

Problemløsning eller matematiske idéer i undervisningen?

Dan Laksov

Något som ofta förekommer i diskussionen om skolans matematikundervisning är avvägningen mellan problemlösning och teori. I denna artikel poängterar författaren vikten att ha en matematisk teori och framhåller betydelsen av de matematiska idéer som ligger bakom teorin. Han varnar för att ensidigt fokusera matematikundervisningen på problemlösning.

Regning eller matematikk?

Først vil jeg framheve at, med den nuværende skolepolitikken, skulle det kanskje være mer interessant å debattere om vi skal ha matematikk i skolen i det hele tatt, eller om vi bare skal ha *regning*. Utviklingen av matematikkundervisningen har gått mot å gjøre teorien minimal, definisjonene blir mer og mer upresise, aksiomatikken forsvinner og blir erstattet av heuristiske argumenter, intuitive figurer erstatter klare argumenter og problemløsning blir erstattet med regning. Det de fleste kaller matematikk i dag er i virkeligheten mekanisk manipulasjon med tall, geometriske objekter eller funksjoner, hvis opprinnelse er uklar og hvis mål er å nå et uttrykk som finnes i *fasit*. Først når man bestemmer om denne utviklingen skal vendes blir det meningsfullt å diskutere forholdet mellom problemløsning og teori. Ordet *problem* i denne artikkelen får ikke noe sted forveksles med *regning*. Det er ingen med noe innsikt i matematikk som i dag vil argumentere for mer regning.

Dan Laksov är professor i matematik vid KTH i Stockholm. Han har varit föreståndare för Mittag - Lefflerinstitutet.

Mer problemløsning?

Argumentene for å ha mer problemløsning er klare. Problemer vekker elevenes interesse og motiverer dem til å legge ned arbeid, energi og oppfinnsomhet for å finne en løsning. På veien lærer de seg matematikk på en skapende måte. De som lykkes får også styrket selvtillit og høy prestisje i skolemiljøet. De blir betraktet som begavete og blir oppmuntret til å gå videre, blandt annet ved å delta i ulike matematikkkonkurranser og der måle seg mot andre. Problemløsningen oppøver også elevenes analyserende og logiske evner. Dette har de nytte av på alle områder, både ved teoretiske studier i andre emner og ved praktiske anvendelser. Det siste er viktig ettersom et av de sterkeste argumentene for å ha mer matematikk i skolen er at matematikken trener elevene i å tenke logisk og skjerper deres analytiske evner.

Det er imidlertid feil å forveksle evnen til problemløsning med intelligens og matematisk begavelse. Dyktighet til å løse matematiske problemer er en ferdighet som kan læres. Det er kjent at med riktig trening og hårdt arbeide kan forbausende forbedringer oppnåes av denne ferdigheten. Dette har mange nasjoner innsett og før matematiske konkurranser sender de

sine deltagere til stenhårde treningsleire, som kan vare i ukesvis.

Like sikkert som suksess leder til øket motivasjon for matematikk vil mislykkende i å løse oppgaver medføre tvil på den egne matematiske begavelsen og på mulighet til å lære matematikk. Dette til tross for at mange elever som mislykkes har betydelige teoretiske evner. Dermed kan en overdrevet satsning på problemsløsning skremme bort like mange fra matematikken, som den lokker dit. Det er ikke like lett å vekke elevenes interesse for matematikk ved å forklare matematiske idéer og de teoriene disse har gitt opphav til. Arbeidsinnsatsen er større og det tar lengre tid og krever mer motivasjon å lære seg teori. For mange er imidlertid belønningen større og innsikten i matematikk, og matematisk tenkemåte kan få en helt ny dimensjon.

I matematikken går teori og problemsløsning hånd i hånd. Ofte er det vanskelig å skille mellom dem. Problemer gir opphav til idéer og idéene leder ofte til teorier som hjelper til å løse problemer, ofte på en så naturlig måte at det ikke er lett å oppdage at resultatene var problemer. Ingen vil fornekte problemenes store betydning for matematikken, både ved at de peker på viktige spørsmål og ved at de virker inspirerende på matematikere. Hvem kjenner ikke til *firefargeproblemet*, *Riemanns hypotese*¹⁾ eller *Fermats store sats* og vet hvilken betydning disse har hatt for matematikkens utvikling? Den langt største delen av matematikken består imidlertid av teori og det er innlæring av matematiske ideer og utvikling av teoriene som er grunnlagt på disse, som tar den største delen av matematikernes arbeidstid. Svarende til denne, kanskje noe kunstige, oppdeling av matematikken kan også matematikerne klassifiseres som *problemsløser* eller *systembyggere*. Selvsagt kombinerer de fleste matematikere begge evnene, men det finnes ekstremer i begge retninger.

