

Godissugen!

En tankeavslöjande aktivitet för att introducera området funktioner

I den här artikeln diskuteras en aktivitet som introducerar funktioner i åk 8 genom att utmana eleverna att skapa mening av sådant de redan kan. Läraren arbetar med så kallade tankeavslöjande aktiviteter för att utmana elever på olika nivåer inom ramen för en och samma aktivitet.

Spridningen är vanligtvis stor i en klass när det gäller vad elever tycker om, deras intresse för och kunskaper i matematik. En viktig del i lärares vardag handlar om att tackla och balansera denna variation så att de kan skapa en lärandemiljö med aktiviteter som blir så produktiva som möjligt. I detta ligger bland annat att de problem och aktiviteter som lärare ger eleverna ska engagera och utmana alla, oavsett var de befinner sig kunskapsmässigt. Just detta, hur lärare kan ge samtliga elever i en klass utmaningar, är det fokus som ett av delprojekten inom samarbetsprojektet *Matematikdidaktik för bättre matematikkunskaper* mellan Linköpings universitet och Linköpings och Norrköpings kommuner har haft. Projektet är ett kombinerat forsknings-, kompetensutvecklings- och praktikutvecklingsprojekt, som tar lärares egen undervisningspraktik och frågeställningar som utgångspunkt. Som metod används cykler av design, implementation, utvärdering och reflektion av undervisningsaktiviteter och undervisningspraktiker.

Vi berättar här om våra erfarenheter från ett alternativt arbetssätt att introducera funktioner i årskurs 8. Funktioner och olika representationer av funktioner är sådant som elever har arbetat mer eller mindre medvetet med under hela sin skoltid. Med andra ord har eleverna i årskurs 8 redan idéer om vad exempelvis grafer och tabeller är, hur de hänger samman, samt hur och varför de kan användas på olika sätt. Istället för att mer systematiskt gå igenom de olika sätten att representera funktioner, i detta fall linjära funktioner, ville vi utmana eleverna att använda sina tidigare erfarenheter för att försöka upptäcka och se sambanden mellan tabeller, grafer och diagram genom ett mer utforskande arbete.

Modeller och tankeavslöjande aktiviteter

Som inramning av vårt arbete har vi använt ett modell- och modelleringsperspektiv på undervisning och lärande. Vi tänker oss att elever använder och utvecklar *modeller* för att skapa mening och förståelse när de arbetar med problem och aktiviteter i klassrummet. Det är när eleverna förfinar och

utvecklar sitt sätt att tänka, sina modeller, som de lär sig. Lärande är med andra ord modellutveckling. Utifrån detta perspektiv på lärande och undervisning är det centralt att utgå ifrån elevernas egna tankar och föreställningar. Det vill vi göra för att utmana eleverna. Valet att använda tankeavslöjande aktiviteter för att hitta utmaningar åt alla elever tycker vi passar av flera anledningar:

- ◊ Tankeavslöjande aktiviteter ska bygga på de erfarenheter och idéer eleverna redan har med sig eller som skapas i undervisningssituationen.
- ◊ Eleverna sätts i en situation där de ombeds att skapa mening av olika matematiska representationer och sambanden mellan dem.
- ◊ Grupparbete är en arbetsform där diskussion och kommunikation är viktiga inslag.
- ◊ Eleverna får arbeta med meningsfulla beskrivningar och förklaringar i ett för dem relevant sammanhang.

Det finns sex dokumenterade designprinciper som stöd för att konstruera eller leta reda på lämpliga problem som potentiellt kan fungera som tankeavslöjande aktiviteter. De sex designprinciperna är *den modellgenererande principen*, *den meningsfulla (realistiska) principen*, *den självvärderande principen*, *dokumentationsprincipen*, *dela-med-sig* och *generaliserbara principen*, *minimalitetsprincipen*. Vi designade den tankeavslöjande aktiviteten *Godissugen!* mot bakgrund av detta. Speciellt strävade vi efter att följa fyra av principerna:

