

Att uppleva räta linjer och grafer

– erfarenheter från ett forskningsprojekt

Författarna beskriver en undervisningsform där diskussioner och undersökande arbetssätt utgör en central del. Eleverna får arbeta utforskande och strukturerat för att få en djupare förståelse för vad grafer är och hur dessa kan erfaras och representeras på olika sätt.

Just nu pågår flera satsningar för att förbättra svenska elevers måloppfyllelse och resultat i matematik. Ett av dessa initiativ är ett samarbete mellan Linköpings universitet och Linköpings och Norrköpings kommuner som går under namnet *Matematikdidaktik för bättre matematikkunskaper*. Syftet med samarbetet är att öka elevernas måloppfyllelse i, och intresse för, ämnet matematik genom att utifrån de befintliga undervisningspraktikerna på skolorna kombinera forskning, kompetensutveckling och praktikutveckling. Vi vill dela med oss av våra erfarenheter från ett av delprojekten och illustrera vad som gjorts inom ramen för det.

Sekvenser av modellutvecklande aktiviteter

I det här ettåriga delprojektet deltog en gymnasielärare, en högstadielärare och en forskare. Projektet hade en öppen forskningsansats. Vilket fokus gruppen skulle ha grundades på lärarnas beskrivningar av sin undervisningspraktik och de utmaningar och den utvecklingspotential som lärarna såg i den. Efter diskussion enades gruppen om att försöka hitta och pröva alternativa undervisningsformer till traditionell matematikundervisning som sätter elevernas lust till ämnet och lärande i matematik i centrum. Arbetssättet som valdes innefattade design, implementering och utvärdering av klassrumsaktiviteter.

Vår erfarenhet är att många av de elever som vi möter i skolan har en bild av att matematikstudier oftast handlar om genomgångar och räkning på egen hand i läroboken. Detta behöver inte vara fel i sig, men vi tror att eleverna skulle vinna på mer varierande undervisningsformer där diskussioner och undersökande arbetssätt utgör en central del. Detta är i linje med ämnesplanen för matematik (Gy II), där det bland annat står att *eleverna ska ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematiska kunnande samt att undervisningen ska innehålla varierande arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del*.

Med utgångspunkt i styrdokumenten funderade vi över hur vi skulle få våra elever engagerade och intresserade av ett ämne som många av dem inte prioriterar så högt. Flera av eleverna på exempelvis samhällsvetenskapsprogrammet upplever stress och stundtals panik över ämnet matematik, vilket inte sällan resulterar i att de ger upp innan de ens hunnit försöka lösa en uppgift. Därför var vår utgångspunkt att vi skulle använda oss av aktiviteter där eleverna kan

komma framåt, oavsett aktuell kunskapsnivå, genom att utgå från undersökande aktiviteter där de kunde testa sig fram och på så sätt stegvis utveckla sitt lärande. Det centrala innehåll vi valde att fokusera på var *räta linjens ekvation*. Som stöd för design och metod valde vi att använda så kallade *sekvenser av modellutvecklande aktiviteter* och ett *modell- och modelleringsperspektiv på undervisning och lärande*. Detta har tidigare beskrivits här i Nämnaren, se litteraturrutan sist i artikeln.

Vi har valt att presentera delar av sekvensen av modellutvecklande aktiviteter som designades för gymnasiet, men även erfarenheter från implementeringen av motsvarande sekvens i årskurs 9 ligger till grund för våra reflektioner och slutsatser.