Med matematisk forskning som forbilde

skulle pensum i skolen ha en overvekt mot teori og oppgavene skulle på en naturlig måte være knyttet til de matematiske ideene som ligger til grunn for teoriene. Vi skal selvsagt ikke overvurdere likhetene mellom forskningen og skolematematikken. Imidlertid er det viktig å påpeke den store forskjellen mellom problemene som oppstår i forskningen og de som konstrueres for skolen. De første oppstår naturlig fra en stor mengde erfaring og løsningsmetodene er ukjente. Ofte kan det være vanskelig å formulere problemene riktig og ennå vanskeligere å forutse utseendet av svaret. Typiske skoleproblemer er derimot sterile og kunstige. Løsningen er kjent og løsningsmetodene kan være standard eller være opplagte for en som kan litt teori. Svarene leder som regel heller ikke noe sted. Det er bare et fåtall skoleproblemer som virkelig utvikler elevenes innsikt i *matematikkens natur*. Naturligvis er forklaringen til dette at slike problemer er lettest å konstruere og at det bare er slike problemer elever, med en begrenset teoretisk bakgrunn, umiddelbart kan forstå.

Tre problem

For å illustrere påstandene ovenfor skal jeg gi 3 eksempler på typiske problem som forekommer i skolen og ved konkurranser:

For mange virker det spennende å avgjøre om tallet 7 deler tallet $2^{63} - 1$. De fleste klarer også, etter en tids arbeide, å vise at 7 deler dette tallet. For en person som kjenner til *modulregning* er imidlertid problemet helt uten interesse. De vet at det rekkes med å regne med tallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 og skulle umiddelbart utføre regningen som

$$2^{63} = (2^3)^{21} = 1^{21} = 1 \pmod{7},$$

i klassisk notasjon. En tilhenger av problemsløsning skulle argumentere med at, ved å løse tilstrekkelig mange problemer av typen ovenfor så skulle elevene selv oppdage *modulregningen*, mens en tilhenger av teori skulle synes det var unødig å kaste bort så mye tid med å oppdage noe som har vært kjent i flere hundre år og som står i

1) Se faktaruta i slutet av artikkelen.

alle elementære lærebøker.

Neste eksempel er et blandt en stor klasse liknende problemer.

Vis at det i et en forsamling mennesker alltid finnes to personer som kjenner nøyaktig like mange av de tilstedeværende.

Igjen er dette et problem som de fleste lett klarer. For en person som kjenner til *Dirichlet's skuffeprinsipp*, som sier at om vi legger n objekter i $n - 1$ skuffer så kommer alltid 2 objekter i samme skuff, skulle imidlertid problemet ikke være noen utfordring. De skulle lage en skuff for hvert tall som svarer til antallet personer som en gitt person kjenner. Det er da høyst $n - 1$ skuffer fordi det er umulig at en person i selskapet kjenner alle andre og en annen person i selskapet bare kjenner seg selv. Plasserer vi nu personene i den boksen som svarer til det antallet personer de kjenner må to personer havne i samme boks. Selvsagt er *Dirichlets prinsipp* ikke mye å skryte av som teori, men kjenner man til det kan man uten vanskeligheter løse en lang rekke problemer.

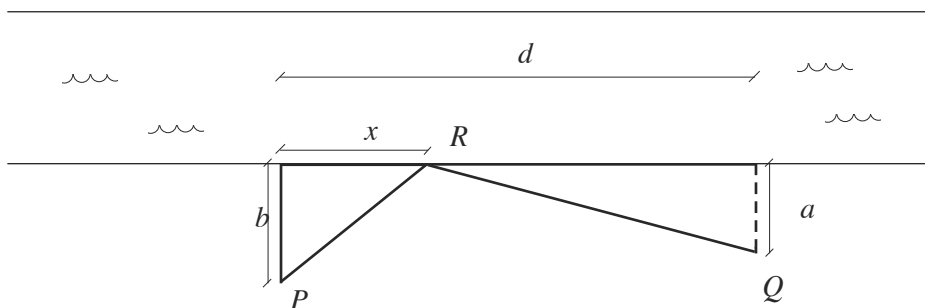
For å redde Peter Gustav Lejeune-

Dirichlet's (1805-59) ære vil jeg nevne at han var en av de mest betydningsfulle matematikerne i forrige århundredet. Selvsagt bærer ikke prinsippet hans navn fordi han oppdaget det, prinsippet er selvkjent, men fordi han brukte det effektivt i mange situasjoner.

