Problemlösning *och* teori i skolan!

Bengt Ulin

Här presenteras tankar och reflektioner kring problemlösning i anslutning till en artikel i Nämnaren nr 4, årgång 20.

Bakgrund

Dan Laksov, professor i matematik vid KTH i Stockholm, varnade i förra numret av Nämnaren för en överdriven satsning på problemlösning i skolan och gav tre exempel på matematikproblem för att illustrera några påståenden, exempel som bl a ”*antyder at det er bedre for en lærer å anvende tiden til å forklare matematiske ideér enn å konstruere oppgaver*”.

Låt mig inledningsvis säga att jag sätter stort värde på Dan Laksovs inlägg. Det är glädjande att några matematikprofessorer engagerar sig i vårt lands skolmatematik. Deras erfarenheter är värdefulla. Några av oss känner Dan från konferenser på Skolverket om de nya kursplanerna, många känner till hans bok om specialarbeten i matematik på gymnasiet.

Det behövs ingen polemik mot hans artikel i förra numret annat än höjda ögonbryn mot den tillspetsade formuleringen i det nyss citerade yttrandet. Nej, Dan Laksov klarlägger flera svaga ställen i matematikundervisningen och gör intressanta jämförelser mellan denna och matematisk aktivitet på akademisk nivå. Syftet med dessa rader är dels att ytterligare belysa de svaga punkterna, dels och framför allt att komplettera Laksovs artikel genom att låta problemexempel av annat slag visa på hur konstruktiv och central problemlösningen kan och borde vara, åtminstone *i skolan*.

Artikelns kärnpunkter

Först de punkter i vilka författaren med all rätt tar fram svagheter i skolmatematiken:

(1) Han instämmer med den kör av pedagoger som ropar på mer matematik och mindre räkning i skolan och skriver bl a: ”Det de fleste kaller matematik i dag er i virkeligheten mekanisk manipulation med tall, geometriske objekter eller funksjoner, hvis oprinnelse er uklar og hvis mål er å nå et uttrykk som finnes i fasit”.

(2) ”I matematikken går teori og problemløsning hånd i hånd”.

(3) ”Det er bare et fåtall skoleproblemer som virkelig utvikler elevenes innsikt i *matematikkens* natur”

Bengt Ulin är lektor vid Högskolan för lärarutbildning i Stockholm och matematiklärare vid Kristofferskolan i Bromma. Han har i böcker, föredrag och tidskriftsartiklar pläderat för problemlösning och induktivt arbetssätt i skolans matematikundervisning.

(4) En överdriven satsning på problemlösning kan skrämma bort lika många som lockas dit.

(5) "En ideell situasjon skulle være att lærerne kan anvende en stor del av tiden til å forklare matematiske ideér og illustrere teorien og inspirere elevene til selvstendig arbeide ved vel valgte problemer, nær knyttet til- og motivert av teorin."

Artikeln rymmer även andra kärnfulla och intresseväckande yttranden, som jag här av utrymmesskäl måste förbigå.