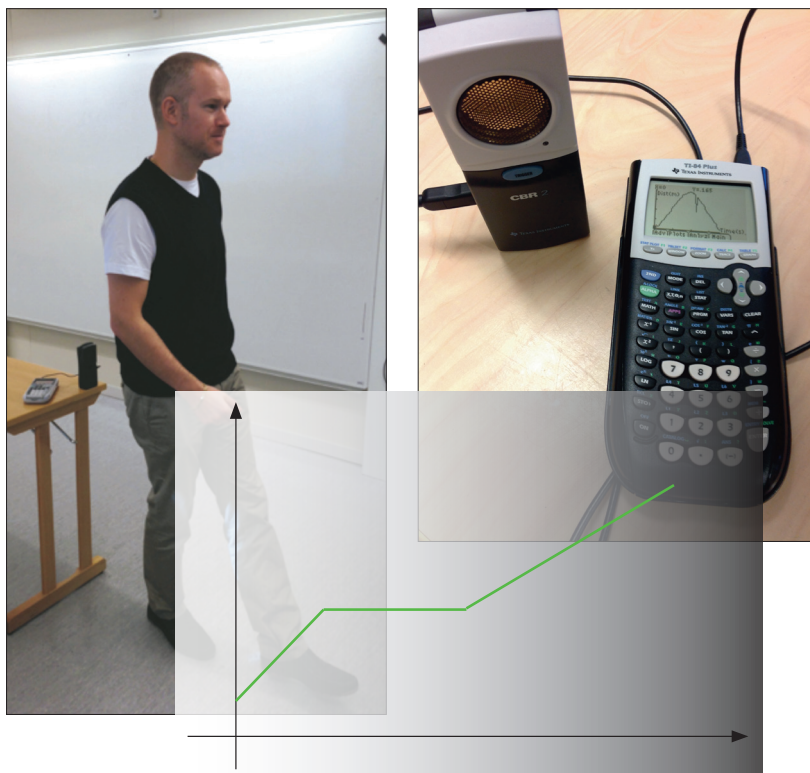
Fyra modellutvecklande aktiviteter

Den sekvens av modellutvecklande aktiviteter som vi designade och implementerade utgjordes av fyra aktiviteter. Syftet var att eleverna genom att arbeta utforskande och strukturerat skulle få en djupare förståelse för vad grafer är och hur dessa kan erfaras och representeras på olika sätt.

Aktivitet 1: Generera grafer – en tankeavslöjande aktivitet

När vi startade området om räta linjens ekvation började vi med en *tankeavslöjande aktivitet* där eleverna fick arbeta med rörelsedetektorer. De detektorer som användes mätte avståndet mellan detektorn och den person eller det objekt som fanns direkt framför detektorn 10 gånger per sekund under 6 sekunder. Genom att koppla en rörelsedetektor till en grafitande miniräknare kunde eleverna direkt få en graf över hur de hade rört sig.

Jonas rörelser registreras här av detektorn som är kopplad till räknaren som i sin tur genererar en graf.



Vi ville börja med en aktivitet som dels engagerade alla elever och som dels visade oss hur mycket eleverna kunde sedan tidigare. När de arbetade med den tankeavslöjande aktiviteten var läraren relativt passiv och cirkulerade i klassrummet för att se var eleverna befann sig kunskapsmässigt och för att identifiera eventuella svårigheter. För eleverna gällde det att i grupper själva upptäcka och undersöka. Vissa elever hade inte tillräckliga förkunskaper av de ingående begreppen. Några elever hade svårt att förstå skillnaden mellan *negativ* och *mindre negativ lutning*, vilket ledde till diskussioner.

I den tankeavslöjande aktiviteten fick eleverna konstruera olika grafer utifrån skriftliga beskrivningar, se nedan, med hjälp av en rörelsedetektor och en grafritande miniräknare. Elevernas skulle också diskutera hur de skulle röra sig för att skapa de olika graferna och skissa dem samt skriva ner två koordinater från respektive linje. De senare användes under en efterföljande lektion för att bestämma linjens ekvation.

Hur ska vi gå för att generera en given graf?

- Skapa en linje med en positiv lutning.
- Skapa en linje med en brantare positiv lutning.
- Skapa en linje med en negativ lutning.
- Skapa en linje med en mindre negativ lutning.
- Skapa en horisontell linje.

Hur skapar ni en graf som går genom origo?

Hur skapar ni en graf som inte startar från origo?

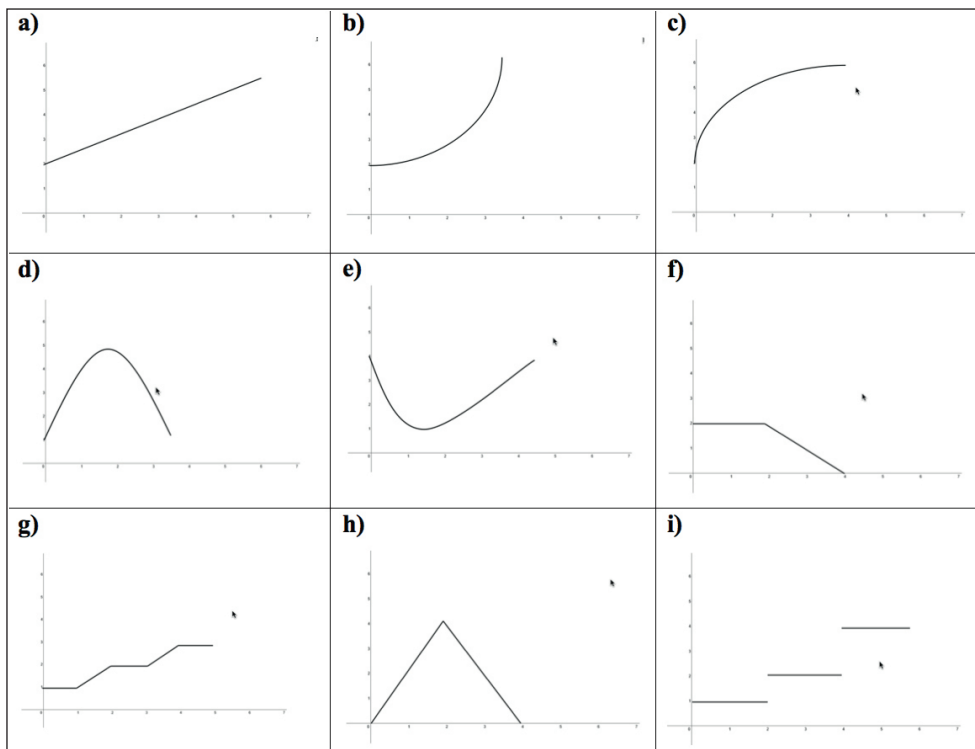
Idén med den tankeavslöjande aktiviteten var att