I dette eksempelet ville igjen en tilhenger av problemer si at, ved å tenke på problemer av denne typen, vil elevene lære seg logisk og analytisk tankemåte og at elevene også ville oppdage Dirichlets prinsipp. En tilhenger av teori vil påstå at kjennskapen til Dirichlets prinsipp leder til logisk og analytisk tenkning og at det ikke på noen måte er sikkert at elevene ville være i stand til å formulere prinsippet så klart at de ville ha nytte av det i framtidig oppgaveløsning. Elevene er jo i samme situasjon som alle matematikere før Dirichlet, som ikke fikk sitt navn på prinsippet.

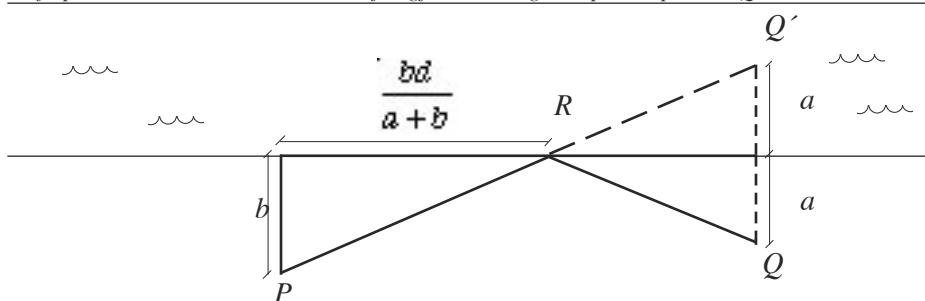
Det tredje, og siste, eksempelet er:

En person skal gå fra en plass P til en plass Q og på veien skal personen gå nedom en elv for å hente vann. I hvilket punkt R på elvebredden skal personen hente vann for



å gå så kort strekning som mulig?

Forsøk på å løse dette problemet kan lede eleven til den vakre idéen å speile punktet Q i elve-bredden og dermed få punktet R som snittet mellom linjen gjennom P og det speilete punktet Q'.



Dermed følger av elementær geometri at

$$\frac{a}{b} = \frac{a-x}{x} \quad \text{så} \quad x = \frac{bx}{a+b}.$$

En person med elementære kunnskaper i analyse vil derimot ikke finne oppgaven inspirerende. Personen vil derivere summen

$$\sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + a^2}$$

av distansene PR og RQ og sette den derivate lik null for å bestemme x . Resultatet vil bli det samme, men sjansene for at personen ser det vakre bildet er liten.

Eksempelene ovenfor antyder at det er bedre for en lærer å anvende tiden til å forklare matematiske idéer enn å konstruere oppgaver. I den enorme litteraturen av matematiske problemsamlinger²⁾ finnes det bare noen få eksempler på problemer som

gir innblikk i *matematikkens vesen*. Resten får matematikken til å fremstå som en fruktløs og isolert lek. En ideell situasjon skulle være at lærerne kan anvende en stor del av tiden til å forklare matematiske idéer og illustrere teorien og inspirere elevene til selvstendig arbeide ved vel valgte problemer, nær knyttet til- og motivert av teorien.

²⁾ En liste over problemsamlinger, og annen matematisk litteratur for gymnasen, finnes i Laksov, D., *Nämnnaren* nr 3, s 41-48. Et utmerket debattinnlegg, med en kommentert litteraturliste, finnes i *Problem solving in the Mathematics curriculum. A report, recommendations, and an annotated bibliography*, sammensatt av Alan H. Schoenfeld. MAA notes number 1, The Mathematical Association of America Committee on the undergraduate program in mathematics.

Firefarge satsen

Firefarge satsen sier at med fire farger kan man fargelegge ethvert kart på en slik måte at to land med en felles grensebit har ulike farger.

