

Ett modell- och modelleringsperspektiv på lärande och undervisning

I denna artikel diskuterar och exemplifierar författaren tankeavslöjande aktiviteter som stöttar elever att utveckla och förfinas sin förståelse av matematiska modeller. Ett modell- och modelleringsperspektiv används också i ett försök att fånga och beskriva kritiska aspekter av lärande och undervisning.

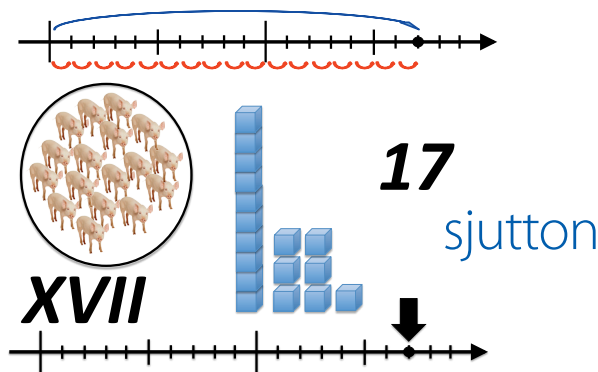
Ett modell- och modelleringsperspektiv på lärande och undervisning i matematik är ett forskningsparadigm och ett sätt att tänka om matematik som kunskapsområde, skolämne och undervisningspraktik. I botten finns grundläggande antaganden som bland annat utgår från att undervisning och lärande är komplexa företeelser som äger rum i en miljö som ständigt förändras. Som en del av att försöka strukturera och tackla denna komplexitet används en generell definition av begreppet *modell* för att fånga centrala och kritiska aspekter av lärande och undervisning från elevers, lärares och forskares perspektiv. Utgångspunkten är att elever redan har eller utvecklar modeller av de matematiska begrepp, strategier och procedurer som de lär sig. Lärare i sin tur har och utvecklar modeller av de modeller eleverna har och hur dessa utvecklas. De har även modeller av hur undervisningen ska eller borde bedrivas för att stötta eleverna att på ett produktivt sätt uppnå lärandemålen. Det som forskare i sin tur gör är att utveckla modeller för att förstå såväl lärarnas som elevernas modeller, samt hur dessa samverkar och relaterar till varandra. Ibland beskrivs detta forskningsparadigm som *multi-nästlat* just för att det försöker fånga och förstå vad som händer på olika nivåer (elever, lärare, forskare) och hur dessa påverkar och samverkar med varandra.

Vad är en modell?

Ordet modell kan både i vardagen och i mer vetenskapliga sammanhang ges en mängd varierande innebörder och tolkningar. En diskussion om detta fördes i artikeln *Matematiska modeller och modellering – vad är det?* i Nämnaren 2013:3. Från ett modell- och modelleringsperspektiv kan begreppet modell beskrivas som de glasögon genom vilka en individ ser och skapar mening av erfarenheter och upplevelser i en given situation. En modell är ett generellt system som består av *objekt*, *relationer* mellan objekt, *operationer* på objekt och *regler eller principer för interaktion* mellan objekt. Alla komponenter av en modell ska även kunna uttryckas med ett eller flera *externa representationssystem*. Syftet med en modell är att använda den för att konstruera, beskriva eller

förklara funktionaliteten eller uppförandet av andra system. Med denna innebörd av begreppet modell menar man med en matematisk modell en modell som fokuserar på de "rent" strukturella aspekterna, jämfört med exempelvis de fysikaliska, affektiva och musikaliska aspekterna av den aktuella modellen och representationerna av denna.

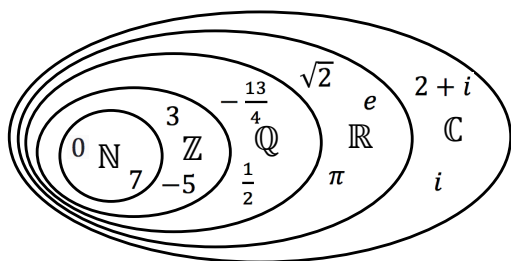
Ett exempel på en matematisk modell är de *naturliga talen*, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. *Objekten* i denna modell är idén bakom talen som vi vanligen noterar 0, 1, 2, 3, ... *Relationer* mellan dessa objekt är exempelvis ordningsrelationerna $<$, $>$ och $=$ då det givet två godtyckliga naturliga tal a och b gäller precis en av relationerna $a < b$, $a > b$ eller $a = b$. Exempel på väldefinierade *operationer* på de naturliga talen är addition (+) och multiplikation ($\cdot$), där summan ($a + b$) respektive produkten ($a \cdot b$) av två godtyckliga naturliga tal a och b också är naturliga tal. Heltalen kan *representeras externt* på en mängd olika sätt och några av dess illustreras i följande figur.



