Lars Mouwitz

DPL – en fråga för alla!

Syftet med Dialoger om problemlösning är att ge lärare möjlighet att utveckla sitt matematikkunnande genom att fritt och avspänt diskutera utmanande och intressanta problem tillsammans med kollegor. Vi uppmanar alla lärare som undervisar i matematik att bilda DPL-grupper på er skola som ett led i ett långsiktigt och angenämt lokalt utvecklingsarbete.

Ett matematiskt problem i skolmatematiken består ofta av en beskrivning av en situation, eller angivande av några villkor, samt en fråga eller en uppmaning till den tänkte problemlösaren. Själva frågan ”lotsar” problemlösaren både vad gäller fokus och själva den matematiska aktivitet som ska tränas, testas eller uppmuntras. Det är till exempel en avsevärd skillnad på uppgiften att *ge exempel* på att Pythagoras sats stämmer och att *bevisa* att den stämmer. Det leder också till olika aktivitet att fråga *om* något gäller jämfört med att visa *att* något gäller.

I allmänhet gäller här ett oformulerat ”kontrakt”, nämligen att problemställaren inte uppmanar problemlösaren att göra något som egentligen är omöjligt. Vi skriver inte *Ge exempel på ett primtal mellan 53 och 59*, eftersom det inte finns något sådant, istället ”signalerar” vi genom att skriva *Undersök om det finns ett primtal mellan 53 och 59*. I kontraktet ingår också att den problemsituation eller de villkor som utgör bakgrund inte är motsägelsefulla. Vanligen ber vi inte en elev att beräkna t ex diagonalen i en rektangel med omkretsen 20 cm och arean 26 kvadratcentimeter, eftersom en sådan rektangel inte existerar!

Problemställningarna är alltså tillrättalagda så att de är möjliga och frågorna ”lotsar” eleven på så sätt att den uppgift som eleven uppmanas att genomföra också är möjlig att genomföra. I båda dessa avseenden skiljer sig skolmatematikens problemlösning från ”verklig” problemlösning, eftersom en konstruerad matematisk modell mycket väl kan visa sig innehålla motsägelser samt att man mycket väl kan få krav från t ex en arbetsgivare att lösa problem som inte är lösbara.

Att problemställningar inom skolmatematiken på detta sätt är tillrättalagda har ett visst pedagogiskt värde eftersom det förenklar elevens arbete och styr in det på vissa av läraren önskvärda aktiviteter. Men samtidigt skolas eleven indirekt till ett okritiskt sinnelag och ”lotsningen” gör att analyserande helhets- och rimlighetsbedömningar lyser med sin frånvaro.

Intressant är att det är först i Högskoleprovets NOG-uppgifter som intresset riktas mot frågeställningens villkor och i vilken mån dessa är tillräckliga för att ett problem ska vara lösbart. Inte heller här ställs dock frågan huruvida det finns motsägelsefulla villkor.

Vinst eller förlust?

Genom ett misstag fick en DPL-uppgift i Nämnaren nr 3 i år karaktären av ett ”kontraktsbrott” nämligen uppgiften nr 45 *Vinst eller förlust?* Uppgiften är i själva verket omöjlig att lösa, vilket den uppmärksamme DPL-aren kanske insett. Hade den lotsande frågan varit *Är detta möjligt?* istället för som nu *Hur är detta möjligt*? hade det däremot varit en kontraktsenlig uppgift, om än något trivial. Vår uppgiftslämnare, Mikael Passare formulerar det så här:

> *Det skulle ha stått ”varje 5-månaders period, till exempel januari-maj och mars-juli”. Sex går ju jämnt upp i tolv. Om det var förlust både första och andra halvåret måste till och med farbror Joakim inse att det var förlust hela året.*

Härmed har ni har alltså fått en ny (och nu kontraktsenlig!) uppgift som avslutas med *Hur är detta möjligt?* Nu finns det alltså en lösning, kanske finns det flera. Ni som har sökt ett svar till den felaktigt formulerade varianten kanske gav upp, eller också bytte ni perspektiv och utvecklade en annan typ av matematisk förmåga, nämligen den kritiskt ifrågasättande. Att genomföra denna ”synvända” kan vara känslomässigt svårt eftersom man måste börja misstänka ett ”kontraktsbrott” från någon som man uppfattar som en auktoritet. I DPL-uppgiften nr 49 *Snurriga cirklar* i detta nummer finns ett tankeväckande exempel på just detta. Ett annat spännande exempel kan ni finna i artikeln *En ohanterlig parallellogram* av Per Häggmark i Nämnaren nr 1, 2000. Den parallellogram som är ”huvudperson” i denna artikel existerar i själva verket inte, trots att frågeställningen kan besvaras med ett till synes rimligt svar.