- ◊ *Den modellgenererande principen* syftar till att sätta de strukturella (matematiska) aspekterna i den givna aktiviteten i fokus och att eleverna inser att de behöver konstruera, modifiera, förfina eller vidareutveckla en modell för att skapa mening och tolka det som är givet i situationen. I *Godissugen!* ska eleverna utveckla och koordinera sin förståelse av representationsformerna tabell och graf då de arbetar med linjära samband.
- ◊ *Den meningsfulla principen* trycker på att aktiviteten ska vara meningsfull för eleverna och uppmuntra dem att bygga på sina tidigare erfarenheter och kunskaper. Denna princip är grunden till att vi valt att göra *Godissugen!* till en utforskande aktivitet istället för att mer traditionellt introducera grafer och tabeller separat.
- ◊ *Den dela-med-sig och generaliserbara principen* strävar dels efter att de modeller eleverna utvecklar ska gå att delas med, förstås och användas av andra och dels att aktiviteten måste leda någonstans ämnesmässigt. I genomförandet av aktiviteten har vi därför valt att låta eleverna växla mellan att arbeta enskilt, diskutera i par eller mindre grupper och diskussioner i helklass. Aktivitetens ämnesmässiga fokus är att utveckla, förfina och koordinera representationer i samband med linjära samband.
- ◊ *Dokumentationsprincipen* syftar till att explicit synliggöra hur eleverna arbetar och tänker kring situationen i aktiviteten, så att den kan diskuteras och utvecklas. För att underlätta dokumentationen av sitt arbete fick eleverna en instruktion med tydliga frågor och diagram. Det fanns även plats för att skriva svar och göra anteckningar.

De fyra principer som vi har försökt följa är inte oberoende och frikoppade från varandra. Tillsammans bidrar de till att göra elevernas befintliga

erfarenheter och kunskap till utgångspunkt för aktiviteten. De synliggör elevernas idéer och tankar (modeller), så att de sedan genom att konfronteras med andra elevers modeller kan förfina och utveckla sina sätt att tänka.

Godissugen! i klassrummet

När läraren hade startat lektionen och introducerat aktiviteten började eleverna arbeta enskilt med den första delen av aktiviteten. Mer eller mindre omgående började eleverna spontant diskutera med varandra, i par och mindre grupper så som de satt i klassrummet, om vilken affär som gav mest godis för pengarna. Läraren höll sig i bakgrunden och gick runt och lyssnade på elevernas samtal, dels för att se så alla kom igång med aktiviteten och dels för att höra elevernas resonemang.

Första delen
av aktiviteten
Godissugen!

Godissugen!

Det är lördag och du funderar på vilken av affärerna A, B eller C som du ska välja för att få så mycket godis som möjligt för 25 kronor. Motivera ditt svar genom att jämföra samtliga affärer.

Affär A

Du betalar 10 kronor för en påse som innehåller 32 godisbitar.

Affär B

Antal godisbitar (stycken)	Pris (kronor)
5	15
10	
15	

Affär C

Eleverna skulle i så stor utsträckning som möjligt pröva och experimentera fram sätt och strategier att angripa problemet. När läraren märkte att några elever körde fast gav denne små tips, till exempel: *Försök fylla i tabellen för affär B. Hur det skulle se ut om man prickade in tabellvärdena för affär B i diagrammet som illustrerar affär C? Hur skulle affär A "se ut" i diagrammet för affär C?* När de flesta hade bestämt sig för en affär att handla i ställdes en fråga för att fokusera och samla ihop klassen: *Hur skulle graferna se ut för affär A och affär B om du ritade in dem i samma diagram som affär C?*

När alla elever hade bestämt sig för vilken affär de tyckte gav mest godis för pengarna valde läraren, baserat på sina observationer i klassrummet, ut några elever att redovisa sin lösning muntligt inför hela klassen. Eleverna fick visa, motivera och förklara vilken metod de använt för att lösa problemet. Därefter diskuterade och visade läraren, med inspel från eleverna, hur de olika graferna såg ut om de ritades in i samma diagram. Diskussionen fortsatte sedan i mindre grupper där eleverna fick i uppgift att fundera på och förklara:

- ◇ Vilken användning har man av grafer och tabeller?
- ◇ Vilka likheter och skillnader finns mellan de tre affärerna?
- ◇ Vad mer än priset kan påverka var man väljer att handla sitt godis?