Kommentarer

Punkt (1) är välkänd och ett omfattande material har utarbetats i tidskrifter, böcker, biennaler, biennetter, på Matematikersamfundets utbildningsdagar, etc. Ett genombrott har dock knappast inträffat. Varför? Såvitt jag erfarit har systemen för prov och betyg legat som en död hand över skolan. Betygen har styrt proven, proven har låst kursinnehållen och dessa har styrt undervisningen. Som jag påtalat i en tidigare artikel (Nämnaren 2/ 93) behövs en ny syn på proven. Dessa bör utformas så att de på ett organiskt sätt ingår i problemlösningen och tjänar ett elevsyfte: att komma till självkännedom om den egna förmågan (i stället för att främst bilda ett betygsunderlag). Därmed är vi framme vid punkt (4) och syftet med problemlösningen.
Både från skola och lärarhögskola är det min ständigt växande erfarenhet att eleverna uppskattar spänning och skönhet i matematiken. Det är ju så med oss alla att frågor väcker en sund nyfikenhet. Nybörjarna tycker om gåtor därför att de får tillfälle att gissa, att söka sig fram till ett svar, en lösning. Är det inte så även med oss vuxna att problemställningar känns som stimulerande utmaningar? Elever i sådana åldrar att de kan ta medveten ställning till problemlösningen bejakar alltmer denna som ett övningsfält för tänkandet. De förstår att de genom matematikövningar av sådant slag bygger upp existensfaktorer i sitt inre. Här finns helt säkert en risk att en del elever upplever misslyckanden. Därför gäller det för läraren att dag för dag ge akt på sina elever för att kunna *"differentiera* inom klassens ram" och på så sätt ge varje elev problem av lämplig svårighetsgrad. Till denna typ av problem hör *även* de tillämpningar av typ räkneuppgifter, som genom sin dominans lett till missförhållandena (1).
Till (5) och (2): Jag instämmer i (5) med tillägget att all undervisning, både teori och problemlösning,ska gestaltas ur ett för eleverna väsentligt utvecklingsperspektiv. Att begreppssbiidning och problemlösning går hand i hand är riktigt. Frågan kommer dock före svaret, den väcker intresse. Vare sig problemställningen är av mer begrepps- eller mer problemlösningsartad karaktär, är det fruktbart att inleda med en fråga. I sökande efter ett svar uppkommer ofta behovet att förvärva nya begrepp och kunskaper; eleverna börjar fråga tillbaka, ja fråga efter just det som läraren vill bibringa dem. Vi kan lugnt ta Sokrates som pedagogiskt föredöme.
Nu över till punkt (3): svensk skolmatematik måste satsa maximalt med resurser på en växande flora av värdefulla problem, en flora med många arter, vackra arter, spännande exemplar. Här skulle en vidgad och mer målinriktad samverkan mellan matematiker och pedagoger på fältet ge värdefulla resultat inom en snar framtid. Vi har många skickliga problemkompositörer i landet att tillgå. Inte minst därför att undervisningstiden är begränsad är det viktigt att vi matematiklärare kan förfoga över värdefulla problemsamlingar, så att vi kan ekonomisera med tiden, till förmån för det kvalitativa, för det som givit och ger matematiken dess unika roll i kulturen. I likhet med Dan Laksov vill jag nu låta några problemexempel tala.

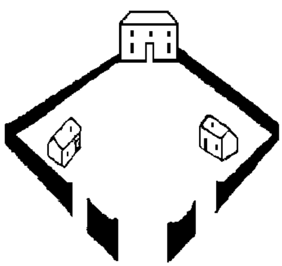
Några problemexempel

Jag börjar med att skriva ner fem problem och väljer avsiktligt sådana som många läsare torde ha sett förut, exempelvis är nr 1 ifrån Nämnaren 3/93.

1

En rektangel delas av två linjer, parallella med var sin sida i rektangeln. I tre delrektanglar har omkretsen skrivits ut, se figur. Vilken omkrets har den fjärde delrektangeln?

2



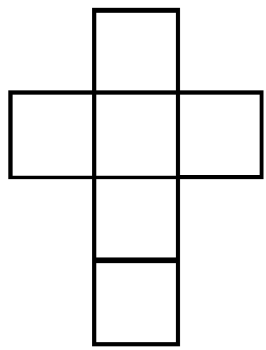
Figuren visar tre hus med var sin ägare. På grund av svår osämja satte ägaren till det stora huset upp staket för en väg till muröppningen längst ner i figuren. Ägaren till vänster inhägnade därpå en stig till den högra utgången och grannen till höger satte staket för en väg till den vänstra utgången. Ingen av vägarna korsade någon av de andra. Hur anlades vägarna? (Problemet är konstruerat av den 9-årige Sam Loyd.)

3

En person går kl 10 från en turiststuga upp till en fjällstation, som han når kl 15. Påföljande dag startar han kl 11 vandringen tillbaka och kommer kl 14 till turiststugan efter att ha följt samma route som dagen fönut. Kan personen på nervägen ha befunnit sig på ett ställe vid samma tidpunkt som dagen före på uppvägen? (Vi vet ingenting angående hastigheter och pauser.)

