Mats Andersson

Chokladkakeproblemet igen – igen!

När man väl hittat en lösning på ett problem och njutit av den, kan man ha glädje av att fundera vidare över enklare och vackrare lösningar och över generaliseringar. Här behandlas chokladkakeproblemet igen, med denna avsikt.

En kaka är chokladglaserad på alla sidoytor utom den kvadratiska botten. Tomtemor vill skära kakan i fem bitar så att var och en av de fem medlemmarna i familjen får samma mängd kaka och lika mycket glasyr. Alla snitt ska vara vinkelräta mot kakans översida och varje tomte ska få sin del som en sammanhängande bit. Hur ska det gå till?

I detta fall kan man fråga sig om det går med 6, 7 eller 8 bitar etc. Ja, eftersom det är lätt att lösa med 4 bitar så borde väl 8, 16 osv också vara jämförelsevis lätt, eftersom man kan utnyttja symmetrier. Man kan uttrycka följdproblemet som att man vill få reda på *varför* det går med 5 bitar; om det har någon betydelse att kakan är kvadratisk? Inte sällan är det i själva verket lättare att lösa ett "svårare", dvs mer allmänt, problem, bl a eftersom det finns mindre onödig information och därför färre möjligheter att fastna i funderingar kring saker som egentligen inte har relevans för frågeställningen.

Mats Andersson, professor i matematik på Chalmers tekniska högskola

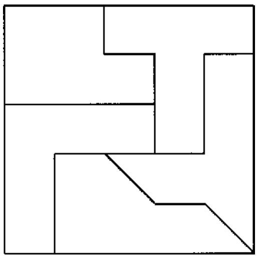
Är kakan platt?

Tomtemor inser ganska snart, liksom säkert de flesta som hittat en lösning, att det för problemets skull inte spelar någon roll att det är glasyr på ovansidan. (För ätandet är det en annan sak.) Detta beror på att om hon lyckas dela på något sätt så att alla får lika del av kakan – kom ihåg att snitten ska vara vinkelräta mot ovansidan – så får alla också lika del av toppglasyren. Därför kan hon anta att det bara finns glasyr på kanten – skulle hon däremot säga detta till nissarna skulle de nog protestera. Vidare är mängden kantglasyr på en given bit proportionell mot längden av kakans kant som ingår i denna bit. Ett villkor är också att bitarna ska vara sammanhängande, men det är de om och endast om deras ovansida är sammanhängande. Alltså är det hela ett tvådimensionellt problem som hon formulerar så här:

Givet en kvadrat, dela in denna i fem sammanhängande bitar med lika areor och lika delar av kvadratens rand.

Hon stannar upp här och blir plötsligt medveten om att hon har övergått till att kalla kvadratens sidor tillsammans för dess rand, som hon har lärt sig i någon matematikbok hon läst någon gång för nöjes skull, när de andra legat och sovit.

Det är ganska klart att problemet är skalinvariant, dvs att kvadratens storlek inte spelar någon roll; om sidlängen är r ska alltså varje bit ha arean $r^2/5$ och längden $4r/5$ av kvadratens rand. En konkret strategi är därför att dela in randen i 5 lika delar och sedan "fortsätta dessa inåt" på ett sådant sätt att motsvarande delar får rätt area. Om vi tänker att sidlängden r är 5, så blir alltså varje randdel 4 och varje area 5. Tex kan det se ut så här:

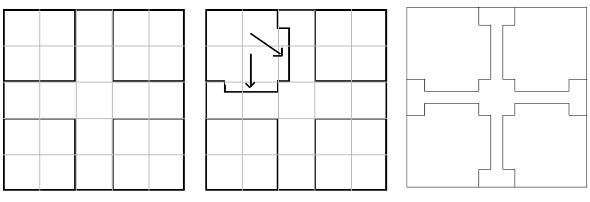


Ett praktiskt problem

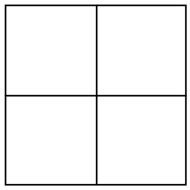
När tomtemor ritar upp detta på en bit smörpapper förstår hon att även om hon lyckas skära kakan enligt ritningen, kommer hon aldrig att kunna övertyga de övriga om att de verkligen får lika stora bitar. Nissarna har ännu inte läst geometri i skolan och tomtefar har nog glömt det han möjligen lärt. Hon finner det därför påkallat att hitta en lösning så att alla får likadana, kongruenta, bitar. Hon inser dock ganska snart att detta inte är möjligt, eftersom det bara finns fyra hörn (Läsaren kan försöka visa detta!).

