Jonas Bergman Ärlebäck

Matematiska modeller och modellering – vad är det?

Vad är en matematisk modell? Vad innebär modellering? Denna artikel tar sig an dessa frågor, problematiserar begreppen och undersöker hur de förhåller sig till angränsande begrepp som tillämpningar och problemlösning.

Språkbruk kring objekt eller begrepp är föränderliga och produkter av den tid, de platser och de sammanhang där de praktiseras. Speciellt när objektet som beskrivs är mångfacetterat så kan språkbruket förskjutas och ändras. Detta kan resultera i att en beskrivning av ett begrepp går från att ha en precis innebörd till att bli mer generell, att en mängd olika ord och beskrivningar mer eller mindre beskriver samma objekt, eller att begreppsinnebörden ändras.

När det gäller begreppen matematisk modellering och modeller i undervisning och lärande av matematik har en sådan förskjutning ägt rum under de senaste 20–30 åren; från tillämpningar och tillämpad problemlösning till modellering och problemlösning i mer allmänna ordalag. Detta motiverar att en diskussion om matematiska modeller och modellering även delvis bör behandla tillämpningar och problemlösning.

Problem och problemlösning

Problem och problemlösning har genom åren tillskrivits många och ibland motsägande innebörder. Detta faktum medför att det inte är helt lätt att från litteraturen göra sig en klar tolkning av begreppens mening, men det är klart att problemlösning handlar om att lösa problem. För att försöka beskriva vad som avses med problemlösning behöver vi klargöra dels vad som menas med ett problem och dels vad det är man gör när man löser problem. Vanligen skiljer man på begrepp som problem, övning, exempel och uppgift där de senare skiljer sig från den första i meningen att de är 'av mer rutin'. Ett problem karaktäriseras av att den som försöker lösa problemet inte direkt vet hur denne ska gå tillväga. Om en frågeställning är ett problem eller en uppgift är alltså individuellt och beroende på individens kunskaper och förmågor. Vissa definitioner för även in affektiva dimensioner i begreppet som att problemlösaren finner det intressant och engagerande och har en egen önskan om att lösa problemet. Hur problem och problemlösning definieras inom ramen för skolmatematiken hör samman med vilken roll och funktion begreppen tillskrivs i undervisningssammanhang.

George Stanic och Jeremy Kilpatrick identifierar tre övergripande teman som de menar karaktäriserar synen på problemlösning i matematikämnet: *problemlösning som kontext*, *problemlösningsförmåga* och *problemlösning som konst*.

> *Problemlösning som kontext* innebär att problem och problemlösning är medel för att uppnå andra mål som att rättfärdiga matematikämnets existens i skolan, som motivation, som medel för att introducera vissa matematiska begrepp och konstruktioner, som ett nöjsamt tidsfördriv samt som övning för att befästa matematiska kunskaper och färdigheter.
>
> I *problemlösningsförmåga* lyfts problemlösning fram som viktig i sig och innebär ett hierarkiskt synsätt på rutin- och icke-rutinproblem, där förmågan att lösa de senare värderas högre än att lösa rutinproblem. Undervisningskonsekvenserna av detta blir ofta att fokus i första hand ägnas åt att lösa rutinproblem och att lösandet av icke-rutinproblem blir en aktivitet för speciellt kapabla studenter snarare än för alla elever.
>
> *Problemlösningen som konst* härstammar från Pólyas syn på problemlösning, vilket han jämställde med exempelvis simning, utförsåkning och pianospel. Här ses problemlösning som 'hjärtat i matematiken', där allt som rör undervisning i matematik sammanflätas och på så sätt blir direkt beroende av filosofiska ställningstaganden gällande matematikens 'väsen'.

Problemlösning, i någon av de tre tappningarna, är och har alltid varit en central del av matematikundervisningen. Ole Björkqvist kommenterar detta då han skriver att ”problemlösning alltid är förknippad med möjlighet till förnyade utmaningar i form av nya problem exempelvis genom variation och generalisering, eller genom inspirerat införande av nykonstruerade begrepp. Denna 'organiska' egenskap – att problemlösningen både *är* och befrämjar tillväxt – innebär att problemlösning framstår som en mycket lämplig komponent när nya generationer bygger upp sin egen matematiska kunskap.” (2001, s 115). Detta synsätt genomsyrar våra nuvarande ämnes- och kursplaner i matematik.