4

Med mall till en kub avses här en plan kartongfigur omfattande 6 kvadrater, så placerade att figuren kan vikas ihop till en kub. Vidare krävs att varje kvadrat har åtminstone en av sina sidor gemensam med en annan av de sex kvadratema. Hur många sådana mallar har kuben? Vi anser att två mallar är identiska om den ena kan läggas på och täcka den andra.



5

Problemet beträffande bottentalet: vi väljer t.ex. fyra naturliga tal och skriver ut dem i rad. På raden närmast under skriver vi ut angränsande tals summa i mellanrummen mellan de givna talen. Denna addition upprepas tills vi erhåller ett enda tal, bottentalet. Kan man på något enkelt sätt förutsäga om bottentalet blir jämnt eller udda, utgående från ett antal valda (givna) tal? De fem talen i figuren ger som synes ett udda bottental.

3 4 5 1 8

7 9 6 9

16 15 15

31 30

61

Beträffande ”svaren” till dessa problem vill jag först och främst hävda att de inte är oviktiga, men att det matematiska värdet (givetvis) ligger i de erfarenheter och kunskaper som *lösningen* och jämförelse mellan olika lösningar kan ge eleverna. Vad man tillägnar sig är förstås individuellt, men det ligger i dessa problems natur att praktiskt taget alla elever gör vissa erfarenheter av betydelse.

Kommentarer

– I **problem 1** räcker det inte med eget valt exempel. Några elever låter den övre vänstra delrektangelns sidor vara 1 cm resp 0,5 cm och kommer då fram till att den aktuella delrektangelns sidor blir 1,5 cm resp 1 cm vilket ger 5 cm omkrets. I den traditionella skolan ger en sådan lösning poäng noll, eftersom man ju inte vet om svaret blir 5 cm med ett annat val av mätetal för sidorna i en delrektangel. I en tidsenlig skola skulle eleven sporras till fortsatt undersökning och komma till frågan: hur kan jag visa att omkretsen *måste* vara 5 cm, alltså oberoende av vilka sidmått som delrektanglarna må ha? Vi har här ett geometriproblem som kan bli en spännande inkörsport till en erfarenhet av ”algebrans makt”.

– I **problem 2** behöver man inte rita vägarna i den ordningsföljd som Sam Loyd (klurigt nog) vill förleda problemlösaren att göra. Man kan med andra ord *omformulera* problemet och dra en av de andra vägarna först. Åter en erfarenhet av värde för problemlösning av alla slag, inte bara i matematik.

– I **problem 3** har eleverna chansen att komma på en elegant lösning: att flytta tillbaka vandringen nerför en dag, så att den görs av en dubbelgångare på samma dag som vandraren går uppför fjället. De har även möjligheten att rita diagram och få ideer den vägen. Problemet kan bli en fin introduktion till den i matematiken så viktiga, effektiva kontinuitetsprincipen och blir därmed ett exempel på ett problem med nära anknytning till värdefull matematisk teori.

– I **problem 4** har vi ett exempel på en ”självdifferentierande” uppgift. Alla elever blir engagerade, alla kan finna åtminstone någon eller några mallar, andra finner åtskilliga. Från några elever kommer frågan: *Hur många ska det bli?* – Att undersöka detta vore väl en utmaning för klassen? Vi kommer nu in på den spännande frågan: *Hur ska vi någon gång kunna avgöra om vi funnit samtliga mallar?* Det gäller att hitta ett system, med vars hjälp vi kan *ordna,* numrera de mallar vi funnit, så att vi kan peka ut den enligt systemet sista mallen. Ja, här är vi inne på överväganden som appellerar både till fantasi och logik och som står fria från blott och bar kvantitativ uträkning.

– I **problem 5** har vi ånyo en självdifferentierande uppgift. Den ger lagom arbete åt varje elev, oavsett begåvning och kunskaper. De minst försigkomna kommer att få ut vissa delresultat och känna glädje över det; avancerade elever kommer att ta itu med bevis och generalisering. Nyttiga erfarenheter vinkar om hörnet. Exempelvis att man lämpligen gör minimala ändringar i de självvalda sifferexemplen för att lättare och säkrare gissa sig fram till en teori. Sådana lärdomar spelar en roll även i andra ämnen, t.ex. vid analyser i naturvetenskapliga undersökningar.

