KÄNGURU SIDAN

I väntan på de nya problemen

Nytt år och ny möjlighet att delta i Kängurutävlingen. Årets officiella tävlingsdag är torsdagen 16 mars, men om den dagen inte passar är det möjligt att genomföra tävlingen 17 mars eller i veckan därefter. Utnyttja tiden fram till dess för att använda tidigare problem i undervisningen.

Jag slutar aldrig att förvånas över dessa fantastiska, inspirerande och utmanande problem och att det varje år går att konstruera nya tävlingar. Inför arbetet med Kängurusidan har jag den här gången bläddrat igenom tidigare uppgifter för att välja några lämpliga. Temat för årets första Kängurusida är primtal eftersom det passar på 2017, men jag har även med några problem som jag återkommande använder i min undervisning.

De flesta problem som behandlar primtal finns på Junior och Student, men de fungerar även för yngre elever. Pröva gärna, och använd problemen för att introducera begreppet. Först ett trevligt problem från förra årets tävling, som passar bra redan i tidigare årskurser.

4. Hur många veckor är 2016 timmar?

Faktorisera 2016 och diskutera hur man utifrån det relativt lätt kan avgöra hur många veckor det är. Talet 2016 är enkelt att arbeta med då det går att halvera flera gånger innan man hamnar på faktorn 63, som eleverna bör känna igen från multiplikationstabellen. Det räcker sedan att dela upp 63 som $7 \cdot 9$ för att finna lösningen, men gå gärna vidare och gör en komplett primtalsfaktorisering.

Börja med att låta eleverna lösa problemet enskilt eller i par och iaktta deras metoder. Här kommer troligen många att börja med att räkna ut hur många timmar en vecka är.

Det finns bara ett jämnt primtal, 2, övriga primtal är udda. Den kunskapen tillsammans med kunskap om pariteten när jämna och udda tal adderas räcker för att lösa detta problem som är hämtat från Junior 2014.

13. Bilden visar en speciell tärning. Adderar man talen på motsatta sidor får man alltid samma summa. Talen som inte syns är primtal. Vilket tal står mittemot 14?

För yngre elever kan det passa att också presentera alternativen för att ha dem som utgångspunkt för resonemanget.

A: 11 B: 13 C: 17 D: 19 E: 23

En följdfråga, för alla, kan vara att bestämma samtliga tal som inte är synliga.

Oavsett vilken lösningsstrategi eleverna använder så är det samma grundkunskaper som behövs i nästa problem, hämtat från Student 2006.

14. Man har tre primtal a, b, c med $a > b > c$. Om $a+b+c=78$ och $a-b-c=40$ så är $abc=$

A: 438 B: 590 C: 1062
D: 1239 E: 2006

Även här är det intressant att se hur eleverna löser problemet. De flesta av mina började med att konstatera att $b+c=19$, och bestämde därefter de tre talen. Min följdfråga var om man direkt kan säga något om något av talen och snabbt kom svaret att ett tal måste vara jämnt.

Nästa problem, från Cadet 2012, innehåller även begreppen delbarhet och större än. Gå gemensamt igenom hur man kan resonera för att komma fram till rätt svar.

12. På ena sidan av fyra kort är talen 2, 5, 7 och 12 skrivna (ett på varje kort). På de motsatta sidorna står påståendena "delbart med 7", "primtal", "udda" och "större än 100" (ett på varje kort). Inget av korten har ett påstående som stämmer med talet på den andra sidan. Vilket tal finns på kortet med påståendet "större än 100"?

    A: 2 B: 5 C: 7 D: 12
    E: Omöjligt att bestämma

På Junior 2016 fanns två problem, efter varandra, där begreppet primtal var involverat. Det första var ett av de svenska bidragen, konstruerat av Leo Rubinstein. För att lösa det är det också bra att veta hur man avgör om ett tal är delbart med 6.

20. I kängururepubliken är varje månad 40 dagar, numrerade från 1 till 40. Helgdagar är dagar med nummer delbara med 6 och dagar vilkas nummer är primtal. Hur många gånger på en månad inträffar det att det är endast en vardag mellan två helgdagar?

    A: 1 B: 2 C: 3 D: 4 E: 5

I det här problemet är det kanske inte så svårt att hitta de tal som är delbara med 6. En lösningsstrategi kan vara att skriva upp alla tal från 1 till 40 och börja med att stryka de som finns i sexans multiplikationstabell. Eftersom $6 = 2 \cdot 3$ så måste talet vara delbart med både 2 och 3. Det innebär att talet ska vara jämnt och att talets siffersumma ska vara delbar med 3.

I nästa uppgift, 21, kan en strategi vara att utnyttja svarsalternativen, systematiskt skriva upp talen och utföra operationerna. Ett annat sätt att angripa problemet är att påbörja en generell lösningsmetod och utifrån den använda svarsalternativen.

Om det minsta talet betecknas n, kan de tre följande talen betecknas $n+1$, $n+2$ och $n+3$. Adderas tre av de fyra talen i alla möjliga kombinationer erhålls summorna $3n+3$, $3n+4$, $3n+5$ och $3n+6$.

Försök att få med alla elever på resonemanget om vilka av dessa summor som skulle kunna vara primtal för några värden på talet n. Sen kan det vara dags att ta fram alternativen och testa dem.