- ♦ ge eleverna möjlighet att upptäcka att grafernas utseende påverkades av deras egna rörelser
- ♦ koordinera erfarenheter av sina egna rörelser och uttrycka rörelserna i ord
- ♦ se samband mellan rörelse och den grafiska representationen.

Aktivitet 2: Tolka och beskriva – en modellutforskande aktivitet

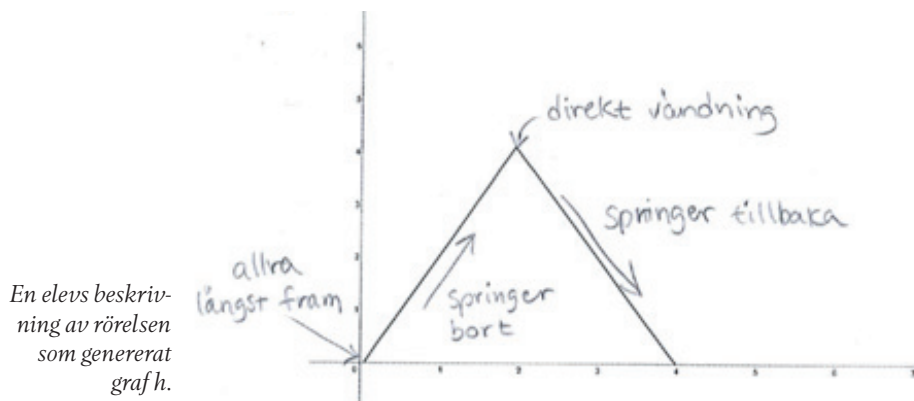
När eleverna hade skapat grafer genom att gå i olika hastigheter och riktningar i förhållande till rörelsedetektorn fick de i uppgift att skriftligt beskriva på förhand uppritade grafer. *Hur har personen rört sig för att skapa följande grafer?* Elevernas beskrivningar skulle innehålla information om tid, position och hastighet.





Graferna som eleverna fick i uppgift att beskriva i termer av hur rörelsen såg ut som genererat dem.

I beskrivningarna använde eleverna många olika vardagliga ord och begrepp för att koppla samman de grafiska representationerna med fysiska rörelsemönster. En elev beskrev rörelsen bakom graf a som: *Personen har börjat gå 2 meter från mätaren och stannat 5,5 meter från mätaren. Personen har rört sig 3,5 meter från ursprungspositionen under loppet av 6 sekunder. Hastigheten är konstant.* En annan elev skrev om graf e att *personen går i hög hastighet mot rörelsedetektorn. När det är 1 m kvar vänder han och går tillbaka från rörelsedetektorn i lägre tempo.* En viktig del av att utveckla och koppla ihop de olika begreppen och representationsformerna är att få ett mer formaliserat språkbruk. Här fungerar elevernas egna formuleringar med inslag av vardagliga uttryck som en central utgångspunkt att bygga vidare på för att stötta elevernas lärande.



Några elever var noga med att komplettera graferna genom att namnge koordinataxlarna och andra använde sig av graferna för att stödja sina beskrivningar.

