

## DPL 38: Heureka!

Vissa böcker blir aldrig föråldrade. En sådan klassiker är *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande*, med den vassare ursprungliga titeln *How To Solve It – a new aspect of mathematical method*. Boken skrevs 1945 av den ungerskfödde George (György) Polya, sedermera professor i matematik i Zürich och därefter vid Stanford university i USA. Boken har utkommit i flera reviderade upplagor och översatts till en mängd språk. Den blir bara bättre för varje gång man läser den. Tyvärr är den periodvis svår att få tag på.

Bokens tema är att diskutera och presentera ett antal "tumregler" för hur man bör gå tillväga vid äkta problemlösning, dvs då man hanterar frågeställningar som inte genast flaggar för en given och välkänd lösningsprocedur. En uppgift i en lärobok under kapitlet "Andragsgradsekvationer" är i allmänhet inte ett äkta problem eftersom uppgiften just bör lösas med hjälp av – en andragsgradsekvation.

Polya betonar att den matematiska vetenskapen har två sidor, dels den logiskt precisa argumentationen som används vid bevisföring och kontroll av lösningar, dels en mer undersökande och experimenterande sida grundad på intuition och goda gissningar. Den senare som handlar om matematisk problemlösning i "födelseögonblicket" hade inte behandlats i modern tid enligt Polya, som för syftet återinför den nästan bortglömda termen heuristik. Därmed anknyter han till arvet från antiken, tex Pappus, och till stora matematiker och filosofer under renässans och upplysningstid, som Descartes och hans *Regler för tankens vägledning* och Leibniz med sitt planerade storverk om "konsten att uppfinna" vilket tyvärr aldrig blev färdigt. Pappus, som verkade på 300-talet f Kr skriver så här om konsten att uppfinna:

*Den sk heuristiken är, för att uttrycka det kort, en speciell disciplin att användas av dem som efter att ha studerat Elementa önskar förvärva förmågan att lösa matematiska problem, och den är användbar enbart för detta. (Polya, 1945)*

Polya betonar i sin bok att problemlösningens förmågan väsentligen måste uppövas genom praktik. Även hans egna tumregler och principer får mening och djup först i den personliga erfarenheten:

*Problemlösning är en praktisk verksamhet i likhet med tex simning. Vi förvärvar alltslags praktisk skicklighet genom att härma, imitera och därefter öva och praktisera. När man försöker simma härmar man vad andra människor gör med sina händer och fötter för att hålla sitt huvud ovanför vattnet, och slutligen lär man sig simma genom att träna och praktisera.*

*När man försöker lösa problem måste man observera och imitera vad andra människor gör när de löser problem, och slutligen lär man sig lösa problem genom att arbeta med dem.*

Citatet tål att läsas noga. Uppenbarligen räcket det inte med att härma eller kunna kopiera de olika utprovade metoder som är nedtecknade i läromedel eller av läraren. Det enda sättet att bli en bra problemlösare är att dessutom själv lösa problem. Men man kan få god hjälp av de vägledande principer som vuxit fram genom andras erfarenheter.

Det framgår indirekt av citatet att en del av det kunnande man utvecklar är svårt att gestalta språkligt: det har inte det matematiska symbolspråkets precision och konsistens, och inte heller fackspråkets väldefinierade ord och uttryck. Det handlar till sist inte om att lära genom att läsa eller lyssna, det handlar om att lära genom att göra.

Man kan då undra hur Polya ändå lyckades skriva en bok om problemlösandets konst. Svaret är att den skrevs i en friare essäform, typisk för humaniora. En modig och fram-synt man, Polya, år 1945.

Så här i efterhand ter det sig kanske självklart: matematisk forskning och undervisning är skapande mänskliga aktiviteter och har som sådana samma komplexitet som tex konstnärligt skapande inom musik och teater. Det glada kaos och den flexibla disciplinering som kännetecknar alla sådana verksamheter kräver bildmässig och litterär gestaltning, analogier, metaforer, självreflektion, antydningar och god inlevelseförmåga. Precisa mål och metodregler i detta skede dödar all kreativitet. Polya sammanfattar:

*Det är synd om pedanter. De har aldrig förstått de regler som de tillämpar så samvetsgrant och så kritiklöst.*

och vidare

*Att tillämpa en regel på ett otvunget sätt, med omdöme, med uppmärksamheten på de fall där den är användbar och utan att någonsin låta regelns bokstav skymma det syfte för vilket regeln används eller situationens möjligheter, det är att använda sunt förnuft.*

Det är inte lämpligt att lösryckt rada upp Polyas heuristiska regler, de får djup och mening först när du läser hela boken och därtill kombinerar med ditt eget problemlösande. Boken finns på svenska (nyutgiven 2003). Alltså: Köp den, läs den, njut den! (Jag har inte provision.)

Slutligen följer tre problem hämtade från boken:

### 132

Bengt har 10 fickor på sina kläder och 44 enkronor. Han vill fördela dessa kronor så att varje fick innehåller ett olika antal kronor än de övriga. Kan han göra det?

### 133

En rätvinklig triangel har omkretsen 60 cm och höjden mot hypotenusan 12 cm. Beräkna sidorna.

### 134

Gissa den allmänna lag som antyds av dessa exempel. Uttryck lagen med hjälp av lämpliga matematiska beteckningar och bevisa den:

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\3+5 &= 8 \\7+9+11 &= 27 \\13+15+17+19 &= 64 \\21+23+25+27+29 &= 125\end{aligned}$$

*Lars Mowitz*

#### LITTERATUR

---

Polya, G. (2003) *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande*. Norstedts akademiska förlag.