Uppskattning av överslag

Barbara Reys, Robert Reys & Göran Emanuelsson

Här kommer en uppföljande artikel när det gäller taluppfattning och de verktyg som utvecklas för att hantera olika aspekter av taluppfattning. Tidigare artiklar i årgång 22 är upptagna i referenslistan (Reys & Reys, 1995 samt Reys m fl, 1995a, 1995b och 1995c).

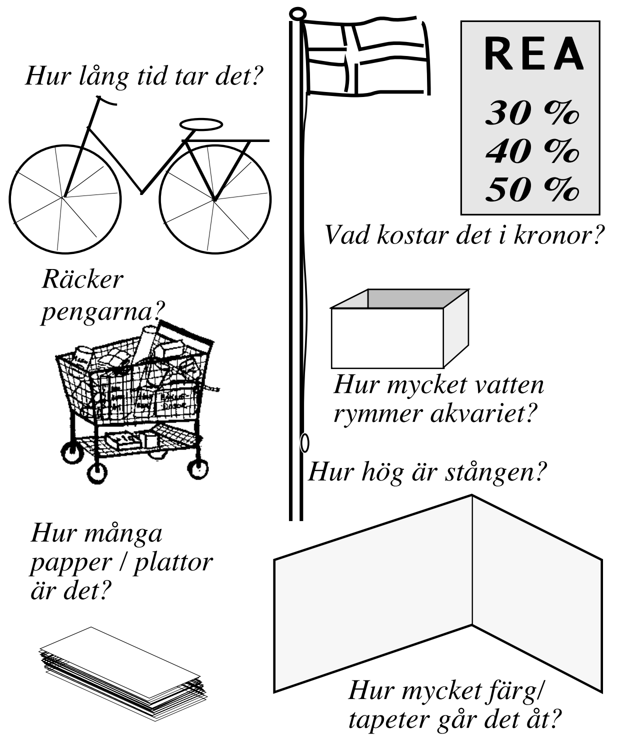
Vad är överslagsräkning?

Överslag är något som vi alla använder många gånger varje dag. Exempel 1 visar några vardagssituationer. Överslagen har många gemensamma drag – de görs i huvudet utan skriftliga räknemetoder och ger resultat som inte är exakta men som ger underlag för beslut som behöver tas.

Överslagräkning kan beskrivas på olika sätt. Här är två sätt som vi hoppas ytterligare klargör vad vi menar. Det är

- en komplex process som innehåller två komponenter:
  – att omforma / transformera exakta tal till tal som enkelt kan hanteras "i huvudet"
  – att göra en beräkning i huvudet med de omformade talen (Sowder, 1987).
- processen att komma fram till en uppskattning / ett ungefärligt svar som lösning på ett problem (Reys, 1985).

Exempel 1 Hur tar man reda på svaren?



Överslag betonas inte i skolan

Redan tidigt grundläggs barns syn på matematik. Det sker ett slags socialisering till rådande uppfattningar av matematikämnet. Studier av klassrumsundervisning och användning av läroböcker i USA och Sverige visar att överslagsräkning inte betonas särskilt mycket (Benton, 1986; Sowder, 1992; Emanuelsson, 1986; Hammaräng, 1988). Det finns arbeten som visar att resultaten med skriftliga räknemetoder är signifikant bättre än resultaten av överslagräkning på samma uppgift! Skriftliga räknemetoder (t ex uppställningar) prioriteras. Lite tid används för undervisning eller för att stimulera eleverna till uppskattningar och överslagsberäkningar (Reys m fl, 1995).

De flesta lärare erkänner styrkan i och betydelsen av att kunna göra överslag, men det visar sig inte alls, eller mycket sällan, i klassrummen. Man skyller på att läroböckerna inte framhäver uppskattning och överslag och att detta leder till att lite tid ägnas

***Barbara Reys** och **Robert Reys** var våren 1995 gästprofessorer vid Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet. Ett samarbete inleddes som redovisats i ett antal artiklar i årgång 22.*

åt ett viktigt moment. Det finns en tradition att satsa på exakta beräkningar och ta upp överslag först när skriftliga metoder introducerats.

Vi tror att utveckling av kunnande i överslag liknar den i problemlösning. Det är en komplex process som kräver kritiskt tänkande och tar tid att utveckla. Överslag ger svar som inte är exakta. Det uppfattas inte alltid som matematik av en del elever och lärare.

