PROBLEM AVDELNINGEN

I denna problemavdelning adderar och multiplicerar vi ensiffriga tal och jämför resultaten.

4006 Vilket är det minsta tvåsiffriga talet som inte är en summa av tre olika ensiffriga tal?

4007 Skriv 100 med hjälp av de tio siffrorna och valfria operatorer. Varje siffra ska användas exakt en gång.

4008 Skriv 100 med hjälp av de fem a) udda b) jämna siffrorna och valfria operatorer. Varje siffra ska användas exakt en gång.

4009 Vilket är det minsta tvåsiffriga tal som inte kan skrivas i formen $a + b \cdot c$ där a, b och c är tre olika siffror?

4010 För vilka tre (positiva) heltal a, b och c gäller $a + b + c = a \cdot b \cdot c$?

4011 Vilket är det minsta/största värde som uttrycket $a \cdot b + c \cdot d + e \cdot f + g \cdot h + i \cdot j$ kan få om $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ och j är de 10 ensiffriga talen 0 till 9. Kan det bli exakt 100? Vilka värden kommer uttrycken ovan att få om man ersätter varje siffra med dess 9-kompis? Varför?

Svar, ledtrådar, nästan-lösningar och kommentarer

4006 Svar 25. De tre största siffrorna ger $7+8+9=24$. 25 får man aldrig. Diskutera innebörderna av störst, minst, större än och mindre än. Det minsta ”omöjliga” talet följer direkt efter det största ”möjliga”, men är det alltid så? Vilket är det minsta tvåsiffriga tal som inte är en produkt av två ensiffriga? Undersök om talen 10 till 24 verkligen är summor av tre ensiffriga. Kan eleverna avgöra det utan att testa ett tal i taget?

4007 Det finns många möjliga svar, t ex $0+1+2+3+4+5+6+7+8 \cdot 9$. Låt varje elev hitta ett eget uttryck men uppmärksamma de mer originella. Se även artikeln *Skillnaden är två* av Anne Watson och John Mason i Nämnaren 2002:4, fritt tillgänglig på NpN.

4008 a) t ex $(1+3+7+9) \cdot 5$ eller $(5+9) \cdot 7+3-1$
b) t ex $2 \cdot 6 \cdot 8+4+0$ eller $(4+6)^2+8 \cdot 0$

4009 Svar: 40 för positiva siffror och 70 om man tillåter siffran 0. En metod är att använda en variant av såll där bara delbara tal blir kvar: Varje tvåsiffrigt tal n upp till 80 kan skrivas som $n = a + b \cdot 9$ med $a \leq b < 9$. Då blir n delbart med 9 när $a = 0$ och n delbart med 10 när $a = b$. Varje tvåsiffrigt tal n upp till 48 kan skrivas som $n = a + b \cdot 7$ med $a \leq b < 7$. Då blir n delbart med 7 när $a = 0$ och n delbart med 8 när $a = b$. Det finns bara ett tal mindre än 49 som inte kan skrivas på någon av dessa former utan att $a = 0$ eller $a = b$, nämligen 40 som både är delbart med 8 och med 10. Återstår att förvissa sig om att 40 inte på något sätt kan uttryckas som $a + b \cdot c$ med tre olika ensiffriga positiva tal. Ett likadant resonemang ger 70 när $a = 0$ tillåts.

4010 Svar: $1+2+3=1 \cdot 2 \cdot 3$ och det är den enda lösningen, bortsett från att man kan ha samma tre tal i sex olika ordningar. Det kan bevisas på flera sätt, t ex genom att använda hjälpvariablerna $d = a-1$, $e = b-1$ och $f = c-1$. Tar man bort villkoret att talen ska vara positiva så får man ytterligare svar:

$-1+(-2)+(-3)=(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$ samt
$-k+0+k=(-k) \cdot 0 \cdot k$ med specialfallet
$0+0+0=0 \cdot 0 \cdot 0$.

4011 Det minsta är 60, det största 140
$0 \cdot 9+1 \cdot 8+2 \cdot 7+3 \cdot 6+4 \cdot 5=60$
$0 \cdot 1+2 \cdot 3+4 \cdot 5+6 \cdot 7+8 \cdot 9=140$

För beviset kan man använda en hjälpsats:

$a < b < c < d \Rightarrow a \cdot d + b \cdot c < a \cdot c + b \cdot d < a \cdot b + c \cdot d$

Det har beräknats att det finns 16 sätt att få 100, t ex $0+1+2+3+4+5+6+7+8 \cdot 9=100$. Byter man alla siffror mot dess niokompisar så får man oförändrat resultat. Detta beror på att $(9-x) \cdot (9-y) = 81 - 9x - 9y + xy$ samt att $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

Detta ger $((9-a) \cdot (9-b)) + ((9-c) \cdot (9-d)) + ((9-e) \cdot (9-f)) + ((9-g) \cdot (9-h)) + ((9-i) \cdot (9-j)) = 5 \cdot 81 - 9 \cdot 45 + a \cdot b + c \cdot d + e \cdot f + g \cdot h + i \cdot j = a \cdot b + c \cdot d + e \cdot f + g \cdot h + i \cdot j$.

Leo Rubinstein