PROBLEM AVDELNINGEN

Problemen har vi fått från Alexander Chapovalov, som använt dem i den studiecirkel i matematik han leder på Sonja Kovalevsky-skolan.

3007 **Söndagsmatematik**
Kan det vara 5 söndagar i samma månad? Kan det rent av vara 6?

3008 **Siffersumma**
Kan siffersumman av ett tresiffrigt tal vara lika med 22? Hur är det med 28?

3009 **Sifferprodukt**
Kan sifferprodukten av ett tresiffrigt tal vara lika med 22? Hur är det med 28?

3010 **Övergångsfunderingar**
Ett antal ishockeyspelare gick från lag A till lag B. Kan det hända att medelåldern blev större i båda lagen?

3011 **Tänk fyrkantigt**
Kan man dela upp någon rektangel med omkretsen 26 cm i exakt 12 små kvadrater med sidan 1 cm?

3012 **Klassisk myntvägning**
Tio mynt ser likadana ut, men man vet att nio är lika tunga medan ett mynt är lättare. Kan man med säkerhet hitta det lätta myntet efter bara två vägningar på en balansvåg utan vikter?

3013 **Lyckliga biljetter**
En bussbiljett kallas lycklig om man kan sätta in plus-, minus-, gånger- och divisionstecken och paranteser mellan siffrorna så att resultatet blir 100. Är biljetten 456123 lycklig?

3014 **Såga schack**
Från ett schackbräde sågar man av
a: en ruta från ett hörn;
b: två rutor från två nedre hörn;
c: två rutor från två motsatta hörn.
Kan man dela in det stympade brädet i rektanglar som var och en består av två rutor?

3015 **Schackräkning**
Dima och Alan spelar ofta schack mot varandra. De antecknar samtliga resultat. Under 2002 vann Dima fler spel än hon förlorade under vilket som helst par av på varandra följande månader.
a: Kan det hända att Alan vann fler spel än Dima sammanlagt under 2002?
b: Kan det hända att Alan under de första 11 månaderna vann fler spel än Dima?

3016 **Rader och kolumner**
Kan man arrangera tal i en rektangulär tabell så att
a: i varje kolumn blir summan större än 10 medan i varje rad blir summan mindre än 10?
b: i varje kolumn blir summan positiv medan i varje rad blir summa negativ?

3017 **Rektangulera kvadraten**
Är det möjligt att dela en kvadrat med måtten 10 gånger 10 i rektanglar med måtten 4 gånger 1?

Kommentarer

3007 En månad innehåller maximalt 31 dagar. För att få plats med maximalt antal söndagar kan man prova med att låta den första dagen i månaden vara en söndag. Då är den åttonde dagen en söndag, och så vidare.

3008 Den minsta siffersumman av ett tresiffrigt tal är $1+0+0=1$ och den största är $9+9+9=27$.

3009 Vårt tal måste kunna faktoriseras som en produkt av tre tal mellan noll och nio. En primtalsfaktorisering ger oss svaret: $22=2\cdot 11$ respektive $28=2\cdot 2\cdot 7$.

3010 Vad händer om lag A består av spelar som alla är över 50 år och lag B av spelare under 20 år och sedan A:s yngsta spelare går till B?

3011 Frågan kan omformuleras till; finns en rektangel med arean 12 cm^2 och omkretsen 26 cm? Prova med att låta rektangelns ena sidan vara 1.

3012 Vid en vägning kan vi maximalt få information om tre mängder, en mängd i vardera vågskålen samt den mängd som ligger vid sidan av. På en vägning kan vi hitta ett tungt bland tre mynt. Vi väger två och om det ena är tyngre är vi klara. Om de väger lika har vi det tyngre myntet vid sidan av. För att vägningen skall ge oss information måste de två mängderna i vågskålarna innehålla lika många mynt. Har vi två vägningar på oss måste vi alltså dela upp vår mängd i tre delar som vardera ej innehåller fler mynt än tre. Med tio mynt går ej detta, minst en hög kommer innehålla fyra mynt. Därför krävs minst tre vägningar för att hitta ett tungt mynt bland tio.

3013 $4\cdot 5\cdot(6\cdot 1+(2-3))=4\cdot 5\cdot 5=100$

3014 Ett (helt) schackbräde har $8 \times 8 = 64$ rutor. Tar man bort en kan det knappast gå att dela upp det i 2×1-bitar eftersom 63 är ett udda tal. För de andra två problemen kan det hjälpa att tänka på att varje 2×1 bit består av en svart och en vit bit. Tror man att svaret på någon av frågorna är JA är det en bra ide att pröva om man får ihop det, möjligen på ett 4×4-bräda först.

3015 När det gäller fråga a, fundera på vad vi får om vi summerar antal matchvinster för alla par av månader som börjar med en udda månad. För fråga b, prova att göra en modell med endast ”två månader på året” där Dima vinner om vi räknar båda (dvs det enda paret av månader) men vi vill att Alan skall vinna den första. Om Alan vinner första månaden med 1-0 medan Dima den andra med 0-2 går det ju. Kan du generalisera detta till fyra månader (där vi summerar de tre första) och sedan till tolv månader?

3016 a Varför inte prova med en rektangel med en kolumn och två rader?

b Ett motsägelsebevis hjälper oss: Antag att vi har en tabell där summan av talen i varje kolumn är >0 och summan av talen i varje rad är <0. Om vi summerar ”kolumnsummorna” får vi då ett tal >0. När vi gör så får vi också summan av alla talen i hela tabellen. Summan av alla talen kan vi också få genom att addera alla ”radsummor”. Men, dessa ska vara <0 och summan är då också <0. Alltså en motsägelse. Ett tal kan inte både vara <0 och >0. En tabell enligt antagandet kan inte existera.

Går a) att lösa med en kvadratisk tabell?

3017 Pröva först. Det går att visa att detta är omöjligt. Färglägg rutorna i kvadraten i ”diagonala ränder” med fyra olika färger i ordning, t ex röd, blå, gul, grön, röd, blå … se figur. Då kommer varje inplacerad 4×1-rektangel täcka exakt en ruta av varje färg oavsett om rektangeln placeras vertikalt eller horisontellt. Antalet rutor av de fyra färgerna blir olika, så att täcka kvadraten helt går inte.