Olika representationer för det naturliga talet "sjutton".

En sådan allmän definition av begreppet modell innebär bland annat att modeller kan vara "olika stora" och mer eller mindre komplexa och generella. Ett exempel på en relativt enkel modell är de naturliga talen som diskuteras ovan. *Hur man förstår, förklarar och utför addition av två bråk med olika nämnare och hur man förstår, förklarar och tillämpar begreppet medelförändring* är å andra sidan mer komplexa modeller. Definitionen, där modeller är system som gör det möjligt att förstå andra system, innebär och tillåter en rekursivitet där modeller hela tiden revideras, utvidgas, förfinas, kopplas samman och integreras. Modeller är alltså föränderliga och (potentiellt) under konstant utveckling. Lärande sker när modellerna man har för att skapa mening av ett fenomen eller situation utvecklas så att man får nya eller alternativa sätt att se, tänka och skapa mening. Från ett modell- och modelleringsperspektiv är lärande modellutveckling.

Som en illustration av denna just nämnda förfining och utveckling av en modell till en mer komplex och generell modell, och för att knyta an till exemplet med de naturliga talen ovan, kan man tänka på utvidgning av talområden: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Genom skolan utvecklar och förfinar eleverna modeller som de introducerats till och har av de naturliga talen $\mathbb{N}$ till att successivt omfatta de utvidgade talmängderna $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$.



Tankeavslöjande aktiviteter

Modellutveckling är en central idé i ett modell- och modelleringsperspektiv på undervisning och lärande. Det är därför viktigt att veta vad eleverna kan och bär med sig till en lärandesituation så att läraren och lärandemiljön på bästa sätt kan bygga vidare på detta och främja och stötta eleverna i att utveckla de modeller som de redan har. Richard Lesh och hans kollegor har utvecklat en speciell sorts aktivitet som syftar just till att göra elevernas initiala tankar och modeller till naturliga utgångspunkter för undervisning och elevernas lärande. Grundtanken med dessa så kallade *tankeavslöjande aktiviteter* är att synliggöra elevernas tankar och aspekter av deras lärande som i många andra situationer är osynliga och tysta. Det är först när elevernas modeller uttrycks som de blir något som kan diskuteras, analyseras och kritiseras.

När eleverna arbetar med tankeavslöjande aktiviteter genererar och uttrycker de förklaringar, beskrivningar och modeller som "avslöjar" hur de tolkar problemsituationen i aktiviteten när de försöker skapa mening i situationen med hjälp av matematik. Det är framförallt matematiseringsprocesserna (att kvantifiera, organisera, koordinera mm) som gör elevernas lärande (modellutveckling) synligt. Kärnidén i en tankeavslöjande aktivitet är att eleverna sätts i en situation som är meningsfull för dem och där de utmanas att utveckla en matematisk modell explicit, alltså att uttrycka modellen i eller genom någon form av extern representation. Utkomsten eller "produkten" av en tankeavslöjande aktivitet är alltså inte bara ett svar. Detta kan jämföras med vad eleverna förväntas "göra" i arbetet med uppgifter i traditionella läroböcker, där målet med uppgifterna många gånger för eleverna handlar om att komma fram till ett rätt svar.

Karaktäristiskt för tankeavslöjande aktiviteter är också arbetssättet där eleverna interagerar i mindre grupper och genererar meningsfulla beskrivningar, förklaringar eller representationer, genom att upprepade gånger sinsemellan diskutera, utmana och testa, förfina, utveckla och fördjupa sina sätt att tänka om den givna situationen. Eleverna genomlöper flera cykler där de tolkar, skapar mening och utvecklar sina modeller. De får på så vis nya och olika sätt att tänka kring problemet ifråga. Ett exempel på en tankeavslöjande aktivitet återfinns i slutet av artikeln.

