PROBLEM AVDELNINGEN

I denna problemavdelning presenterar vi bara ett enda problem, men ett problem som har genomgått förändringar i flera steg. Bara för att man har klarat en av versionerna ska man inte tro att man klarat alla andra. Den första versionen är hämtad från Kängurutävlingen år 2008, som nr 9 i tävlingsklassen Benjamin.

4101 Vi ska bilda en triangel med ett antal likadana stickor. Stickorna får inte brytas. Med vilket antal kan vi ***inte*** göra det?

a: 7 b: 6 c: 5 d: 4 e: 3

4102 Hur många lika långa stickor behöver man minst för att bilda en triangel som inte är likbent?

4103 En triangel har sidolängderna 3, 6 och 7. Är triangeln rätvinklig, spetsvinklig eller trubbvinklig? Lös problemet genom att resonera och räkna eller genom att rita, klippa och jämföra.

4104 Kan man bilda en spetsvinklig triangel, som inte är likbent, av 16 lika långa stickor? Hur många lika långa stickor behöver man minst för att bilda en sådan triangel? (Man måste använda hela stickor och alla man har.)

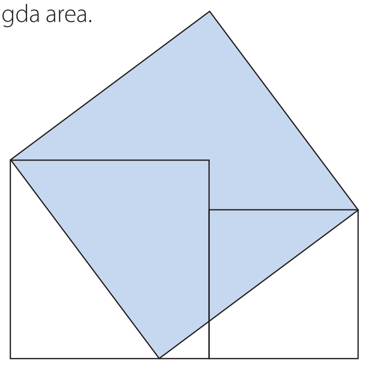
4105 En triangel är spetsvinklig men inte likbent och dess sidlängder är heltal. Kan denna triangels omkrets vara 16? Vilken är den minsta möjliga omkrets en sådan triangel kan ha?

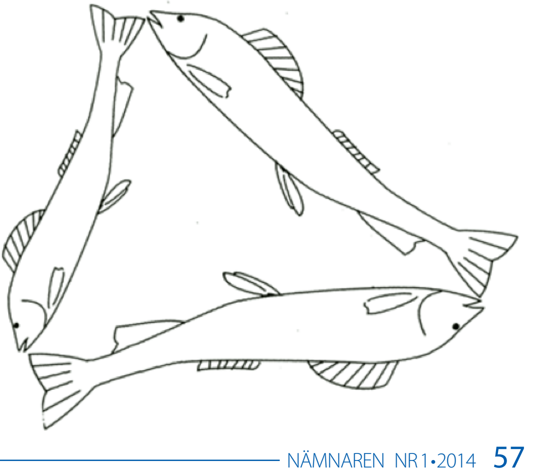
4106 Tre likformiga fiskar bildar en spetsvinklig triangel. Vilken area är störst – den största fiskens eller de två andras sammanlagda?

4107 Tre likformiga fiskar bildar en trubbvinklig triangel. Bevisa att den största fiskens area är större än de två mindre fiskarnas sammanlagda area.

Går det att visa detta utan att använda cosinussatsen eller ens Pythagoras sats?

4108 Bevisa att den snedställda kvadratens area är lika med de två raka kvadraternas sammanlagda area.





Svar ledtrådar och kommentarer

4101 d. Det går inte med 4. Den längsta sidan skulle då bli 2 eller mer, minst lika lång som de två kortaste tillsammans. Undersök de andra svarsalternativen!

4102 9 stickor. Triangelns tre olika sidor får vara 2, 3 och 4. Alla trianglar som är gjorda av lika långa stickor och bara har en sticka i basen är likbenta.

4103 Den är trubbvinklig. Se ncm.gu.se/node/6657. Tänk på att i en trubbvinklig triangel är den trubbiga vinkeln större än de två spetsiga tillsammans.

4104 Det går inte med 16 men går med 15 vilket är det minsta antal stickor som behövs. Detta problem är samma som månadens problem nr 3 i februari 2013. Även denna lösning kan du finna på ncm.gu.se/node/6657. Där diskuteras också olika sätt att undersöka om en triangel är spetsvinklig, rätvinklig eller trubbvinklig.