Tillämpningar

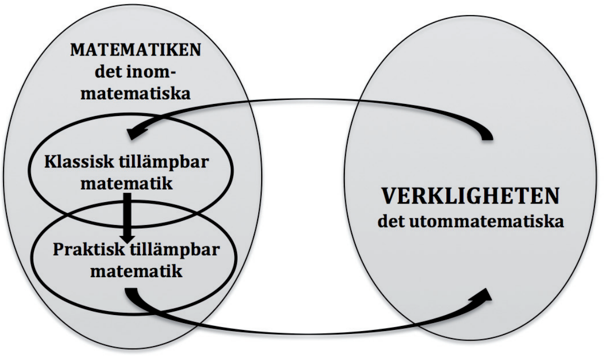
Det har pågått en diskussion sedan 1910-talet om och i så fall varför, samt i vilken utsträckning matematikutbildningen ska innefatta matematiska tillämpningar. Argumenten som har framförts för ett sådant inkluderande har växlat. Införandet av tillämpningar i matematik har dels betraktats som en motrörelse till 'den nya matematiken' i slutet av 1960-talet, dels som en konsekvens av den ökande användningen av matematik i andra vetenskapliga ämnen och discipliner. Andra argument är att tillämpningar fungerar som en motiverande faktor för eleverna eller att det är ett resultat av att den moderna tekniken gjort fler, och tidigare alltför komplexa problem, tillgängliga och lämpliga för undervisningssituationer.

Vad som ska ses som en tillämpning av matematik är, precis som problemlösning, på intet sätt väldefinierat. Generellt kan sägas att tillämpningar av matematik har att göra med att använda matematiken i utommatematiska situationer. Det handlar om att tillämpa matematiska begrepp, idéer, strategier och konstruktioner som verktyg på områden utanför matematiken. I en sådan karaktärisering blir innebörden, och avgränsningen, mellan det inommatematiska och det utommatematiska en central frågeställning. Det finns matematikdidaktiker som talar om det utommatematiska i termer av 'verkligheten' eller

’den reella världen’ med vilket de avser allting som har att göra med natur, samhälle och kultur, vardagsliv inkluderat, så väl som utbildningsämnen och vetenskap skild från matematik.

Nedan ges fyra klassiska och vanligt förekommande definitioner av matematiska tillämpningar som komplicerar och skapar missförstånd om begreppet.

> *Tillämpad matematik avser klassisk tillämpad matematik.* Hit räknas klassisk analys innefattande exempelvis ordinära och partiella differentialekvationer och integralekvationer.
>
> *Tillämpad matematik är all matematik som har betydande praktisk användning.* Denna definition innefattar delar av den matematik som ryms under den första definition, men innefattar även ’modernare’ matematik som exempelvis statistik, sannolikhetslära och linjär algebra.
>
> *Att tillämpa matematik innebär att man utgår från en situation från ett annat ämnesområde eller från verkliga livet.* Innebörden beskrivs som att göra en matematisk tolkning eller modell, arbeta matematiskt inom den modellen och att koppla resultaten till den urspungliga situationen.
>
> *Att tillämpa matematik är vad personer som använder matematik för att förtjäna sitt levebröd de facto gör.* Skillnaden mellan den tredje och den fjärde definitionen är att i den senare finns ett repetitivt inslag med ett dialektiskt förhållningssätt mellan den inom- och utommatematiska problemsituationen.



De två första definitionerna fokuserar på vilken slags matematik det är som ska kallas för tillämpad matematik, medan de två sista istället koncentrerar sig på vad det innebär att tillämpa matematik. I figuren framgår tydligt uppdelningen av det inom- respektive det utommatematiska.

Förenklat kan ’att tillämpa matematik’ ses som att man utgår från det givna inommatematiska och frågar sig: på vad och hur kan jag använda just denna matematiska kunskap i verkligheten? Man kan också vända på scenariot och utgå från det utommatematiska, verkligheten, och ställa sig frågan: var kan jag hitta lämplig matematik för lösa föreliggande verkliga problem? Då får man problemlösning i praktiken och man talar om modellering.

Modeller

Ordet *modell* har flera betydelser i det svenska språket. Nationalencyklopedin och Nationalencyklopedins ordbok skriver fram en mängd facetter av dess innebörd, användning och mening. Ursprungligen betyder ordet modell ’måttstock’ eller ’skala’. I vetenskapliga sammanhang är en modell ofta detsamma som en representation av ett fenomen, ett objekt eller en tankekonstruktion. Vanligen skiljer man mellan konkreta modeller såsom repliker gjorda i skala eller illustrationer av en idé, respektive abstrakta modeller som exempelvis tankekonstruktioner och teorier.

Hur ordet används i vetenskapliga sammanhang avspeglas delvis i hur det används i mer vardagligt språk. Exempelvis används ordet modell om ett föremål som efterliknar något annat föremål, så som modellflygplan, modelljärnväg, en vision av hur stadens nya centrum (arkitektur) ska se ut, eller som en prototyp till ett nytt hammarskaft (design). Modell i bemärkelsen fysisk avbild av ett konkret objekt är med andra ord vanlig. En andra innebörd är vad man skulle kunna kalla en 'personifierad modell', vilket avser den person som visar upp det senaste modet, den som blir fotograferad eller på annat sätt blivit avbildad inom konsten. En tredje mening tillskrivet ordet modell är i meningen ideal eller förebild, vilket illustreras i uttryck som 'modelluppförande' och 'Det där är modellen!'.