Frågor i fokus

Ett sätt att träna elevers kritiska förmåga är att t ex ersätta frågor av typ *Visa att* med *Undersök om* och *Beräkna* med *Försök beräkna*. En mer generell metod är att diskutera det oformulerade ”kontraktet” med eleverna och annonsera att de (åtminstone vid vissa tillfällen) inte kan räkna med att det gäller! Allra bäst är om de så småningom alltid gör en bedömning vad gäller uppgifters lösbarhet.

De fyra DPL-problemen har denna gång fokus på sättet att fråga och hur frågan lotsar problemlösaren till olika slag av matematisk aktivitet inom kontraktets ramar. En viss vaksamhet hos DPL-aren kan här vara bra. Detta innebär inte att det är oväsentligt att lösa problemen, tvärtom ger även detta utmärkt bränsle för fortsatta Dialoger om problemlösning!

DPL 12

48 Intressant men fel

De gamla babylonierna lär ha använt en intressant, men felaktig, formel för att beräkna arean av fyrhörningar. De beräknade de två medelvärdena av fyrhörningens motstående sidolängder och multiplicerade sedan de två resultaten.

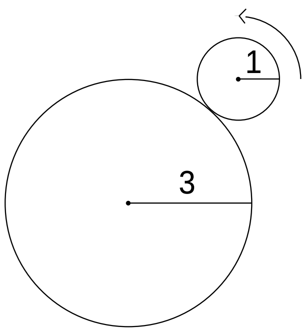
a) *För vilka fyrhörningar stämmer formeln exakt?*
b) *För vilka slag av fyrhörningar stämmer formeln som sämst?*
c) *Kan du finna en korrekt areaformel där bara de fyra sidolängderna ingår?*

DPL fortsätter på nästa sida!

49 Snurriga cirklar

Följande flervalsfråga fanns som uppgift vid ett inträdestest till college i delstaten New York i början av 80-talet. Omkring trehundratusen studerande deltog i testet.

Radien i den lilla cirkeln är en tredjedel av radien i den stora cirkeln. Med början i det läge som visas i figuren rullar den lilla cirkeln runt den stora. Efter hur många varv har den lilla cirkeln åter medelpunkten vid utgångsläget?



a) 1,5 varv b) 3 varv c) 6 varv
d) 4,5 varv e) 9 varv

När provet var färdigrättat lade någon av rättarna märke till att tre studerande hade skrivit att inget av svaren var rätt. En av dem hade också bifogat ett korrekt och bestickande resonemang, vilket ledde till att denna uppgift fick rättas om för alla deltagarna (till en kostnad av 100 000 dollar!).

Något att samtala om:

- *Hur många varv snurrar egentligen den lilla cirkeln?*
- *Vad krävs för att en elev ska våga och kunna ifrågasätta de fem flervalsalternativen?*
- *Bör vi (och kan vi) fostra elever att bli så kritiskt ifrågasättande?*
- *Kan man tänka sig flervalsfrågor som inte är lika lotsande som ovanstående?*

50 Sannolika pojkar

Du är efter många års bortovaro på besök i din födelsestad och möter där en gammal kvinnlig skolkamrat, som är ute och promenerar med sin son. Under samtalets gång framkommer att hon har ytterligare ett barn, vars kön dock inte nämns.

Diskutera om följande tre frågor bör ha samma svar och i så fall vilket eller vilka:

a) Vad är sannolikheten att detta barn är en pojke?
b) Vad är sannolikheten att även detta barn är en pojke?
c) Vad är sannolikheten att båda barnen är pojkar?

Detta problem är hämtat från en idé av Bengt Lund, pensionerad gymnasielärare från Arvika

51 Konvexa kroppar

En hexaeder är en kropp som begränsas av sex sidoytor bestående av månghörningar, som ej behöver vara regelbundna. Att kroppen är konvex innebär ungefärligen att den inte har några ”inbuktningar”; en linje mellan två godtyckliga punkter på dess yta har inte någon del utanför kroppen. Ett rätblock är en sådan konvex hexaeder liksom en pyramid med en femhörning som bas. Olika typer av hexaedrar består av olika kombinationer av månghörningar, t.ex. betraktas alla pyramider med en femhörning som bas som samma typ, oberoende av femhörningens och sidotrianglarnas utseende.

Fundera på vilken typ av ”lotsning” vad gäller elevaktivitet och matematiskt tänkande följande frågor ger och lös uppgifterna:

1) *Finn ytterligare en typ av hexaeder.*
2) *Finn minst en typ av hexaeder till.*
3) *Finn så många typer av hexaedrar du kan.*
4) *Finn alla de N typer av hexaedrar som finns. (N står för antalet)*
5) *Finn alla typer av hexaedrar som finns.*
6) *Finn alla typer av hexaedrar som finns och visa att det är alla.*