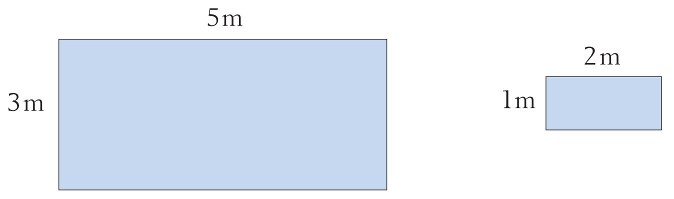
Jan ska måla golvet i sina två rum två gånger. Vardagsrummet är 5 m långt och 3 m brett, och köket 2 m långt och 1 m brett. Hur mycket målarfärg borde Jan köpa då den genomsnittliga åtgången är 1 liter per 2,5 m^2?

I textuppgifter som denna lönar det sig ofta att först rita en figur som illustrerar den situation vi har att göra med. Om vi vill inkludera bilder, diagram eller tabeller i en lösning ritar vi dem före eller efter själva härledningen, och refererar till dem i härledningen. På detta sätt håller vi härledningen klar och tydlig, utan att blanda in bilder eller annat material där.

Lösningen till denna uppgift visar också hur antaganden och observationer beskrivs i en härledning. Forskning inom problemlösning har visat att det är viktigt att man allra först bekantar sig med problemet tillräckligt för att förstå vad man vet och vad man ska göra. I matematiken är det tyvärr alltför vanligt att man hoppar in i en lösning utan att tänka efter ordentligt först. Då man ska skriva en lösning som en strukturerad härledning börjar man med att lista allt man redan vet, d v s det man får ur uppgiftstexten. Detta görs i form av *antaganden*. I vissa uppgifter finns inga antaganden, i andra finns ett eller flera.

Utifrån antagandena kan man ofta ta reda på ytterligare information som man kan ha nytta av för att lösa huvudproblemet. Denna information kan man lägga till som *observationer* som bygger på antagandena.

I det följande löser vi den aktuella uppgiften och använder oss av figurer, antaganden märkta med a–d och observationer märkta med 1–3. Vi skiljer den introducerande delen med uppgiftsspecifikation, antaganden och observationer från själva bevisdelen med tecknet ⊩ som kan utläsas ”bevisas av”.



•	Hur mycket målarfärg behövs för att måla golvet,
(a)	när det målas två gånger, och
(b)	vardagsrummet är 5 m långt och 3 m brett, och
(c)	köket är 2 m långt och 1 m brett, och
(d)	den genomsnittliga åtgången målarfärg är $\frac{1\,\mathrm{l}}{2{,}5\,\mathrm{m}^2}$
[1]	{Vardagsrummets yta fås ur (b)}
	Vardagsrummets yta är $5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$.
[2]	{Kökets yta fås ur (c)}
	Kökets yta är $2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}^2$.
[3]	{Totala golvytan fås ur [1] och [2]}
	Totala golvytan är $15\,\mathrm{m}^2 + 2\,\mathrm{m}^2 = 17\,\mathrm{m}^2$
⊩	”Mängden målarfärg”
=	{”Mängden målarfärg” (l) = 2 • ”totala golvytan” (m²) • ”genomsnittsförbrukningen” (l /m²), fås ur (a), (d), [3]}
	$2 \cdot 17\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{1\,\mathrm{l}}{2{,}5\,\mathrm{m}^2}$
≈	{Räknar och förkortar med enheten m²}
	14 l
□	

Medan vi i det första exemplet hade att göra med termer som hade ett sanningsvärde, är termerna här aritmetiska uttryck. Vi använder därför likhet och ”ungefär lika med” som relation i stället för ekvivalens, och får att ”mängden målarfärg” är lika med

$$2 \cdot 17\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{1\,\mathrm{l}}{2{,}5\,\mathrm{m}^2}$$

som i sin tur är ungefär lika med 14 l.

Jämfört med hur matematiska beräkningar traditionellt presenteras i klassrummet, innehåller en strukturerad härledning all information som behövs för att man ska förstå hela lösningen. Då varje steg motiveras kommer den slutliga produkten att innehålla en dokumentation av hur den studerande tänkte då han eller hon gjorde själva beräkningen. Den resulterande härledningen är därmed lättare att både läsa och kontrollera. På samma sätt blir de exempel som läraren visar på tavlan dokumenterade så att de är lättare att förstå och följa för studerande även i efterhand.

Användning av delhärledningar

För vilka värden på a är funktionen $f(x)=-x^2+ax+a-3$ alltid negativ?

I detta exempel använder vi oss i högre grad av logisk notation än i de tidigare exemplen. Vidare belyser detta exempel ytterligare en möjlighet hos strukturerade härledningar, nämligen användningen av ***delhärledningar*** för att lösa delproblem på plats inne i själva huvudlösningen. Matematiska problem löses som bekant ofta i mindre delar, och med hjälp av delhärledningar kan vi hålla ihop alla dessa delar i en enda kedja i stället för i form av en samling små fragment skrivna runt om på pappret. Det senare är tyvärr ett vanligt förekommande fenomen i studerandes häften och provpapper.