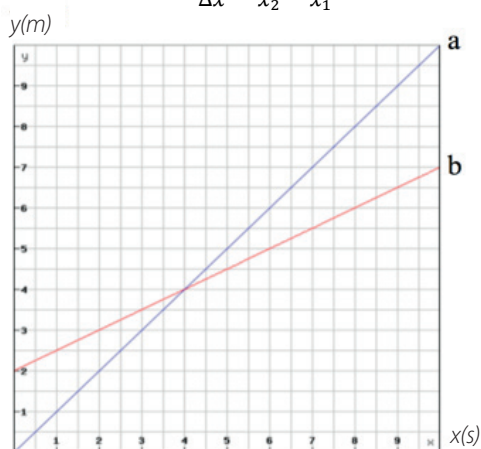
Elevernas beskrivning av vad som händer i graf h vid $t=2s$, "direkt vändning", inbjuder till diskussion om vad som är fysiskt möjligt jämfört med vad den idealiserade grafiska representationen faktiskt visar.

Grafen i gjorde till en början eleverna konfunderade eftersom denna rörelse inte kan återskapas av en person som ensam rör sig framför detektorn. Men, efter lite funderande fann eleverna på råd! En grupp förslog följande: *Något står stilla vid 1 meter från mätaren. Objektet flyttas bort från detektorns mätområde och mätaren känner så av nästa objekt som står stilla ca 2 meter från mätaren. Objektet 2 meter ifrån detektorn flyttas undan och mätaren känner då av nästa objekt lite mer än 4 meter från mätaren.*

Aktivitet 3: Att tolka och teckna en ekvation – en modellutforskande aktivitet

Efter de två inledande aktiviteterna var det dags för eleverna att utifrån en given graf teckna en ekvation som beskrev en persons rörelse. Först fick eleverna en given graf med ledande frågor. Målet var att de själva skulle komma fram till hur man räknar fram k -värdet med hjälp av två koordinater:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Tänk tillbaka på föregående uppgifter med rörelsedetektorn. Följande grafer är ritade enligt liknande rörelser. Ge en förklaring till vad graferna beskriver. Den blå grafen beskriver person a:s rörelser. Den röda grafen beskriver person b:s rörelser.

- Hur långt från rörelsedetektorn befinner sig personerna efter 6 sekunder?
- Startar personerna vid samma ställe?
- Vem har gått längst efter 4 sekunder?
- Vilken hastighet förflyttar sig person a med?
- Vilken hastighet förflyttar sig person b med?
- Skriv upp en ekvation på formen $y=kx+m$ som beskriver respektive graf.

Eleverna kunde relativt lätt besvara frågorna efter de inledande aktiviteterna. De kunde enkelt läsa av graferna och hur långt personerna a och b hade gått under ett visst tidsintervall, varpå de räknade ut hastigheten för varje person. Några elever missade på c-uppgiften där de utan att reflektera svarade att personerna hade gått lika långt, trots att de på den föregående frågan svarat korrekt att de två personerna inte startar från samma position. Vid en närmare titt och eftertanke insåg eleverna dock sitt misstag och kunde rätta till sitt svar.

Aktivitet 4: Bestämma en ekvation från egen data – en modell-tillämpande aktivitet

I den sista aktiviteten i sekvensen fick eleverna gå tillbaka till det datamaterial som de hade samlat in i den tankeavslöjande aktiviteten. Från sina erfarenheter av de tidigare aktiviteterna hade de nu kommit fram till formeln

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Utifrån detta kunde de bestämma linjens ekvation på formen $y = kx + m$ och därmed uttrycka sina egna rörelser med hjälp av algebra. Några grupper hade dock skrivit ner fler punkter från samma linjer och blev konfunderade över varför de fick olika k -värden när de räknade med de olika punkterna. Detta ledde till intressanta diskussioner om att deras genererade grafer inte är idealiserade och exakta utan verkliga data. För några elevgrupper var frågan om hur de skulle beräkna m -värdet mer bekymmersam än att beräkna k -värdet. Speciellt var det några grupper som när de räknade ut m -värdet för sina rörelse fick negativa m -värden. Vad detta betydde och hur det kunde komma sig ledde också till en givande diskussion.

Erfarenheter av delpjektet

Rörelsedetektorer och teknik bringar fram nyfikenheten och viljan att lära sig hur det fungerar.

Ovanstående elevcitat är talande för hur eleverna upplevde arbetet med de aktiviteter som vi implementerade. Uppgifterna lockade fram en nyfikenhet som vi ofta ser hos yngre elever, men som ibland kan vara svårt att locka fram hos äldre elever. Rörelsedetektorerna skapade en vilja att förstå och kunna beskriva vad som hände. Aktiviteterna skapade ett behov av att kunna uttrycka en rörelse med hjälp av ett matematiskt språk och eleverna tvingades att växla mellan de olika representationsformerna ord, tabell, graf och ekvation. Detta bidrog till att många av eleverna såg vilka fördelar det finns med att kunna uttrycka händelser och skeenden med ett matematiskt språk. Att eleverna själva fick komma fram till detta tror vi ledde till ett ökat självförtroende och en djupare förståelse jämfört med en mer traditionell undervisning.