21. Jacob skrev ner fyra konsekutiva (på varandra följande) positiva heltal. Han beräknade sedan de fyra möjliga summor man får då tre av talen adderas. Ingen av dessa summor var ett primtal. Vilket är det minsta tal som Jacob kunde ha skrivit?

    A: 12 B: 10 C: 7 D: 6 E: 3

Vi fortsätter med ett problem som kräver logiskt resonemang, Junior 2015:

18. Vilket av följande är ett motexempel till påståendet: "Om n är ett primtal så är exakt ett av talen $n-2$ och $n+2$ ett primtal" ?

    A: $n = 11$ B: $n = 19$ C: $n = 21$
    D: $n = 29$ E: $n = 37$

I samband med det här problemet kan man behandla Eratosthenes såll och primtalstvillingar. Hur undersöker man om ett tal är primtal? Duktiga elever kan få visa att antal primtal är oändligt och att varje primtal $p > 3$ har formen $6n \pm 1$ för något heltal n.

Det finns vissa primtal som kan skrivas på formen $4n+1$. De kallas *Pythagoreiska primtal* och 2017 är ett sådant primtal. Ett annat kännetecken på Pythagoreiska primtal är att de kan skrivas som summan av två heltalskvadrater. Talet utgör också hypotenusan i en rätvinklig triangel. Det minsta Pythagoreiska primtalet är 5, som kan skrivas som $5 = 1^2 + 2^2$ och 5 är längden på hypotenusan i triangeln med sidorna 3, 4 och 5.

Om man kan definitionen på primtal, kan skriva om uttrycket n^2+n och utifrån detta dra korrekta slutsatser så bör det inte vara svårt att lösa nr 3 på Student 2009.

3. För hur många olika positiva heltal n är talet n^2+n ett primtal?

    A: 0 B: 1 C: 2
    D: ett ändligt antal större än 2
    E: ett oändligt antal

Följande problem från Student 2008 behandlar egenskaper hos potenser av jämna respektive udda tal. Gäller denna egenskap bara för fjärdepotenser av primtal?

7. Hur många primtal p har egenskapen att $p^4 + 1$ också är ett primtal?

   a: inget b: 1 c: 2 d: 3
   e: oändligt många

I samband med sannolikhetsläran i Malc använder jag gärna ett problem från Student 2006:

11. På ett rättvist rouletthjul finns 37 nummer: 0 och de positiva heltalen från 1 till 36. Vilken är sannolikheten att kulan stannar på ett primtal?

    A) 5/18 B) 11/37 C) 11/36
    D) 12/37 E) 1/3

Här måste man förstås också räkna rätt på antal primtal, så att man inte missar något.

Även följande problem från Junior 2015 har jag använt i min undervisning, dock inte för att det handlar om primtal utan om rötter till andragradsekvationer. Elever med kunskap om samband mellan andragradsekvationens rötter och andragradsekvationens koefficienter löser problemet snabbt. Men flertalet elever försöker lösa ekvationen med "pq-formeln" och är inte särskilt framgångsrika.

16. Om de två rötterna till ekvationen $x^2 - 85x + c = 0$ är primtal, vilket värde har då siffersumman av konstanten c?

    A: 12 B: 13 C: 14 D: 15 E: 21

Ett annat intressant problem, hämtat från Student 2010:

16. Varje stjärna i uttrycket:
    $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ ska bytas ut mot antingen "+" eller "·". Låt N vara det största möjliga tal som kan bildas på detta sätt. Vilken är den minsta primtalsfaktorn i N?

    A: 2 B: 3 C: 5 D: 7
    E: något annat tal

Elevernas spontana reaktion är att alla $*$ ska bytas mot multiplikationstecken. Tyvärr får de då fel svar på frågan. Den fortsatta diskussionen med eleverna bör behandla betydelsen av talet 1 i en addition respektive multiplikation. Därefter kan resonemanget fortsätta om vilket av svarsalternativen som kan vara riktigt. Problemet kan avslutas med att eleverna bestämmer minsta primtalsfaktorn.

Det sista problemet på temat primtal är hämtat från Student 2016 och är riktigt svårt.

22. Ann valde ett positivt heltal n och skrev ner summan av alla positiva heltal från 1 till n. Ett primtal p delar summan men inte någon av summans termer. Vilket av följande tal kan vara $n + p$?

    A: 217 B: 221 C: 229 D: 245 E: 269

Här behövs kunskap om hur man räknar ut summan av de n första positiva heltalen. Har inte eleverna träffat på den summan tidigare kan man inleda genom att låta de systematiskt beräkna $1+2, 1+2+3, 1+2+3+4$, osv och se om de kan upptäcka något mönster i svaren. Avsluta med att visa att $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$ antingen geometriskt eller algebraiskt.

Eleverna har ofta svårt att komma vidare i sitt resonemang när de har bestämt uttrycket för summan. Det behövs en del resonemang för att inse att p delar $n+1$ och att $p = n+1$. Det sista steget är att använda svarsalternativen på uttrycket $2p - 1$. Olyckligtvis är det första alternativet korrekt, så börjar man med det och inte räknar fel är problemet löst. En följdfråga kan därför vara: hur inser ni att de andra inte kan vara $n + p$?

Glöm nu inte att anmäla er till Kängurutävlingen och årets problem. Anmälningssidan är öppen: ncm.gu.se/kanguru.

Susanne Gennow