- Räkna ut för vilka värden på a funktionen $-x^2+ax+a-3$ alltid är negativ

$\Vdash$ $(\forall x : -x^2+ax+a-3<0)$

$\Leftrightarrow$ {Funktionen är en parabel som öppnar sig nedåt eftersom koefficienten för andragradstermen är negativ; en sådan funktion är alltid negativ om den saknar nollställen (parabel b i figuren på nästa sida).}

$(\forall x : -x^2+ax+a-3\neq 0)$

$\Leftrightarrow$ {Villkoret gäller om diskriminanten[1] D för funktionen är mindre än noll}

$D<0$

$\Leftrightarrow$ {Sätt in värdet på D}

- Räkna ut diskriminanten D:

  D

  $=$ {Diskriminanten för ekvationen $Ax^2+Bx+C=0$ är B^2-4AC}

  $a^2-4(-1)(a-3)$

  $=$ {Förenkla}

  $a^2+4a-12$

---

[1] Diskriminantsbegreppet används vanligen inte på gymnasieskolan i Sverige, men är vanligt i många andra länder. Diskriminanten D för ett andragradspolynom är en funktion av polynomets koefficienter. Att polynomet har två unika reella rötter är ekvivalent med att D>0. Hur man beräknar diskriminanten framgår av härledningen.

$\ldots \quad a^2 + 4a - 12 < 0$

$\Leftrightarrow$ {Funktionen $a^2 + 4a - 12$ öppnar sig uppåt, eftersom koefficienten för andragradstermen är positiv; en sådan funktion är negativ mellan nollställena (parabel a i figuren nedan)}

- Räkna ut nollställena för funktionen $a^2 + 4a - 12$:

  $a^2 + 4a - 12 = 0$

  $\Leftrightarrow$ {Använd lösningsformeln för andragradsekvationer}

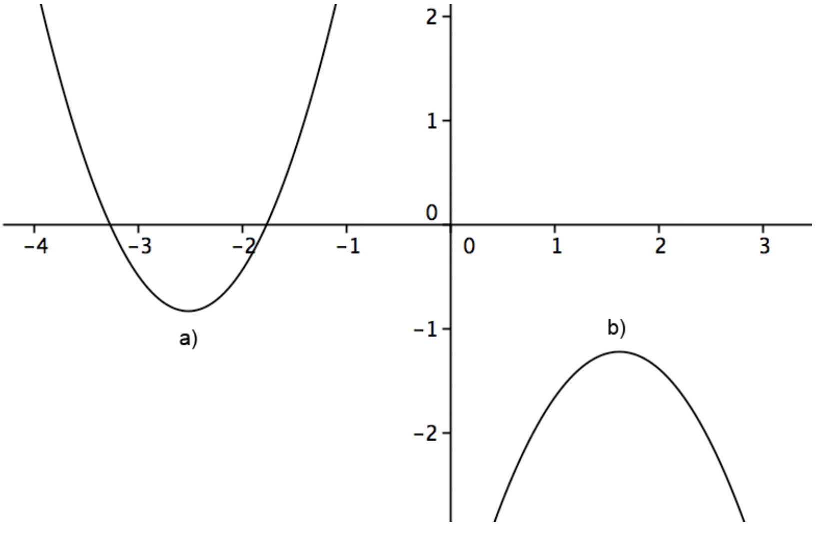
  $a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$

  $\Leftrightarrow$ {Förenkla uttrycket}

  $a = 2 \vee a = -6$

$\ldots \quad -6 < a < 2$

$\square$



Figur 1. Två typer av parabler.

Lösningen innehåller två delhärledningar: för att räkna ut diskriminanten och för att beräkna nollställena för en funktion. En delhärledning skrivs indenterad, varvid lösningens klara och strukturerade layout bibehålls och hela lösningen hålls ihop som en enda kedja. Tre punkter i rad (...) markerar var vi återgår till den yttre nivån.

På nästa sida upprepar vi samma beräkning igen, men nu med delhärledningarna gömda. De tre punkterna anger nu var en delhärledning finns dold.