Eleverna kommer till våra matematiklektioner med olika erfarenheter från tidigare matematikstudier och flera av dem är vana vid att ha boken som ram för undervisningen. För dessa elever kan det ta tid att förstå de fördelar som det här arbetssättet medför. Några elever skriver i utvärderingen om arbetssättet:

Mindre bra, eftersom vi inte arbetat i boken.

Jag har haft svårt att få grepp om olika principer då vi inte jobbat lika mycket med boken.

Jag skulle velat ha en ordentlig genomgång innan så man varit mer förberedd.

Elevernas vana att få metoder och teorier serverade för att därefter lära sig procedurerna mekaniskt hellre än ges chansen att försöka förstå vad de egentligen gör och varför, är något vi måste komma ifrån i så stor utsträckning som möjligt så att eleverna lär mer för livet än för stunden. I stort sett alla elever har dock varit positiva och i utvärderingen skrev två elever:

Mindre genomgångar på tavlan och mindre jobb i boken har varit skönt, men också lagt på oss ett eget ansvar att plugga rätt. Rörelsedetektorerna var bra, eftersom man förstod hur det fungerade från första början. Det är bra att vi har haft variation i vår undervisning.

Som den första eleven antyder är arbetssättet med sekvenser av modellutvecklande aktiviteter en form där eleven tvingas att ta ett större ansvar för sitt och de övriga gruppmedlemmarnas lärande. Det krävs reflektion, diskussion och gemensamma lösningar vilket ibland kan uppfattas som tidskrävande, men som vi tror att eleverna tjänar på i längden.

En fördel med att inte ha tillrättalagda uppgifter, exempelvis kopplade till elevernas egna datamaterial, är att frågor väcks som annars kanske inte uppkommer. Ett exempel på en sådan fråga från sekvensen som diskuterats ovan är gruppen som ifrågasatte: *Hur kommer det sig att vi får ett negativt m-värde?* Här trodde eleverna att de hade gjort fel, men vid närmare eftertanke insåg de att datamaterialet och uträkningarna var korrekta eftersom de startat rörelsedetektorn innan de började gå. På detta sätt tror vi att eleverna får en djupare och mer meningsfull förståelse för kopplingen mellan rörelse, graf, tabell med datamaterial och ekvation.

Avslutande kommentar

Detta projekt har ökat vår tro på vikten av att använda undersökande uppgifter i matematikundervisningen. Tankeavslöjande aktiviteter ger oss lärare en tydligare bild av var de olika eleverna befinner sig kunskapsmässigt och därmed kan vi lättare stötta varje elev utifrån deras egna behov. Under aktiviteterna i sekvenserna av modellutvecklande aktiviteter på både gymnasiet och i årskurs 9 visade eleverna stor entusiasm, engagemang och intresse för att undersöka hur man kan uttrycka, i det här fallet, rörelse med hjälp av matematik. Nyfikenheten gjorde att eleverna så småningom på egen hand kom fram till hur de skulle förklara graferna både i mer vardagliga ordalag och med hjälp av räta linjens ekvation. Detta resulterade i en ökad tilltro till deras egna förmågor då de kom fram till sina resultat på egen hand istället för att ha fått det serverat av en lärare.

Eftersom arbetssättet både avviker från mer traditionell undervisning och kan vara tidskrävande kan vissa elever uppleva en viss frustration. Vi upplever ändå att det är viktigt att man som lärare är positiv men inte ger efter, utan stöttar och låter dessa elever vara lite frustrerade. Vår erfarenhet är att eleverna själva genom logiskt tänkande och gemensam reflektion i slutänden trots allt insåg fördelarna med arbetssättet. Vi är övertygade om att sekvenser med modellutvecklande aktiviteter både ökar elevernas möjligheter till att lära och befästa kunskaper, och gör undervisningen mer engagerande, intressant och lustfylld för alla inblandade.

*”...utan stöttar
och låter dessa
elever vara lite
frustrerade*

LITTERATUR

- Bergman Årleback, J. (2014). Ett modell- och modelleringsperspektiv på lärande och undervisning. *Nämnamn* 2014:4.
- Johnsson, K. & Bergman Årleback, J. (2014). Godissugen! En tankeavslöjande aktivitet för att introducera funktioner. *Nämnamn* 2014:4.