När lärare använder matematik i sin vardag görs ett otal överslagsberäkningar. I samband med kurser och studiedagar i Sverige har deltagare skrivit dagbok om sin användning av matematik under en vanlig dag. Dessa visar på ett övertygande sätt hur man använder uppskattningar, överslag, och huvudräkning med hjälp av känsla för och erfarenheter av tal och situationer (Emanuelsson, 1985). Efter en tättskriven A4-sida skriver en lärare:

> *Jag har varit vaken i något mer än 2 timmar och sysslat med matematik i olika tappningar hela tiden. För att inte behöva sända min dagbok som paket så slutar jag här. Jag anade att matematik tog upp en stor del av vardagen, men att den på detta sätt överskuggade allt annat – det hade jag ingen aning om.*
>
> (Nämnaren, 12(1), s 30)

I skolan dominerar traditionen att kräva ”exakt svar” eller ”ett korrekt svar med en viss metod (nästan alltid skriftlig)”. Om undervisningen får slagsida åt det här hållet så får eleverna för sig att detta är det enda acceptabla och användbara sättet att göra beräkningar. Detta motverkar utveckling av strategier för överslag. Det tar tid och krävs stor lärarskicklighet att få bort elevernas fixering på ett och endast ett korrekt sätt eller svar, som kan ha blivit följden av tidigare erfarenheter av beräkningar.

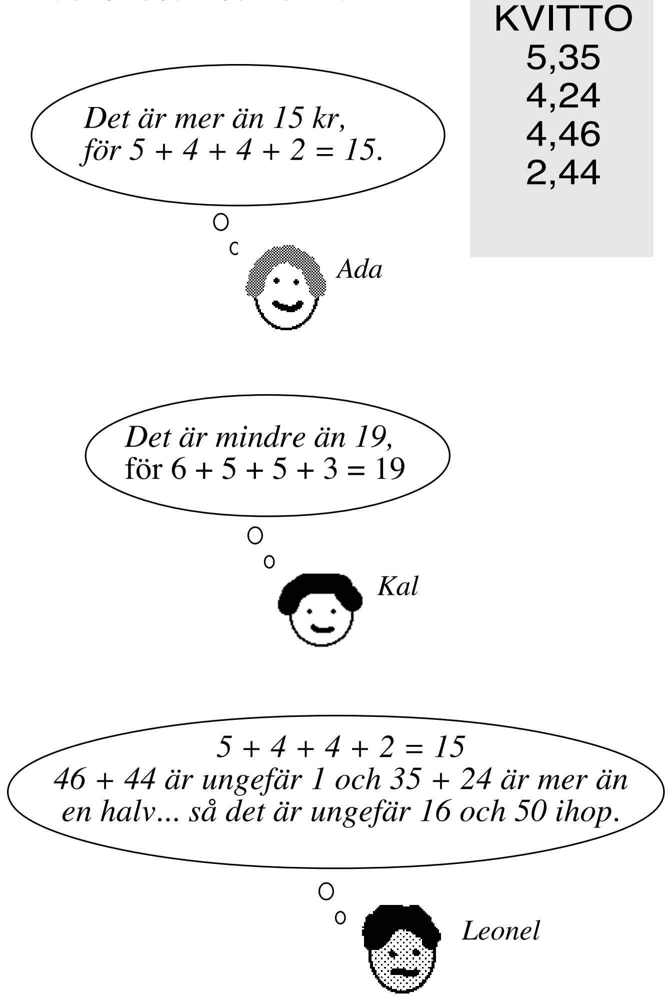
Idéer för utveckling

För att gynna en systematisk utveckling av strategier och känsla för överslag behöver vi vara säkra på att eleverna ser flera möjligheter att utföra beräkningar. Vi måste presentera situationer som stimulerar och utmanar eleverna till överslag och stimulera dem att berätta och dela med sig av olika sätt och strategier som de kommer på.

I exempel 2 avrundar Ada alla priser nedåt. Det ger ett säkert sätt att få en gräns för vad det minst kostar. Kal använder en god, men mycket enkel metod: att runda av alla priser uppåt (rundar av till heltal) och anger vad det kostar som mest. Leonel använder samma grundläggande strategi som Ada men justerar resultatet med tanke på annan känd information. Överslagen ger olika resultat, men alla ger underlag för beslutet att 20 kr räcker för att betala varorna.