Bland elevernas svar kan man bland annat se en tendens att de såg grafer som lämpliga att använda när man ska jämföra saker (*När man vill jämföra någonting, priser. Man kan se skillnaden mellan olika priser*) eller illustrerar hur något utvecklas över tid (*När man vill visa något med en tidslinje*). Tabeller å andra sidan framhöll eleverna som bra redovisningsverktyg för sammanställningar av olika slag (*I ex tävlingsresultat i en tävling. Redovisa sina resultat. Tävlingsresultat, längd, vikt, storlekar, ålder, kön, åsikter*). En tolkning är att eleverna såg grafer som aktiverande och något som används i själva lösningsprocessen när man löser ett problem. Tabeller var mer passiva i den meningen att de används för att presentera redan konkluderade fakta och lösningar.

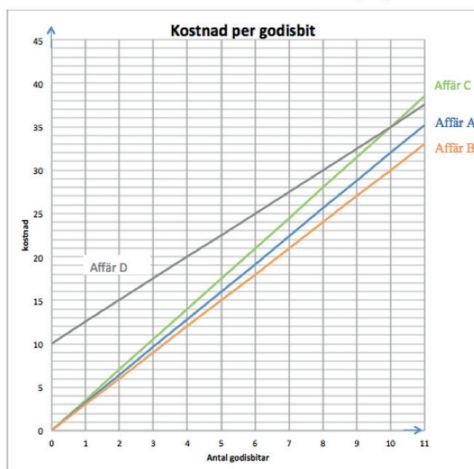
De likheter och skillnader mellan affärerna som eleverna lyfte fram rörde sig mest om direkta observationer som *alla säljer godis, priserna ökar med antalet godisbitar man köper, alla har olika priser*. Godisutbudet i de olika affärerna, både variation och kvalitet, samt affärens geografiska läge var faktorer eleverna identifierade som en påverkan på var man väljer att köpa sitt godis.

När eleverna jämfört sina svar och diskuterat en stund introducerade läraren andra delen av aktiviteten.

Andra delen
av aktiviteten.

Ny "Affär D" öppnar!

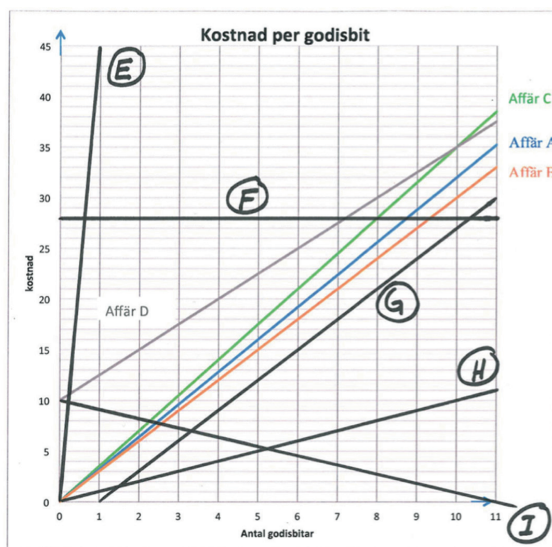
Affär A, B och C har du tidigare stött på men nu har det öppnat en ny affär D. Vad är det som är speciellt för denna affär? Kommer den att konkurrera med de övriga affärerna som redan finns?



Kan du rita in en egen graf som skulle kunna motsvara ytterligare en affär? Förklara med ord affärens pris.

När eleverna arbetade med den första frågeställningen i del två, *Kommer den att konkurrera med de övriga affärerna som redan finns?* konstaterade eleverna att *det beror på hur mycket man köper*. Många resonerade att affär D inte skulle konkurrera med de andra affärerna om man, som i den första delen av aktiviteten, bara handlade för 25 kr. Om man däremot skulle köpa godis för en större summa pengar, så var affär D att föredra. *Nej, för den är dyrare än dom andra. Men den är billigare desto mer man handlar*. Att grafen för affär D skär y-axeln i $y=10$ tolkade en del elever som att man får betala 10 kr för inträde eller att man betalar för asken eller påsen som man plockar godiset i: *Det är säkert någon fin chokladbutik där chokladasken kostar. Därför skulle det komma folk, för att den är fin alltså*.

Elevernas
egna affärer.