4105 Detta är bara en mera ”vuxen” formulering av 4104. Många elever i grundskolan gjorde sitt bästa för att lösa februariproblem nr 3 men det kom inga svar från gymnasieelever. De förstod nog inte att problemet var tillräckligt svårt för dem. Denna version rekommenderas för gymnasiet.

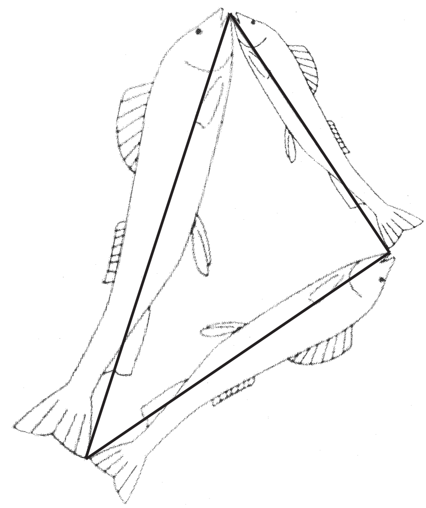
4106 Den största fiskens area är mindre än de två mindre fiskarnas sammanlagda. Problemet dök upp i diskussionen kring månadens problem nr 3 i februari 2013 och blev ett ”extra problem” avsett främst för lärare. Lösningarna kan man finna på ncm.gu.se/node/6788.

4107 Den största fiskens area är större än de två mindre fiskarnas sammanlagda.

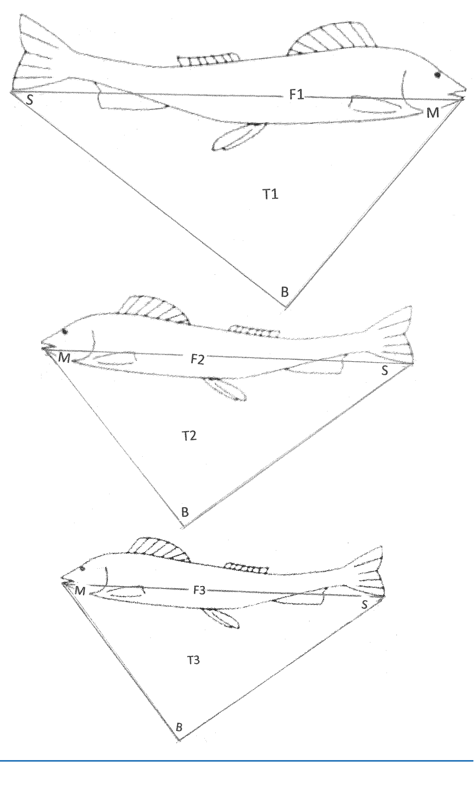
Man kan här använda samma metoder som i 4106 men nu vill vi lösa det med en mer elementär metod.

Vi använder inte Pythagoras sats men lösningen bygger på idé till bevis av Pythagoras sats i Elementa, bok 7, proposition XXXI . Den ger t o m en generalisering av satsen. Bevisidén diskuteras också i kapitel II av *Induction and analogy in mathematics* av G. Polya.

Tre saker behöver man veta:
– Att den trubbiga vinkeln i en trubbvinklig triangel är större än de två spetsiga tillsammans.
– Att för varje längdskala finns en areaskala. (Att den andra är kvadraten av den förra är inte så viktigt.)
– Att likformiga figurer har lika stora vinklar.



Låt triangeln vara den största fiskens triangel. De mindre fiskarna får var sin likadan triangel, fast mindre, i proportion till sin egen storlek.