Principer för design av tankeavslöjande aktiviteter

Som antytts ovan är tankeavslöjande aktiviteter inget som man vanligtvis finner i läroböcker i matematik. Man kan då fråga sig hur man kan utforma en aktivitet så att elevernas arbete med den innebär att de på något sätt måste ge uttryck för hur deras tankar om det matematiska i situationen utvecklas, samt hur dessa hjälper dem att skapa mening i den givna situationen. Ett mångårigt samarbete mellan forskare och ett stort antal lärare från olika stadier har mynnat ut i sex designprinciper att beakta när man utvecklar och väljer tankeavslöjande aktiviteter. Dessa sex designprinciper är *den modellgenererande principen*, *den meningsfulla (realistiska) principen*, *den självutvärderande principen*, *dokumentationsprincipen*, *dela-med-sig och generaliserbara principen* samt *minimalitetsprincipen*. Dessa designprinciper och tillhörande vägledande frågor beskrivs i tabellen på nästa sida.

<i>Den modellgenererande principen</i> syftar dels till att tydliggöra lärandemålet med aktiviteten och garantera att eleverna behöver formulera eller använda en modell, dels understryks vikten av själva valet och formuleringen av aktiviteten så att eleverna får förutsättningar för att arbeta med aktiviteten på ett produktivt sätt.	Är aktiviteten sådan att den försätter eleverna i en situation där de inser behovet av att konstruera, modifiera, förfina eller vidareutveckla en modell för att skapa mening och tolka det som är givet i situationen, målet med aktiviteten, eller göra det som efterfrågas i aktiviteten? "Siktas" aktiviteten på de strukturella aspekterna i den givna situationen?
<i>Den meningsfulla (realistiska) principen</i> understryker vikten av att situation och problem i aktiviteten är meningsfulla för eleverna. För att eleverna ska förstå och bli engagerade är det viktigt att aktiviteten tar avstamp i elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper, samt att elevernas tankar och idéer ges utrymme och tas på allvar.	Kan detta scenario och denna frågeställning förekomma i situationer i det verkliga livet eller situationer som är meningsfulla för eleverna? Uppmuntras eleverna att bygga på sina tidigare erfarenheter och kunskaper? Kommer elevernas tankar och idéer att bli tagna seriöst?
<i>Den självutvärderande principen</i> fokuserar på att möjliggöra för eleverna att i så stor utsträckning som möjligt själva utvärdera, utveckla, förfina och omformulera sina idéer och modeller.	Är problemformuleringen sådan att eleverna kan identifiera och välja ut lämpliga kriterier för att avgöra vilka modeller som är användbara och produktiva i den givna problemsituationen? Är syftet med aktiviteten klart? Ger aktiviteten eleverna möjlighet att själva avgöra om deras lösningar och svar behöver förbättras?
<i>Dokumentationsprincipen</i> syftar till att eftersträva att ett "spår" av hur eleverna arbetar och tänker blir synligt dokumenterat på ett sådant sätt att eleven själv, klasskamrater, lärare och forskare kan ta del av elevernas arbete.	Behöver eleverna explicit visa eller delge hur de tänker kring situationen i aktiviteten och deras lösningsförfarande? Kommer det framgå av det eleverna producerar vilken modell (vilket system i termer av matematiska objekt, relationer, operationer och mönster) de använder och tänker med / kring / enligt?
<i>Dela-med-sig och generaliserbara principen</i> understryker att de modeller eleverna utvecklar ska gå att delas med, förstås och användas av andra, samt måste leda någonstans ämnesmässigt.	Är utkomsten för eleverna en användbar modell eller metafor som de skulle kunna tillämpa och bygga vidare på i andra liknande situationer och sammanhang? Kan andra förstå och använda modellen?
<i>Minimalitetsprincipen</i> handlar om att man inte ska göra saker mer krångliga än man behöver, att aktiviteten är väl avgränsad och fokuserad.	Är aktiviteten och situationen så enkel som möjlig, men ändå sådan att den stimulerar och utmanar elevernas sätt att tänka?

