PROBLEM AVDELNINGEN

Siffervågor

Att räkna med stora och små tal med lagom precision har länge varit matematikkunnande med breda tillämpningsområden. Att undersöka mycket stora heltal utan att göra avkall på precision motiverades i äldre tider med talens magiska egenskaper och med djupa sanningar dolda i talen. Det gällde särskilt primtalen. Några magiska egenskaper har nog ingen bevisat än, men det med djupa sanningar var kanske inte så fel om man betänker att Kurt Gödel använde primtal i sitt bevis av våra tankekonstruktioners ofullständighet. I många sekler har talteorin utgjort en utmaning för världens matematiker.

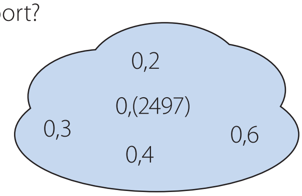
Talteorins praktiska tillämpningar har på senare tid utökats med områden som kryptering, kodning och med slumptalsgenerering. Men när man får ett bråks värde uttryckt med tillfredställande precision i decimalform, finns det då anledning att fortsätta att undersöka de oändliga svallvågorna i decimalutvecklingen som inte säger något om verkligheten? Ibland kan det vara användbart för att klassificera tal och därmed kunna säga exempelvis något om möjliga alternativa beräkningsmetoder som kanske på enklare sätt kan leda till redan erhållna resultat. Decimalutvecklingar kan också ses som fält för att testa och utveckla talteoretiska kunskaper. Här följer några problem som kretsar runt tal i decimalform och som kan lösas utan användning av avancerad talteori.

4109 Skriv en fjärdedel på tio olika sätt. Finns det fler sätt?

4110 Hur mycket större än det största 2014-siffriga talet är det minsta 2015-siffriga talet?

4111 Du ska plocka bort siffror från talet 12323314 för att få ett palindromtal. Ett palindromtal är ett tal som är lika när du läser det från vänster till höger, som när du läser det från höger till vänster. Hur många siffror måste du minst plocka bort?

4112



I molnet står talen 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 och 1/6 kodade på ett speciellt sätt. Koda 1/8 och 1/9 på samma sätt.

4113 Talet $t = 999 \ldots 999$ består av 999 nior. Vilken siffersumma har talet t^2?

4114 Skriv 0,(123456789) i bråkform.

4115 Vilket är det minsta naturliga talet som är delbart med 44 och med 45, sådant att du använder alla tio siffror när du skriver det?

4116 Skriv 1/81 i decimalform. Varför ser det ut så?

4117 Ett tal av formen 0,(abc), som har periodisk decimalutveckling med periodlängd 3, delas med 77. Vilken decimalutveckling kan kvoten ha? Vad händer om talet istället delas med 91?

Svar och kommentarer

4109 0,25; 1/4; 1:4; 25 %; 2^{-2}; 3/12; 4^{-1}; $0{,}01_2$; 250 ‰; 1÷4. Detta är bara en handfull av olika uttryck för en fjärdedel som är troliga att möta i Sverige idag. Det finns fler, och ännu fler om man dessutom söker i andra länder och i gångna tider. En fjärdedel förekommer ofta i kombination med en enhet som en fjärdedels liter, en fjärdedels timme, en fjärdedels år. Därtill finns det obegränsat många bråk som förkortas till 1/4.

4110 Ett större.

4111 Tre. Fyran ska självklart bort. Ettorna ska vara kvar. Dessutom kan man behålla tre treor och i så fall ingen av tvåorna, eller två treor och en tvåa mellan dem, eller en trea mellan två tvåor. Fem siffror blir kvar, tre ska bort.

4112 0,16 och 0,14 (inte 0,8 och 0,9). Det ser nästan ut som decimalutvecklingar av bråktalen men stämmer inte riktigt. Kanske utvecklingarna är i ett positionssystem med en annan bas än 10? Vilken bas det än är, ser man vilken kod som står för det största talet: 0,6. När 0,6 = 1/2 måste basen vara 12. Det kallas för det duodecimala talsystemet. När basen inte längre är hemlig kan vi skriva nedsänkt 12 efter tal i detta system. $1/8 = 0{,}16_{12}$ och $1/9 = 0{,}14_{12}$ medan 0,8 och 0,9, om någon gissade på det, representerar 2/3 respektive 3/4 i duodecimala systemet. $0{,}(2497)_{12}$ är ett tal med perioden 2497 och skrivs 0,2 i decimalsystem. Användning av parenteser är en av flera konventioner för att ange perioden.

4113 8991. Samma siffersumma som talet t har. Testa motsvarande problem med små antal nior. $t^2 = (t-1)(t+1)+1$. Talet $t-1$ har siffersumman ett mindre än talet t. Multiplikation med $t+1$ bidrar bara med 999 nollor.

4114 123456789/999999999

4115 1234759680 Talet måste vara minst tiosiffrigt om alla siffror ska vara med. Siffran 0 sist och en jämn siffra näst sist. Använder man alla tio siffror (summa = 45) i ett tiosiffrigt tal, blir det automatiskt delbart med 9.

Delbarheten med 11 är en aning svårare: summan av siffror i udda positioner och summan av siffror i jämna positioner får skilja sig med en multipel av 11. Det betyder att fördelning av siffervärden mellan udda och jämna positioner måste vara 17:28 eller 28:17. Vill man att talet börjar med 1234 för att vara så litet som möjligt, är den enda möjliga fördelningen mellan udda och jämna positioner: udda = {1, 3, 7, 8, 9}, jämna = {0, 2, 4, 5, 6}.

4116 0,(012345679)

$1/81 = 999\,999\,999/999\,999\,999/81 =$

$= 111\,111\,111/9/999\,999\,999 =$

$= (100\,000\,000/9 + 10\,000\,000/9 + 1\,000\,000/$
$/9 + 100\,000/9 + 10\,000/9 + 1000/9 + 100/$
$/9 + 10/9 + 1/9)/999\,999\,999 =$

$$
\begin{array}{cccccccccll}
(& 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & & & & 1 & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & & & & & 1 & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & & & & & & 1 & + & 1/9 \\
+ & & & & & & & & & & 1/9)/999\,999\,999 = \\
=(& 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & + & 9/9)/999\,999\,999 =
\end{array}
$$

$12\,345\,679/999\,999\,999 = 0{,}(012\,345\,679)$

4117 Kvotens decimalutveckling kan ha periodlängd 6 eller 3.

$0{,}(abc) = 0{,}abcabcabcabc\ldots = 0{,}(abcabc)$

men $abcabc = 1001 \cdot abc = 77 \cdot 13 \cdot abc$

alltså $abcabc/77 = 13 \cdot abc$.

Divisionen $0{,}(abc)/77$ ger decimalutveckling med periodlängden 6. Perioden ser ut som talet $13 \cdot abc$, sexsiffrigt, med inledande nollor.

Om abc är en multipel av 77, får kvoten periodlängden 3, t ex 0,(154) / 77 = 0,(002).

Motsvarande gäller även delning med 91 eftersom $1001 = 91 \cdot 11$. För enkelhetens skull har vi bara diskuterat tal av formen $0{,}(abc)$ men det kan bevisas att varje tal i decimalform med periodlängden 3, ger vid delning med 77 eller 91 eller en annan faktor av 1001 en decimalutveckling med periodlängden 6 eller 3, t ex 123,456(789) / 77 = 1,603(334932) och 123,456(789) / 91 = 1,356(668019).

Leo Rubinstein