Matematisk modellering

Ett vanligt sätt att beskriva modellering är genom att lista de moment, faser eller steg som tillsammans utgör vad som brukar kallas modelleringsprocessen. Ofta användas någon form av cyklisk representation för att beskriva den. Beroende av traditionella och kulturella olikheter kan dessa modelleringscykler vara olika både till form och innehåll, speciellt när det gäller antalet steg som cykeln innehåller. Principiellt är utgångspunkten vid modellering en frågeställning gällande en verklig situation som man vill beskriva, förstå, förutsäga eller förklara någon aspekt av. För att reducera komplexiteten behöver den verkliga situationen idealiseras och struktureras så att relevanta storheter och samband för den aktuella frågeställningen kan identifieras. Denna process leder till en förenklad och mer avgränsad förståelse av den verkliga situationen och frågeställningen (ibland kallad verklig modell). Om det är lämpligt kan olika slags empiriska data samlas in för att ytterligare förklara fenomentet som studeras. När frågeställningen och den verkliga situationen gjorts mer tillgänglig och hanterbar översätts de till matematik, de matematiseras. Man får en matematisk modell som kan analyseras med hjälp av matematiska metoder, verktyg och strategier. Den matematiska behandlingen av frågeställningen leder till matematiska resultat som översätts tillbaka till den verkliga situatonen där de tolkas och valideras. Om resultatet inte är rimligt eller meningsfullt går man tillbaka och kritiskt granskar alla steg i processen en eller fler gånger och modifierar sin model och sitt lösningsförfarande, i hopp om att komma fram till ett godtagbart, rimligt och meningsfullt svar på frågeställningen.

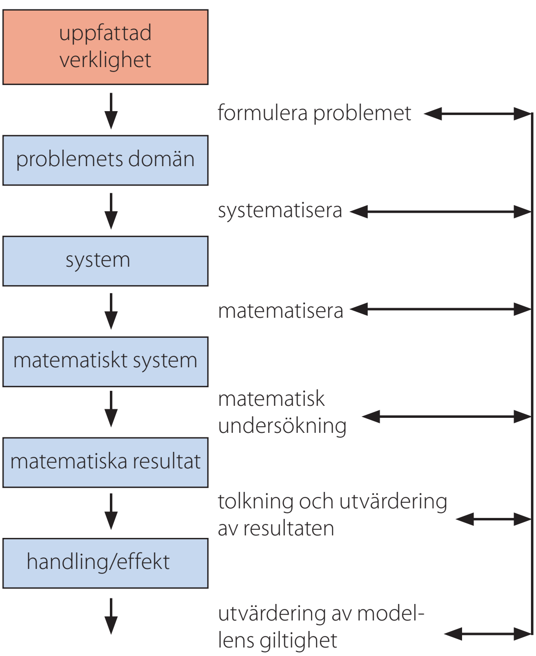


illustration av modelleringsprocessen

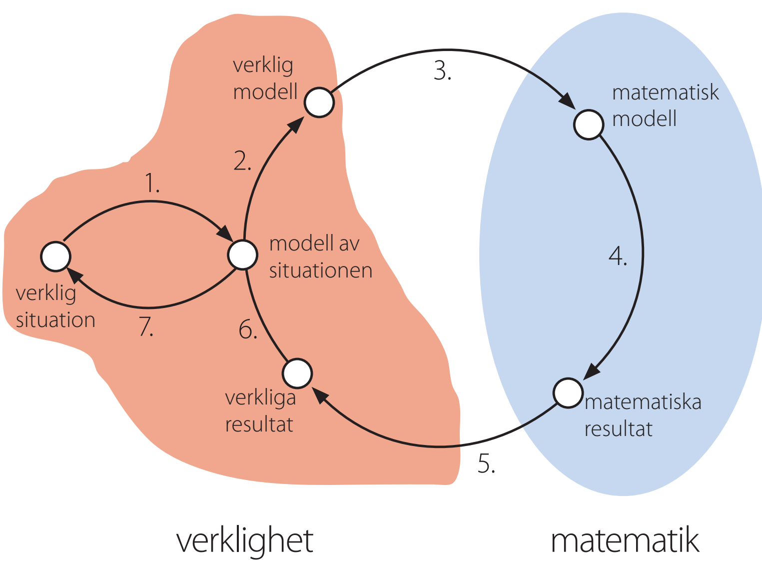
Två vanligt förekommande varianter av den beskrivna processen finns i figurerna här nedan. Den högra figuren visar också den vanligt förekommande tudelningen i många av de beskrivningarna som finns av modelleringsprocessen i litteraturen; den mellan matematiken och 'övriga världen' eller 'verkligheten' och man kan även notera de principiella likheterna med figuren på sid 23 i detta avseende.