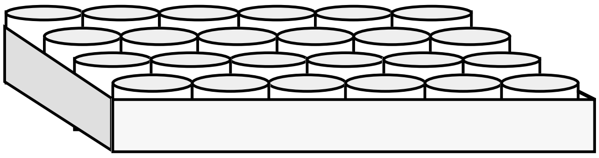
Exempel 2
Olika strategier kan ge samma beslut

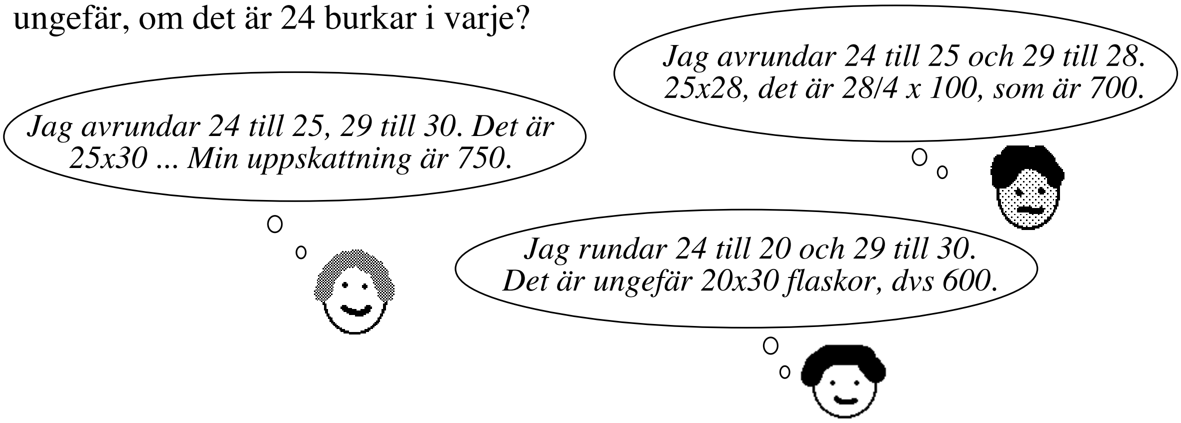
Räcker det med 20 kr?



Exempel 3
Olika strategier ger olika svar

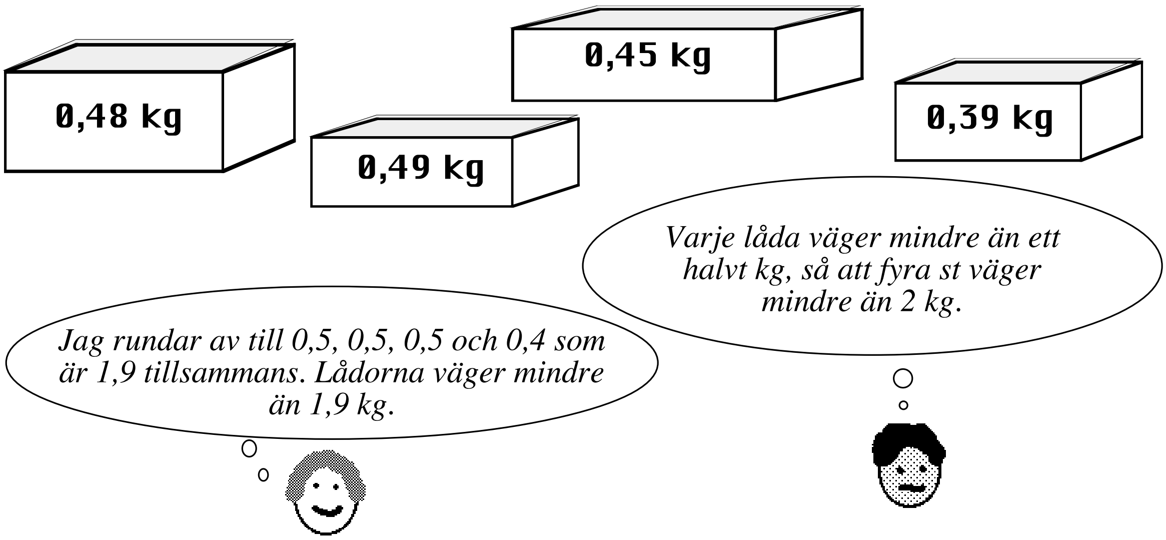
Vi har 29 lådor fulla med glasburkar. Hur många är det sammanlagt, på ett ungefär, om det är 24 burkar i varje?





