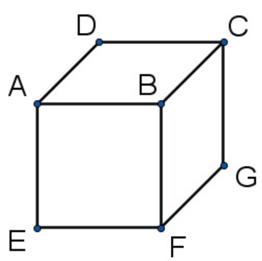
PROBLEM AVDELNINGEN

Problemlösning är ett sätt att utmana elever, men också ett sätt för läraren att utmana sin egen problemlösningsförmåga utöver den matematik som tas upp med eleverna i klassrummet. Här kommer några av de problem som valdes bort i årets arbete med Kängurutävlingen. Lös och diskutera dina lösningar med kollegor. Vilka uppgifter tror du att dina elever klarar av?

4210 Mirjam skriver ett tal på varje sida av en kub. På varje hörn av kuben skriver hon sedan summan av de tre tal som står på de sidor som omger hörnet. Talen vid hörnen C, D och E är 14, 16 och 24.



Vilket tal står vid hörnet F?

4211 Kevin använder kuber med sidan 1 för att bygga en större kub med sidan 4. Därefter målar han tre av stora kubens sidor med röd färg och de andra tre med blå färg. När han är klar har ingen av de ingående små kuberna tre röda sidor. Hur många småkuber har både röd och blå färg på några av sina sidor?

4212 En buske har tio grenar. Varje gren har antingen fem löv eller två löv och en blomma. Vilka antal löv och blommor kan busken ha?

4213 Ett tvåsiffrigt tal med sifforna a och b kan skrivas $\underline{ab}$. Låt a, b och c vara olika siffror. På hur många sätt kan du välja siffrorna a, b och c så att $\underline{ab} < \underline{bc} < \underline{ca}$?

4214 När ett av talen i följden 1, 2, 3, … , n-1, n ströks bort blev medel för de återstående talen 4,75. Vilket tal ströks bort?

4215 Tio olika tal skrivs ner. Varje tal som är lika med produkten av de nio andra talen stryks under. Hur många tal kan som mest strykas under?

4216 Flera punkter på en linje markeras och alla möjliga sträckor mellan par av punkter konstrueras. En av dessa punkter återfinns på 80 av dessa sträckor, en annan punkt återfinns på 90 av dessa sträckor. Hur många punkter på linjen markerades?

4217 Hur många regelbundna månghörningar finns det vars yttervinklar mätta i grader är heltal?

Svar och lösningar

4210 Hörnen C har summan av tre sidor, hörnen E summan av övriga tre sidor. Alltså summan av alla sidor är 14+24= 38 och det måste vara lika mycket som summan av D och F. Alltså talet vid F är 38-16= 22. Jo, man kan räkna på flera olika sätt vilket gäller också problemen som följer.

4211 Han har inte målat några tre sidor med ett gemensamt hörn rött. Alltså han har målat rött ett par motstående sidor och en sida mellan dem. Det röda området (när det plattas ut) blir en rektangel med måtten 4 och 12 och omkretsen 32 som utgör gränsen mellan rött och blått. Hälften av omkretsen går genom hörnkuberna, två längdenheter per kub och resten mitt i den stora kubens kanter, en ny kub för varje längdenhet. Antalet gränskuber (det är de och bara de som är blåröda) är 32/2/2+32/2= 24.

4212 Några exempel kommer nog snabbt men det gäller att hitta alla möjligheter. Kanske några elever börjar själv inventera systematiskt. Annars fråga: ”Hur många minst?”, ”Hur många som mest?”, ”Hur många olika möjligheter?”. Och när listan är klar, låt undersöka vilka egenskaper den har och att förklara varför.

4213 Från $ab < bc < ca$ följer med nödvändighet $a \leq b \leq c$ men vissa att $a < b < c$ vilket också är ett tillräckligt villkor. Inget av siffrorna kan vara 0. Tre olika siffror ur mängden 1…9 kan väljas på 6! / 3!= 6! / 6= 5!= 120 olika sätt och varje sådan trippel duger om man placerar siffrorna i rätt ordning. Svaret är alltså 120.

4214 Låt k vara det strukna talet. För givet n gäller ju större k desto mindre medelvärde m, alltså desto större n måste vara för att nå ett visst m.

Om k= 1, så m= n/2+1. Om k= n, så m= n/2. Alltså $n/2<4.75<n/2+1$ som ger $7,5 < n < 9.5$

Om n= 8 så $(8 \cdot 9/2-k)/7= 4.75$ dvs. 36-k = 33.25 men k ska vara ett heltal.

Om n= 9 så $(9 \cdot 10/2-k)/8= 4.75$ dvs. 36-k = 38. Alltså k= 2.

4215 Om a och b är understrukna och p är produkten av de övriga, så $a= b \cdot p$ och $b= a \cdot p$ alltså $a \cdot b = a \cdot b \cdot p2$ alltså p2 = 1 men $a \neq b$ alltså $p \neq 1$alltså p = -1 och a = -b.

Det kan finnas två understrukna tal, t.ex. 2 -2 -1 uppfyller villkor men det finns inte tre olika tal a, b, c sådana att a = -b, b = -c och c = -a. Alltså som mest 2 understrukna tal.

4216 En omöjlig kombination! Det var kanske tänkt att punkterna skulle ligga i sträckornas inre? Räknar man sträckor som börjar/slutar i punkten med, så får man aldrig kombinationen 80 och 90.

Om en punkt P är markerad på linjen och den har a punkter markerade på linjen på ena sidan av sig och b punkter på den andra sidan, så P ligger inne i $a \cdot b$ sträckor. Antal markerade punkter är då a + b + 1. Det ska alltså finnas tal a, b, c och d, sådana att $a \cdot b=80$, $c \cdot d=90$ och $a+b+1= c+d+1$. Undersöker man alla uppdelningar av 80 i två faktorer och 90s dito, så visar det sig att det finns bara en kombination som uppfyller villkoren: $5 \cdot 16=80$ $6 \cdot 15=90$ och 5+16+1=6+15+1= 22.

4217 Summa av en konvex månghörnings yttervinklar är 360°. En regelbunden femhörnings yttervinklar är 360°/n. Det finns lika många möjligheter som heltalsdelare till 360 som är ≥ 3. Det finns 22 sådana: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 240 och 360.