Jämförelse av exempel

Det är givande att jämföra exemplen ovan med Laksovs exempel. De senare belyser på ett övertygande sätt hur vissa problem kan leda till tidsspillan, nämligen om lösningen är så elegant eller speciell att mycket få elever kan förväntas lösa uppgiften, kanske inte ens under mycket lång tid. Sådana exempel kan däremot vara utmärkta för att i Laksovs anda och via lärarens genomgång illustrera matematisk metod eller idé och begreppsbildning. I de fem exempel vi nyss tagit del av har problemställningen ett bredare spektrum och inbjuder direkt till dialog i klassen, inte minst mellan eleverna. Det finns två ytterligheter i skolan som vi måste se upp med: den ena är den som punkt (1) handlar om, det monotona recepträknandet, den andra är en problemlösning som kan vara intressant, kanske roande, men som hänger i luften och slukar tid. Vad vi behöver är uppgifter som ger möjlighet till aktivitet av skilda slag: gissning, fantasi, konstruktion av exempel, jakt på en bevisidé, logisk bevisföring, utnyttjande av grafiska metoder, spårande av motexempel, undersökning av hur olika villkor inverkar, etc. Med en fond av sådana uppgifter kan undervisningen ge den ”inblick i matematikens väsen” som Laksov efterlyser och te sig meningsfull för alla elever, eftersom den ger dem resurser av existentiell art.

Den enligt min mening hittills främste inom problemlösningens didaktik är Georg Polya, som i genomarbetade verk visat hur väl valda problem utvecklar *både* heuristiskt *och* deduktivt tänkande. Han sätter praktiskt kunnande mycket högt. ”Vad är praktiskt kunnande i matematiken?” frågar Polya och avser då all matematik. ”Förmågan att lösa uppgifter, inte blott rutinuppgifter, utan sådana som kräver en viss grad av oberoende, omdömesförmåga, insikt, originalitet och skapande verksamhet. Därför är det den första och främsta uppgiften för matematikundervisningen på skolans mellanstadier att främja elevernas *sjä/vständiga tänkande* och för detta ändamål särskilt betona det *metodiska arbetet i problemlösningen.”* (I översättning citerat ur boken ”Mathematik und plausibles Schliessen”; kursiveringen är gjord av Polya. En bok med titeln ”Mathematical Discovery” finns nu i Sverige.)

Slutord

Det finns matematikproblem av oerhört växlande grad och art. För ”svaga” elever med dåligt självförtroende är det bra att vi då och då ger problem på gräsrotsnivå, som kräver ett minimalt mått av kunskap. De har då varje gång en ny chans att komma på en idé som löser problemet och kan på så vis stärka självförtroendet. Å andra sidan är det också nyttigt med uppgifter som visar att man inte kommer någonstans inom rimlig tid utan ett visst mått av kunskap, *exempelvis* kännedom om Pythagoras sats, kvadreringsregeln eller exponentialfunktioner. Vad vi ska eftersträva är ett bredare spektrum med utlöpare åt många håll. Då kan vi lyckas med det som en amerikansk professor i matematikpedagogik vid Cornell-universitetet, Avery Solomon, såg fram emot i en intervju i DN (publicerad 93-08-24). Ett arbete ”med att göra matematiken balanserad, så att personlighetens olika sidor får plats i skolsystemet”.

Referenser

Laksov, D. (1993). Problemløsning eller matematiske idéer i undervisningen? *Nämnaren, 20(4)*, 43-46. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Pólya, G. (1969). *Mathematik und plausibles Schiessen*. Band 1. Birkhäser.

Pólya, G. (1963). *Mathematik und plausibles Schiessen*. Band 2. Birkhäser.

Pólya, G. (1966). *Vom lösen matematischer Aufgaben*. Birkhäser.

Pólya, G. (1967). *Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lernen*. Birkhäser.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. John Wiley & Sons.

Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår*. Utbildningsförlaget.