Det bör understrykas att detta är en idealiserad bild av matematisk modellering och att processen i själva verket är mer ostrukturerad. Distinktionen mellan verkligheten och matematiken som visas i figuren på denna sida har kritiserats som ohållbar, inte minst vid arbete i klassrummet med matematiska modeller då det som i figuren kallas 'verklig modell' beror på vilken matematik eleverna behärskar vid tillfället. Även om detta cykliska synsätt är det dominerade finns andra tolkningar och under de senaste åren har modelleringsprocessen även beskrivits i termer av modelleringskompetenser eller, som i våra svenska kursplaner, i termer av en modelleringsförmåga.

Modeller och problemlösning

Från den ovanstående diskussionen av problemlösning, tillämpningar, matematiska modeller och modellering kan man konstatera att samtliga begrepp förekommer i en mängd olika betydelser och innebörder i den matematikdidaktiska forskningen. Genomgången visar också på en indikation av den trend man kunnat notera, att under de senaste årtionden har uttrycken *matematiska tillämpningar* och *modellering* allt mer börjat användas för alla olika slags sammankopplingar mellan det inommatematiska och det utommatematiska.

Björkqvist beskriver relationen mellan problemlösning och modellering som att "det ligger nära till hands att se matematisk modellering som det fullständigaste slaget av matematisk problemlösning" (s 119) och i likhet med den subjektiva innebörden i begreppet problemlösning menar han att modellering som följer ett på förhand givet mönster inte kan uppfattas som problemlösning.



1. förstå problemet
2. förenkla/strukturera
3. matematisera
4. bearbeta matematiken
5. tolka
6. vaildera
7. presentera

illustration av en modelleringscykel

Även Henry Pollak diskuterar förhållandet modellering, tillämpad matematik, problemlösning och tillämpning av matematik, och menar att modellering skiljer ut sig genom att speciell uppmärksamhet ägnas åt den process som utgår från ett verkligt utommatematiskt problem eller fenomen som vill förstås eller analyseras. Centralt för Pollak är också att det finns en uttalad återkoppling mellan den ursprungliga utommatematiska situationen eller fenomenet och den i matematiska termer och symboler formulerade modellen samt de resultat den matematiska behandlingen mynnar ut i.

Richard Lesh och Judith Zawojewski utvecklar detta synsätt vidare och föreslår att definitionen av problemlösning breddas. Deras förslag på definition av ett problem är att ”en uppgift blir ett problem när problemlösaren behöver utveckla ett mer produktivt sätt att ta sig an den givna situationen”. Problemlösning ser de som ”processen att tolka en situation matematiskt, ofta i flera cykler av att uttrycka, testa och revidera matematiska tolkningar – samt att välja ut, sammanfoga, modifiera, omvärdera och förfina kluster av matematiska begrepp från olika områden inom och bortom matematiken”. Dessa två citat lyfter fram centrala idéer inom det så kallade modell- och modelleringsperspektivet, nämligen att ta modelleringsproblem som utgångspunkt för att utveckla nya sätt att tänka (nya modeller) och vad som karaktäriserar denna ’skapelseprocess’ (modellering).

Sammanfattningsvis visar ovanstående diskussion av olika sätt att se på matematiska modeller och modellering, att tillämpa matematik och matematiska tillämpningar, och problemlösning, att för att få en helhetsbild av matematisk modellering måste man även inkludera olika sätt att se på problemlösning i allmänhet och matematiska tillämpningar i synnerhet. Konsekvensen av att ha en klar innebörd och överblick på de begrepp man använder och undervisar om och med, blir en ökad tydlighet i klassrumskommunikationen och underlättar för elevernas förståelse och möjlighet till lärande.

LITTERATUR

Ärlebäck, J. B. (2009). *Mathematical modelling in upper secondary mathematics education in Sweden.* A curricula and design study. Department of Mathematics, Linköping University, Linköping.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematical curriculum. I R. I. Charles & E. A. Silver (red). *The Teaching and Assessing of Mathematics Problem Solving* (s 1–22). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I B. Grevholm (red). *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv* (s 115–132). Lund: Studentlitteratur.

Pollak, H. O. (2003). A history of the teaching of modeling. I J. Kilpatrick & G. M. A. Stanic (red). *A history of school mathematics*, vol. 1 (s 647–671). Restion, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. A. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester Jr. (red). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Vol. 2 (s 763–804). Charlotte, NC: Information Age Pub.