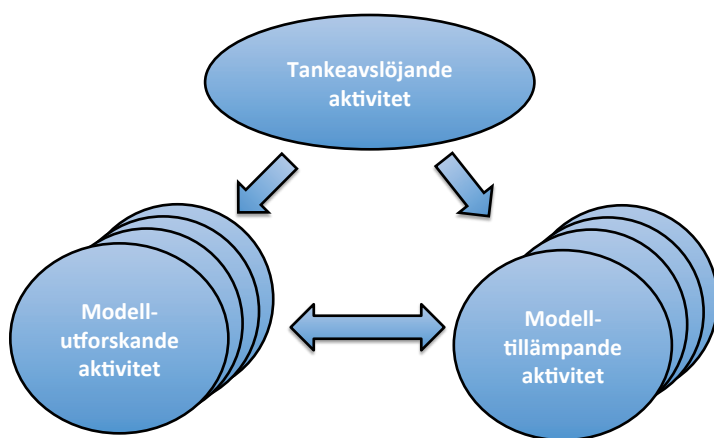
Designprinciper och tillhörande vägledande frågor för att konstruera eller välja ut tankeavslöjande aktiviteter.

Att utveckla eller hitta problem och aktiviteter som uppfyller alla sex principerna i tabellen är minst sagt utmanande. Erfarenheter visar att det är mer realistiskt att sikta på att täcka in fyra principer och låta lärandemål och materialtillgång styra vilka av dem man väljer att fokusera på.

Sekvenser av modellutvecklande aktiviteter

Även om tankeavslöjande aktiviteter har visat sig ha stor potential vad gäller att ge eleverna möjlighet att upptäcka och utveckla avancerade matematiska idéer (modeller), är det sällan tillräckligt med endast en tankeavslöjande aktivitet för att tillräckligt djupt utveckla och befästa det eleverna lärt sig. Istället behövs *sekvenser av modellutvecklade aktiviteter* där eleverna systematiskt ges möjlighet att modifiera, utveckla och förfinas sina modeller.

En sekvens av modellutvecklande aktiviteter börjar alltid med en tankeavslöjande aktivitet som har till syfte att sätta eleverna i en meningsskapande situation där de med hjälp av matematik är tvungna att skapa och uttrycka en modell. I en modellutvecklande sekvens av aktiviteter följs sedan den tankeavslöjande aktiviteten upp av en eller flera *modellutforskande aktiviteter* och *modelltillämpande aktiviteter* som har till syfte att stötta eleverna att ytterligare förfinas och vidareutveckla sina modeller.



Den övergripande strukturen av sekvenser av modellutvecklade aktiviteter.

Modellutforskande aktiviteter syftar till att eleverna ska arbeta vidare med modellen från den tankeavslöjande aktiviteten och utforska den underliggande matematiska strukturen i denna. Ofta handlar det om att undersöka olika sätt att använda representationsformer som tabeller, interaktiva grafer, diagram, funktionsuttryck och animationer för att beskriva modellen och utveckla ett rikare språk. Modellutforskande aktiviteter fokuserar på styrkor och svagheter hos olika representationsformer, på hur olika representationsformer relaterar till varandra och i vilka sammanhang man kan använda representationsformerna produktivt. Ett viktigt inslag under arbetet med modellutforskande aktiviteter är lärarledda diskussioner och elevredovisningar i helklass.

Syftet med *modelltillämpande aktiviteter* är att ge eleverna tillfälle att tillämpa sina modeller i nya situationer och sammanhang. Inte sällan innebär detta att elevernas modeller behöver ytterligare utforskas, förfinas, utvidgas och utvecklas för att ge en djupare förståelse av såväl problemet de arbetar med som modellen de försöker tillämpa.

En sekvens modellutvecklade aktiviteter – *medelförändring*

För att illustrera hur en sekvens av modellutvecklande aktiviteter kan se ut i faktisk undervisning presenteras ett exempel innehållande en tankeavslöjande aktivitet, två modellutvecklande aktiviteter och två modelltillämpande aktiviteter. Sekvensen är hämtad från artikeln *A modelling perspective on interpreting rates of change in context* och fokuserar på begreppet *medelförändring* som ligger till grund för många centrala begrepp och områden i gymnasematematiken, exempelvis differential- och integralkalkylen.

