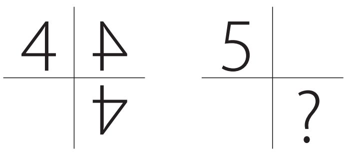
# PROBLEM AVDELNINGEN

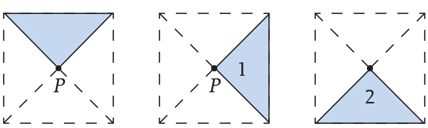
Symmetri går som en röd tråd genom detta nummer av Nämnaren och så är det även här i problemavdelningen. De fyra första är hämtade från olika årgångar av Kängurutävlingen. De tre sista problemen är konstruerade av Bengt Ulin.

3801 Siffran fyra speglas två gånger så som på bilden. Vi gör samma sak med siffran fem. Vad ser vi då i rutan med frågetecknet?




3802 Peter vrider den blå triangeln runt punkten *P* så som bilderna nedan visar. Hur kommer triangeln att ligga efter 17 vridningar?

Startläge




3803 För att fira nyåret 2011 tog Anna på sig en tröja med året tryckt på framsidan. Hon ställde sig sedan på händer framför en spegel. Nina stod på fötterna bredvid Anna. Vilken text såg Nina i spegeln?

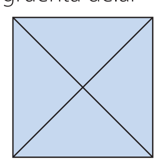

3804 Ett genomskinligt plastark ligger på bordet. Vi skriver bokstaven "F" på arket. Arket vrids 90 grader medurs, vänds sedan uppochner över den kant som nu är till vänster och vrids slutligen moturs 180 grader. Vilken bild ser vi nu?


3805 Du har fem likadana kulor och ett valfritt antal lika långa pinnar som kulorna kan förbindas med. Undersök hur de fem kulorna kan byggas ihop. Vilka symmetrier kan du observera för de olika sammansättningarna du har gjort?

3806 Det svenska alfabetet har 29 bokstäver. Många av versalerna uppvisar spegelsymmetri. Exempelvis har A, E, M och Ö en symmetrilinje och vi kan anse att I har två. Vilka andra bokstäver har två symmetrilinjer och vilka är helt utan?

3807 Betrakta den oändligt utsträckta figur som utgörs av det band i *xy*-planet som begränsas av de två linjerna $x=1$ och $x=5$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Vilka symmetrilinjer finns i denna figur?

3808 En kvadrat skärs i fyra kongruenta delar av två räta linjer som går genom kvadratens mittpunkt och där bildar rät vinkel med varandra. Det finns oändligt många sådana delningar. Om vi i stället utgår från en rektangel med olika sidor, så kan vi åtminstone dela den i fyra kongruenta delar med diagonalerna eller med linjer som är parallella med rektangelsidorna och går genom rektangelns mittpunkt. Finns det fler delningar med räta linjer genom mittpunkten som ger fyra kongruenta delar?

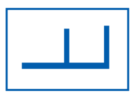


## Svar och kommentarer

3801 

3802 Samma läge som efter en vridning. Efter 4, 8, 12, 16 vridningar är den blå triangeln tillbaka till utgångsläget Vilket resultat ger 160 respektive 170 vridningar?

3803 Nina kommer att se texten som 5011.

3804 

3805 En sammansättning som uppvisar många symmetrier är den triangulära bipyramiden, men den är bara en av många möjliga sammansättningar av kulorna.

*Variationer*: tillåt endast figurer i planet, använd kulor med två eller flera olika färger (exempelvis en grön och fyra röda) eller ändra antalet kulor. Uppgiften kan relateras till organisk kemi och gruppteori.

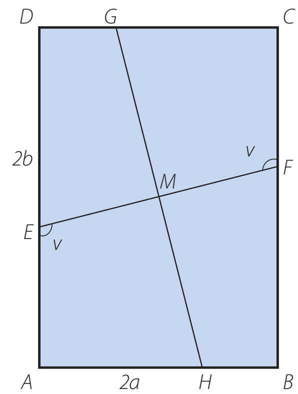
3806 Två symmetrilinjer: I,H,O,X
Inga symmetrilinjer: F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z
(men N, S, Z har rotationssymmetri)

3807 $x = 3$ samt $y = a$ för alla reella tal $a$.

3808 Svaret är nej.
Vi låter f beteckna fyrhörning och låter $2a$ och $2b$ vara längderna hos sidorna $AB$ respektive $BC$ i en rektangel $ABCD$ med mittpunkt $M$, varvid $a < b$.

Vi börjar med att rita en "stående" rektangel med $AB$ som bas och $BC$ som lodrät högersida. $EF$ och $GH$ får vara delande linjer genom $M$, där $E$ och $G$ tillhör sidan $AD$ respektive $CD$. Detta medför att $F$ ligger på $BC$ och $H$ på $AB$.

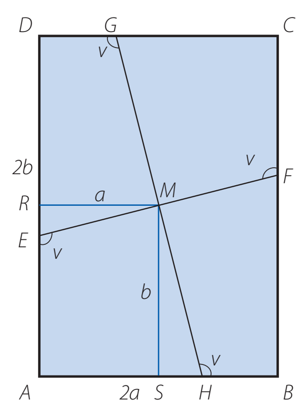
Låt $v$ vara den trubbiga vinkeln $E$ i f($AHME$). För att delningen ska kunna ge kongruenta fyrhörningar måste även de trubbiga vinklarna vid $F$, $G$ och $H$ ha storleken $v$, annars skulle f($AHME$) eller f($BFMH$) få två trubbiga vinklar. Konsekvensen blir nu att $EF$ och $GH$ bildar räta vinklar vid $M$. Se figur 1.




*figur 1*

Vi ska nu se att f($AHME$) och f($BFMH$) inte kan täcka varandra, dvs att de *inte* är kongruenta. Man kan börja försöket med täckning genom att låta de trubbiga vinklarna sammanfalla. I figur 2 är normalerna $MR$ och $MS$ dragna mot $AD$ respektive $AB$. Deras längd är $a$ respektive $b$.

I figuren är triangeln $MSH$ likformig med triangeln $MRE$ och större än denna. Därav följer $|EM| < |HM|$. Därför kan vridning inte leda till att f($AHME$) täcker f($BFMH$). Ej heller kan man täcka f($BFMH$) genom att först vända f($AHME$), eftersom $|BH| < a < |EM|$. Därmed är det nekande svaret bevisat.




*figur 2*