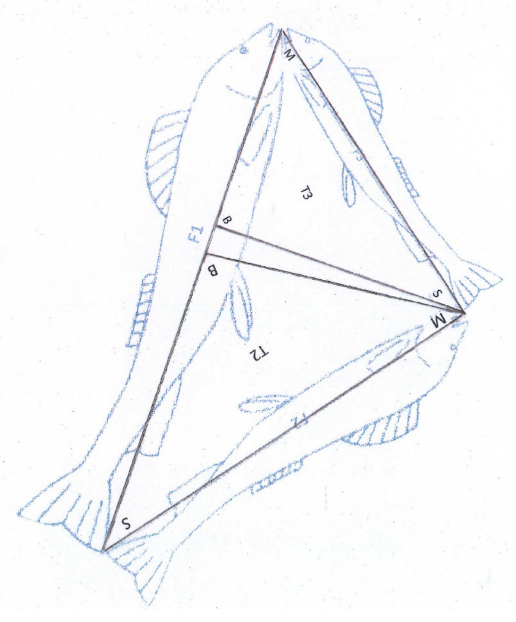


Den lilla triangelns area T_3 förhåller sig till den stora triangelns area T_1 som den lilla fiskens area F_3 förhåller sig till den stora fiskens area F_1.

$T_3/T_1 = F_3/F_1$. På samma sätt gäller att $T_2/T_1 = F_2/F_1$. Då gäller också att $(T_2+T_3)/T_1 = (F_2+F_3)/F_1$

Munvinklarna M, stjärtvinklarna S och bukvinklarna B är lika stora i alla tre trianglarna. M+S < B eftersom B är trubbig.

Nu lägger vi tillbaka fiskarna i sitt utgångsläge.



$T_2+T_3 < T_1$ alltså $F_2+F_3 < F_1$, vilket skulle bevisas.

Cosinussatsen har vi inte använt nu. Men omvänt, med ett litet tillägg, kan vår lösning bli ett bevis av cosinussatsen, t o m av en generalisering av cosinussatsen. Den formuleras såhär: (|F| betyder här arean av F)

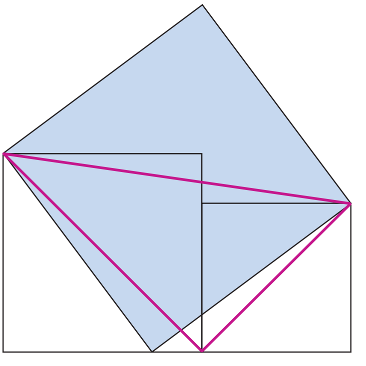
Om tre likformiga figurer F_1, F_2 och F_3 bildar en triangel med vinkel B mellan F_2 och F_3, så $|F_1| = |F_2| + |F_3| - 2 \cdot \cos(B) \cdot G$ där G är geometriskt medelvärde av $|F_2|$ och $|F_3|$.

En ledtråd till den som vill bevisa satsen: I figuren ovan delas tringeln T_1 i tre lika höga trianglar T_2, T_3 och den likbenta triangeln i mitten. Den likbenta triangelns sidolängder (benlängder) är medelvärde av T_1s och T_2s baser medan dess bas är $-2\cos(B) \cdot$ benlängden.

I den av P. R. Bråkenhielm år 1844 utgivna omarbetade översättningen av Elementa formuleras den generaliserade Pythagoras sats så här:

> *XXXI Proposition. Theorem.*
> *Uti rätvinkliga trianglar är figuren, som uppritas på hypotenusan, lika stor med de båda figurerna tillsammantagna, som uppritas på de båda öfriga sidorna, och som med den förra äro likformige och lika ställde.*

4108 Detta kan bevisas på flera sätt men det framgår direkt av den generaliserade Pythagoras sats. Dessa tre kvadrater bildar en rätvinklig triangel, triangels sidor är nämligen kvadraternas diagonaler.



Vad menas egentligen med att ”tre figurer bildar en triangel” eller att ”figurerna är lika ställda”? – Man skulle kunna precisera det med att samma likformighetsavbildningar som avbildar figurer på varandra, avbildar också triangelns sidor på varandra. Men i problemen 4106–4108 och i de generaliserade Pythagoras och cosinus satserna är ett tillräckligt villkor för att veta att det råder samma längdförhållanden mellan figurerna som mellan triangelns sidor.

Observera att Pythagoras sats och cosinussatseen kan generaliseras som ovan enbart när de beskriver samband mellan kvadraternas areor men inte i sina algebraiska former där det talas om kvadrater av tal.

Tack till Johan Sannemo för diskussion kring problemet 4107.

Leo Rubinstein