Exempel 4
Olika strategier som ger samma resultat

Väger lådorna 2 kg tillsammans?



I exempel 3 används skilda strategier och visar olika sätt att tänka på talen 29 och 24 i en situation med multiplikation. Vilka andra sätt kan du komma på? Vilket sätt skulle du använda?

Överslag kräver möjligheter att tänka flexibelt om tal. Tänkande som ger lösningar, där man kan undvika algoritmiska eller tröttsamma beräkningar belönas. De olika angreppssätten ger olika men rimliga resultat.

I exempel 4 ser vi olika metoder. Det är kanske inte så viktigt att bestämma sig för vilken av strategierna som är bäst, men det är viktigt för oss, som lärare, att lyfta fram och diskutera för- och nackdelar med olika strategier – och berätta hur man själv gör eller skulle göra i olika situationer.

Dessa exempel karakteriseras av ett flexibelt sätt att använda olika strategier.

Några undervisningsförslag

Att få elever att utveckla meningsfullt och varaktigt kunnande i överslagsräkning går inte på en lektion eller några lektionspass. Undervisningen bör ta sikte på att fortlöpande i varje årskurs bygga upp nödvändiga förutsättningar inom t ex taluppfattning och huvudräkning. I USA har undervisningsmaterial utvecklats för att stödja utveckling av överslagsräkning, (se t ex Reys & Reys, 1983; Reys, Reys, Trafton & Zawojewski, 1987). I Sverige har området lyfts fram av Johansson, Kilborn & Unenge, (1982), i SÖ:s diagnostiska uppgifter (1988) och i matematiksatsningen av Dunkels, Unenge & Wyndhamn (1989). I Nämnaren har vi haft ett antal artiklar, de senaste i årgång 1995, med konkreta undervisningsförslag, se referenser.

Här följer några råd, som kan vara till ytterligare hjälp:

- Visa eleverna att färdigheter och kunnande i överslagsräkning är viktiga och att du värderar dem högt. Ge eleverna återkommande möjligheter att göra överslag. Visa att du intresserar dig för deras strategier och låt eleverna ta del av varandras sätt att göra överslag. Det innebär naturligtvis också att deras kunnande i överslag ska utvärderas, exempelvis i samband med prov och diagnoser.
- Försök ta död på fixeringen ”det finns bara ***ett*** riktigt svar”. Hjälp eleverna utveckla tolerans för fel och känsla för att olika överslag kan göras i samma uppgift.
- Diskutera acceptabla intervall vid överslag. Uppmärksamma relationer mellan tal och uppskattningar. Storleken på intervall kan sättas efter elevernas mognad, skicklighet och med tanke på den situation där överslaget görs eller ska brukas. Breda intervall i början kan krympas när skickligheten ökar.
- Ge uppgifter som lockar till överslag.
  78 + 83 kan beräknas i huvudet, men
  78 342 + 93 989 lockar till överslag.
- Gör överslag före exakt beräkning. Huvudräkning är det mest naturliga hjälpmedlet och överslag ger en uppskattning, ibland nedåt, ibland uppåt, ibland ungefär.

  Exempel: 47 x 9 är mer än
  40 x 9 och mindre än 50 x 9.

  7 568 · (2 596 + 3 817) är mer än
  7 000 · (2 000 + 3 000) och mindre än
  8 000 · (3 000 + 4 000).

  När eleverna tänker på i vilket intervall som det exakt beräknade svaret kan tänkas ligga så utvecklas känsligheten för orimliga svar, som vi ofta kan se vid enbart skriftliga beräkningar i algoritmer.
- Be inte eleverna *kontrollera* ett gjort överslag med exakt uträkning. Då blir överslag ett mindre viktigt sätt att för formens skull avsluta uppgifter med överslag. Det bör aldrig ske. Alla tidiga aktiviteter bör inriktas på just och enbart överslag. Allteftersom mer sofistikerade metoder och strategier utvecklas bör man genom en snabb överblick kunna avgöra om det beräknade resultatet är rimligt. Men dit kommer man i allmänhet först efter systematiska erfarenheter under en ganska lång tid.
- Uppmuntra eleverna att fundera på vardagshändelser och situationer där uppskattningar och överslag är naturliga och görs mer eller mindre automatiskt. Färdigheter och val av strategier kan ofta förbättras genom att man observerar om man vill ha en undre eller övre gräns. Det är högst... eller minst ..., se exempel 5.
- Läroboken kan användas på olika sätt för att stimulera till överslagsräkning även om uppgifterna inte är direkt avsedda eller skräddarsydda för det. Det stimulerar till diskussioner och reflektioner, se exempel 6.