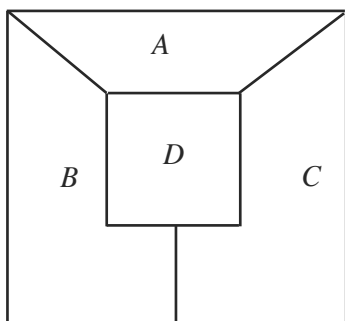


Fig 1

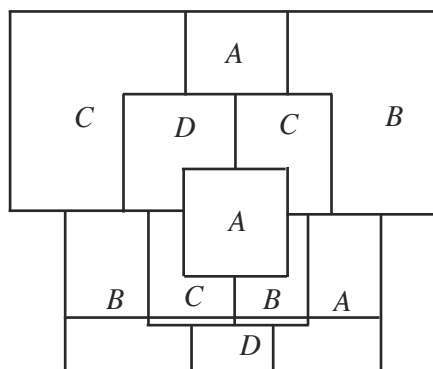


Fig 2

Av fig 1 ser vi at det er umulig med færre en 4 farger.

Det var F. Gutrie som i 1852 observerte at han med 4 farger kunne fargelegge alle kart som han var istand til å konstruere og som derfor formodet at satsen var sann. A. B. Kempe ga i 1879 et feilaktig bevis for satsen. Til tross for feilen bidro beviset vesentlig til den endelige løsningen av problemet. Blandt annet bidro det til at P. J. Heawood, som var den første som påpeket feilen (i 1890) kunne vise at det rekker med 5 farger for å fargelegge ethvert kart. Firefarge satsen ble bevist av K. Appel og W. Haken i 1976. Det er interessant at beviset bruker datorkjøringer for å verifisere at endel av det store antallet spesialtilfeller. På grunn av dette var det mange matematikere som stilte seg skeptiske til beviset. Dette viser hvor uvante matematikere er ved bruken av datorer og at datorene spiller en helt annen og mindre rolle for matematikken enn legmann tror.

Riemann's hypotese

Riemann's hypotese betraktes av de fleste matematikere som det viktigste uløste problemet i matematikken. Det ble opprinnelig formulert som at alle ikke trivielle nullpunkter for Riemann's zeta funksjon har reell del lik $1/2$. Dette er ikke spesielt intuitivt, eller lettforståelig, men henger sammen med fordelingen av primtallene på en fundamental måte. Det har vært kjent, minst siden Euklid, at det finnes uendelig antall primtall. Imidlertid kan man få mer presis informasjon om primtallene. C.F. Gauss (1777-1855), blandt andre, observerte (15 år gammel) at i et intervall

omkring et tall x finnes det omkring $\frac{x}{\log x}$ primtall. Om $\pi(x)$ er antallet primtall mindre enn et gitt tall x så følger det at $\pi(x)$ er asymptotisk lik funksjonen

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\pi(x)} = 1.$$

det vil si

Dette ble vist i 1896 av J. Hadamard (1865-1963) and C.-J. de la Vallée Poussin (1866-1962). Ettersom det følger av l'Hospitals regel at $\pi(x)$ er asymptotisk lik

$\frac{x}{\log x}$, finnes det, for store tall x , omtrent $\frac{x}{\log x}$ primtall mindre enn tallet x .

Riemann's hypotese kan formuleres som:

Det finnes en konstant c slik at vi for alle x har

$$|\pi(x) - \frac{x}{\log x}| < c\sqrt{x} \log x.$$

Dette gir en meget presis oppskatning av $\pi(x)$ for store verdier av x .

Fermats store sats

Kanskje det mest kjente av alle matematiske problemer er Fermats store sats, det vil si Om n er et positivt tall større eller lik 3 så finnes det ikke tre positive heltall x , y og z slik at

$$x^n + y^n = z^n.$$

Påstanden er så enkel at alle kan forstå den. Spesielt fascinerende er den fordi Fermat skrev i sin kopi av Diophantus verk at han hadde funnet et bemerkelseverdig bevis som marginalen var for smal til å romme. Til tross for dette, og til tross for at mengder av profesjonelle matematikere og amatører har prøvd å bevise satsen, er den fremdeles uløst. Det finnes imidlertid en oppsjø av feilaktige bevis. Det mest berømte ble gitt av E.E. Kummer (1810-1893). Til tross for feilen har Kummers idéer ledet til store framsteg i matematikken. De siste månedene har det sirkulert et rykte i pressen om at A. Wiles har bevist satsen. Det er nu mye som tyder på at også dette beviset inneholder en feil. Dette viser hvor komplisert matematikken har blitt. Til tross for at en rekke av de fremste matematikerne har arbeidet måneder på å forstå et bevis er det fremdeles uklart om det finnes hull i beviset.