När eleverna blev ombedda att rita in grafer för hur prissättningen kan se ut i andra affärer fick eleverna utlopp för sin kreativitet. Många elever ritade in flera olika affärer och vanligast förekommande var affärer där priset var proportionellt mot antalet godisbitar som inhandlades, så som exempelvis illustreras av affär H: *Varje godisbit kostar 1 krona styck*. En elev ritade och skrev *I den här butiken säljer man bara jättestora godisbitar* (affär E) som förklaring för varför grafen hade en så brant lutning. Affär G beskrev en annan elev som *Jag har gjort en billigare affär – där får man en godis gratis* som tolkning av att grafen skär x -axeln i $x=1$. Dock är affär G bara den billigaste affären, jämfört med affärerna A–D, om man begränsar sitt inköp av antalet godisbitar till exempelvis elva stycken som diagrammet visar. En del elever förlängde graferna utanför koordinatsystemet. De såg, markerade och påpekade att om man köper tillräckligt mycket godis så är affär D den billigaste. Även affär med prissättning med negativ lutning förekom: *Priset sjunker, efter 11 kr blir godiset gratis* och en affär med enhetspris: *Ta så mycket du vill för 28 kr :-)*

Dessa exempel visar elevernas kreativitet och goda förmåga att tolka linjära samband ($y=kx+m$) med såväl positiv ($k>0$) och negativ ($k<0$) lutning som lutningen noll ($k=0$) i den givna kontexten.

Vad eleverna lär sig

Det är inte ovanligt att eleverna i vanliga läromedel först jobbar med hur man gör tabeller för att representera funktioner, för att sedan lära sig att pricka in koordinater i ett diagram och rita grafer. I *Godissugen!* resonerar sig eleverna fram till en affär genom att jobba med att skapa mening och koordinera samband mellan tabeller, diagram och grafer. Elevernas idéer och kunskaper respekteras och deras initiala förståelse och modeller prövas mot klasskamraternas modeller. Eftersom alla elever arbetar med samma problem, bjuder aktiviteten in till samarbete och diskussion. På så sätt anpassar och förfinar eleverna sina sätt att tänka (sina modeller). De ser samtidigt fördelarna med att använda matematiska begrepp och uttrycksformer.

Aktiviteten är utformad så att elevens kunskaper, förståelse av olika begrepp och hur begreppen används, kommer till uttryck i diskussionerna mellan eleverna samt synliggörs för såväl eleverna själva som för läraren. Läraren får på så sätt möjlighet att fånga upp och lyfta elevernas kreativa idéer, förklaringar och resonemang kring sina lösningar, men även eventuella missuppfattningar. Aktiviteten utmanar alla eftersom den går att angripa och lösa med olika metoder.

Något vi fann intressant, och som förvånades oss lite, var hur mycket eleverna kunde och ville när de engagerade sig i aktiviteten. I den sista delen av aktiviteten konstruerade eleverna många olika lösningar och förklaringar – många fler än vad vi lärare hade förutsett. Eftersom det inte finns ett korrekt svar och eleverna ritade så olika grafer, ville nästan alla gå fram till tavlan för att visa och förklara sitt svar. Detta i sin tur resulterade bland annat i att eleverna bad om att få namn på vissa begrepp, t ex origo och skärningspunkt, för att lättare kunna förklara för varandra. De ville uttrycka sig matematiskt korrekt!

Aktiviteten tog ca 60 minuter att genomföra i helklass och vår bedömning är att såväl elever som lärare har fått med sig en hel del när de ska börja arbeta med området funktioner. Arbetet med tankeavslöjande aktiviteter har medfört att vi och våra elever kommunicerar mer under lektionerna och vår upplevelse är att matematiken både blir och upplevs som mer meningsfull av eleverna. Genom att utmana eleverna där de befinner sig kunskapsmässigt är det lättare att motivera till nya utmaningar.

”Aktiviteten utmanar alla eftersom den går att angripa och lösa med olika metoder.

LITTERATUR

- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (red). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. A. m fl. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh, *Handbook of research design in mathematics and science education* (591–645). Mahwah, NJ; London: L. Erlbaum.
- Ärlebäck, J. B. (2013) Matematiska modeller och modellering – vad är det? *Nämnan* 2013:3. NCM, Göteborgs universitet.
- Ärlebäck, J. B. (2014) Ett modell- och modelleringsperspektiv på lärande och undervisning. *Nämnan* 2014:4. NCM, Göteborgs universitet.