Referenser

Benton, S. (1986). ”Research on Estimation”. I *Estimation and Mental Computation* (ed. Harold L. Schoen). 1986 Yearbook, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dunkels, A., Unenge, J. & Wyndhamn, J. (1989). Rutinfärdigheter. *Täljaren*. Stockholm: Liber.

Emanuelsson, G. (1985). Varjedagsräkning. *Nämnaren 12(1)*, 30-31.

Emanuelsson, G. (1986). Hur mycket styr läroböckerna? *Nämnaren 13(2/3)*, 85-87.

Hammaräng, J-I. (1988). Matte är att kunna slå över. *Nämnaren 15(3)*, 12-15.

Johansson, B., Kilborn, W. & Unenge, J. (1983). *Överslagsräkning*. Lärarhandlening. Stockholm: Liber.

Reys, B. & Reys, R. (1983). *Guide to Using Estimation Skills and Strategies* (GUESS). Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Exempel 5 Överskatta eller underskatta?

Studera beskrivningarna av följande situationer. Bestäm dig för hur du ska göra överslag för att få en så bra uppskattning som möjligt – som underlag för beslut.

a Familjens bil drar 0,8 liter per mil. Det är mindre än en kvarts tank kvar och det är 10 mil till nästa bensinstation.

b Du har 500 kr att köpa för till en klassutflykt. När du lägger varorna i korgen gör du ett överslag för att inte ha för litet pengar när du ska betala.

c Du är i kanten av en lavaström från en aktiv vulkan. Då lavan rör sig längs bergsidan mot byggnaderna i byn, måste det tas beslut om evakuering.

d Ditt flygplan ska lyfta 14.00. Det tar i allmänhet en timme till flygplatsen.

e Ge exempel på problem som kan lösas med överslag och där det gäller att bestämma sig för en uppskattning som anger minst ... eller högst ... .

Exempel 6 Uppskatta läroboksuppgifter

61

a) 365 – 128	b) 601 – 350	c) 4,00 – 1,25	d) 700 – 225	e) 840 – 839
f) 206 – 143	g) 425 – 189	h) 88 – 19	i) 1200 – 850	j) 975 – 850

62

a) 365	b) 601	c) 4,00	d) 700	e) 840	f) 206	g) 425	h) 88	i) 1200	j) 975
–128	– 350	–1,25	–225	– 839	–143	– 189	–19	–850	–850

Ställ frågor kring uppgifterna i stället för att utföra beräkningarna. Låt halva klassen svara med uppgift 61 som underlag och andra halvan med 62 som underlag. Ser du någon skillnad i elevernas strategier eller resultat?

- Vilka uppgifter är enklast? Vilka är svårast? Berätta varför.
- Vilka av uppgifterna ovan kan du klara av i huvudet? Hur tänker du?
- Om du ska göra tre av dessa uppgifter, innan du tar rast, vilka väljer du? Varför?
- Leta reda på två uppgifter där differensen är mindre än 100.
- Leta reda på två, där differensen är större än 300.
- Vilka ger minst differens? Störst differens? Varför?

Reys, R. (1985). Computational Estimation *Arithmetic Teacher, 32*: 47-51.

Reys, R., Reys, B., Trafton, P. & Zawojewski, J. (1987). *Computational Estimation Series: Grade 6 – Computational Estimation; Grade 7 – Computational Estimation; Grade 8 Computational Estimation*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Reys, B. & Reys, R. (1995). Perspektiv på Number sense och taluppfattning. *Nämnaren 22(1)*, 28-33.

Reys m fl (1995a). Vad är god taluppfattning? *Nämnaren 22(2)*, 23-29.

Reys m fl (1995b). Svenska elevers taluppfattning. *Nämnaren 22(3)*, 34-40.

Reys m fl (1995c). Meningsfulla tal. *Nämnaren 22(4)*, 8-12.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. I *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ed. D. A. Grouws), s 371-389, New York: Macmillan.

Sowder, J. T. & Wheeler, M. M. (1987). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*:130-146.