- Räkna ut för vilka värden på a funktionen $-x^2 + ax + a - 3$ alltid är negativ

$\Vdash$ $(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0)$

$\Leftrightarrow$ {Funktionen är en parabel som öppnar sig nedåt eftersom koefficienten för andragradstermen är negativ; en sådan funktion är alltid negativ om den saknar nollställen (parabel a i figuren).}

$(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 \neq 0)$

$\Leftrightarrow$ {Villkoret gäller om diskriminanten D för funktionen är mindre än noll}

$D < 0$

$\Leftrightarrow$ {Sätt in värdet på D}

$\ldots$ $a^2 + 4a - 12 < 0$

$\Leftrightarrow$ {Funktionen $a^2 + 4a - 12$ öppnar sig uppåt, eftersom koefficienten för andragradstermen är positiv; en sådan funktion är negativ mellan nollställena (parabel a i figuren)}

$\ldots$ $-6 < a < 2$

$\square$

Som de tre exemplen visat, blir formalism och exakthet en naturlig del av matematiken då man använder strukturerade härledningar för att skriva och presentera bevis och beräkningar. Studerande ges därmed en möjlighet att bli vana vid att tolka och använda logisk notation och det matematiska språket. Ju tidigare studerande bekantar sig med formell notation, desto större är chansen att de också vågar börja använda den.

Verktygsstöd för strukturerade härledningar

Matematik är troligen ett av de skolämnen som digitaliserats minst. Att presentera matematisk notation i elektroniskt format är inte enkelt, eftersom matematiska symboler inte finns tillgängliga på vanliga tangentbord. Tack vare den specifika syntaxen lämpar sig strukturerade härledningar ypperligt för att möjliggöra ”digital matematik”.

Textredigeraren LyX (www.lyx.org), som baserar sig på öppen källkod, har utvecklats så att den nu stöder strukturerade härledningar. Originalversionen av LyX gör det smidigt att skriva matematisk text och med våra utvidgningar (LyX SD) gör redigeraren det enkelt att lägga till och ta bort kompletta steg ur en härledning, dölja och visa delhärledningar interaktivt samt kontrollera att en härledning är syntaktiskt korrekt, dvs att härledningen följer formatet för en strukturerad härledning. Vi har även kopplat LyX SD till läroplattformen Moodle. Tanken bakom arbetet med LyX är att förse studerande och lärare med ett verktyg som gör det möjligt att skriva och redigera matematisk text på ett enkelt sätt, och som därmed kan användas som en naturlig del av matematikundervisningen.

Vidare läsning

Vi har i denna artikel gett en inblick i strukturerade härledningar och formatets bakgrund. Presentationssättet kan användas inom alla matematikens delområden och utvecklades av professor Ralph-Johan Back och professor Joakim von Wright vid Åbo Akademi som en vidareutveckling av Dijkstras linjära härledningar (2002). Fördjupade beskrivningar av strukturerade härledningar finns bland annat i artiklar av Back & von Wright (1999) och Back, (2009).

Strukturerade härledningar har använts med goda resultat i undervisningen på flera utbildningsnivåer, och resultaten från våra empiriska studier presenteras i en uppföljande artikel i Nämnaren, men de som redan nu vill fördjupa sig mer i detta hänvisar vi till Peltomäki & Back (2009) som beskriver en studie där strukturerade härledningar introducerades och till övriga artiklar i listan nedan som alla beskriver olika typer av utvärderingar av metoden då den använts på olika utbildningsnivåer. Material och tilläggsinformation finns att hämta på resurscentret IMPEd:s (improving programming and mathematics education) webbplats, www.imped.fi.

LITTERATUR

Back, R.-J. (2009). Structured derivations: A unified proof style for teaching mathematics. *Formal aspects of computing*. Tillgänglig 2010-09-01 på www.springerlink.com/content/a75tmu1110kku422/fulltext.pdf

Back, R.-J., Mannila, L., Peltomäki, M. & Sibelius, P. (2008). Structured derivations: a logic based approach to teaching mathematics. *Proceedings of the ETAPS satellite workshop FORMED08: Formal methods in computer science education*. formed2008.inf.elte.hu/formed2008_proceedings_cd.pdf

Back, R.-J., Mannila, L. and Wallin, S. (2009). Student justifications in high-school mathematics. *Proceedings of the sixth congress of the European society for research in mathematics education*. Tillgänglig 2010-09-01 på www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6

Back, R.-J., Mannila, L. and Wallin, S. (2010).”It takes me longer, but I understand better”. Student feedback on structured derivations. *International journal of mathematical education in science and technology 41(5)*, 575–593.

Back, R.-J. och von Wright, J. (1999). Structured derivations: A method for doing high-school mathematics carefully. *Technical report TUCS-TR-246, 5 1999.*

Dijkstra, E. W. (2002). The notational conventions I adopted, and why. *Formal aspects of computing*, 14(2), 99–107.

Mannila, L. (2009). *Teaching mathematics and programming. New approaches with empirical evaluation* (doktorsavhandling). Åbo Akademi.

Mannila, L. och Wallin, S. (2009). Promoting students’ justification skills using structured derivations. *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (s 64–69). Taipei: National Taiwan normal university.

Peltomäki, M. och Back, R.-J. (2009). An empirical evaluation of structured derivations in high school mathematics. *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (s 136–141). Taipei: National Taiwan normal university.