Den tankeavslöjande aktiviteten i sekvensen utgår från elevernas egna erfarenheter av rörelse och förflyttning för att ge dem möjlighet att uttrycka hur de tänker kring *funktionsvärden, medelförändring, hur medelförändringen ändras över olika intervall* samt hur dessa begrepp hänger samman. Utifrån skriftliga beskrivningar över hur de ska röra sig skapar eleverna *position–tid*-grafer med hjälp av rörelsedetektorer som mäter avståndet mellan detektorn och den elev som rör sig framför den och genererar ett mätvärde var tionde sekund. Genom att analysera sina egna förflyttningar i termer av position (p) och hastighet (v) jämför eleverna grafer då de rör sig snabbt respektive långsamt med konstant hastighet, samt rörelser som byter håll. Eleverna använder också rörelsedetektorerna och försöker återskapa givna grafer med linjära, styckvis linjära och krökta kurvor.

De två efterföljande modellutforskande aktiviteterna fokuserar på förståelsen och användbarheten av olika representationsformer för att bättre förstå och beskriva elevernas initiala modeller om medelförändringen. I den första modellutvecklande aktiviteten konstruerar eleverna v - t -grafer i ett datorprogram som sedan genererar motsvarande rörelse hos datoranimerade figurer. Utifrån graferna och figurernas rörelse arbetar sedan eleverna med att konstruera p - t -grafer, i syfte att utveckla en koordinerad förståelse för sambandet mellan p - t -diagram och v - t -diagram. Den andra modellutvecklande aktiviteten handlar om hur en funktions medelförändring kan te sig på olika delintervall av en funktions definitions mängd och att koordinera detta med tabeller, grafer och ekvationer. Genom att använda ytterligare ett datorprogram utforskar och karakteriserar eleverna bland annat konstant medelförändring och medelförändring vid exponentiell tillväxt.

I den första modelltillämpande aktiviteten som sedan tar vid är elevernas uppgift att samla data och konstruera en matematisk modell för hur ljusintensiteten ifrån en ljuskälla varierar med avståndet från ljuskällan ($\sim 1/(\text{avståndet})^2$). Eleverna ska även analysera och beskriva den matematiska

Tankeavslöjande
aktivitet: Rörelse-
detektorer



Modellutforskande
aktivitet 1: p - t -grafer
och v - t -grafer



Modellutforskande
aktivitet 2:
representationer av
medelförändring

modellen genom att använda sin modell av medelförändring och se på hur medelförändring av ljusintensiteten varierar över olika intervall på olika avstånd från ljuskällan. Eleverna får här arbeta med en situation som inte har tid som oberoende variabel och ett förlopp med negativ medelförändring. I den andra och avslutande modelltillämpande aktiviteten experimenterar och analyserar eleverna hur spänningen varierar över en fulladdad kondensator när den laddar ur. Eleverna bygger en enkel R–C-krets och samlar mätvärden för några olika kondensatorer och resistanser som de analyserar. Målet för eleverna är att konstruera och beskriva en modell över urladdningsförloppen (en exponentiellt avtagande funktion med exponentiell förändringshastighet) och hur medelförändringen varierar med successiva lika stora intervall ($0 \leq t \leq 1, 1 \leq t \leq 2, 2 \leq t \leq 3, \dots, t$ i sekunder).

Avslutande ord

I denna artikel har jag presenterat några av de centrala idéerna och begreppen i det så kallade modell- och modelleringsperspektivet på lärande och undervisning i matematik. Perspektivet medger ett alternativt sätt att tänka holistiskt kring forskning, lärande och undervisning i matematik, och är därmed en lovande utgångspunkt och ansats för kombinerade forsknings-, kompetens- och utvecklingsprojekt. Inom ramen för ett pågående samarbete mellan Linköpings universitet och Linköpings och Norrköpings kommuner bedrivs projekt i denna anda och förhoppningen är att erfarenheter från dessa projekt ytterligare ska ge kunskaper om hur modeller och modellering kan omsättas i klassrumspraktik.

LITTERATUR

- Ärleback, J. B., Doerr, H. M., & O'Neil, A. H. (2013). A modelling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(4), 314–336.
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (red). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. A., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. In R. A. Lesh & H. M. Doerr, *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (s 35–58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. A., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. E., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh, *Handbook of research design in mathematics and science education* (s 591–645). Mahwah, NJ; London: L. Erlbaum.



Exempel på en sekvens av modellutvecklade aktiviteter fokuserade på medelförändring.