Däremot kan hon hitta en lösning där åtminstone fyra av bitarna är kongruenta, t ex så här:

Börja med att markera en kvadratisk bit kring varje hörn, med sidlängd 2 och area 4; utöka sedan varje hörnbit så att arean blir 4+1, t ex genom att "tjocka" 3 längdenheter med 1/3. Se pilarna!



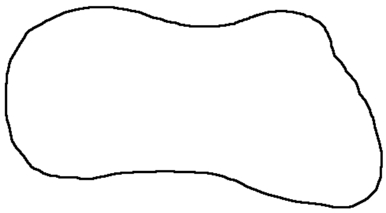
Då får de andra i familjen likadana bitar, med sammanhängande glasyrkant dessutom, och tomtemor får som så ofta ta resten. Men det praktiska problemet att skära till bitarna återstår, likväl som att övertyga de andra om att hon inte får mer av något, så den luttrade tomtemodern väljer istället att skära som i denna figur:



Hon låter sig nöjas av eventuella smulor som uppstår, mot att hon i gengäld får avnjuta sitt kaffe i lugn och ro, stolt över att hon åtminstone i teorin har löst problemet.

En godtycklig kaka och en godtycklig familj

När de andra tomtarna ätit sina bitar och lämnat henne ifred börjar hon fundera över varför det var möjligt med fem bitar; om det hade gått lika bra om hon haft en godtyckligt stor familj. Eftersom hon redan i det faktiska fallet fick nöja sig med en pragmatisk lösning samt några smulor, och låta den teoretiska lösningen vara för hennes egen tillfredställelse, så börjar hon grubbla över problemet med en mycket stor familj. Eftersom det då känns hopplöst att hålla reda på den speciella geometrin hos kakan, dvs att den var kvadratisk, så börjar hon tänka sig en kaka med mer godtycklig form; med förbehållet att den saknar hål:



"Kaka utan hål", på matematiskt språk är området (kakan) enkelt sammanhängande.

Fallet att kakan har t ex ett hål lämnar vi till den intresserade läsaren att klura ut.

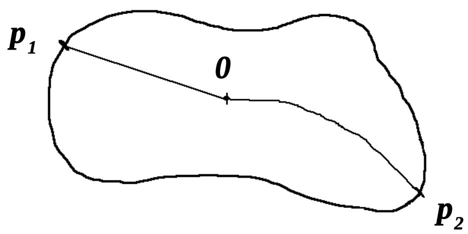
Hon inser att det under dessa allmännare förutsättningar inte alls är självklart hur man ska göra ens om man bara ska dela upp

i två eller säg tre bitar med lika kantlängder och areor. Hon hämtar påtår och sitter länge och begrundar problemet och ritar några figurer. Slutligen sträcker hon sig efter ett par nålar och en bit mycket elastisk resår, ropar på tomtefar och presenterar stolt följande lösning. Hon ritar upp ett område som i figuren, tittar upp på tomtefar och säger:
– Här är en kaka som vi vill dela i två lika delar så att båda delarna dessutom har lika mycket glasyr; vi säger att det bara finns glasyr på kanten.

Tomtefar muttrar om att nissarna skulle bli sura om de inget får, och att han minsann vill ha glasyr även på ovansidan, men tystnar när han ser att tomtemors entusiastiska uppsyn börjar förmörkas något. Han river sig i skägget, tiger och anlägger en intresserad min; en förmåga som framgångsrikt har burit honom genom hela skolgången; och genom ett vid det här laget rätt långt äktenskap med för den delen.

Tomtemor märker först ut punkter p_1 och p_2 på randen så att randbitarna mellan dem blir lika långa,se nedanstående figur. Tomtefar kan inte alls begripa hur hon kan veta att de får rätt längd men finner för gott att inte fråga; kanske kan man använda ett måttband?

Sedan sätter hon ut en punkt 0 inne i kakan och drar en kurva från p_1 till 0 på måfå. Hon sätter sedan ned en nål i 0 och en i p_2.



”Poängen är nu” säger hon lätt docerande ”att man kan dra en linje från p_2 till 0, inte nödvändigtvis en rak linje , men någon linje, så att de två erhållna bitarna man får samma area”.

Utan att invänta någon reaktion från maken spänner hon resåren mellan nålarna vid 0 och p_2.

”– Om jag först håller den så här lite på måfå och har tur så blir bitarna lika stora och då är ju allt klart. Antag nu att att biten till höger om första snittet är för stor. Om jag då drar resåren åt vänster så att den nästan följer längs randen (glasyrkanten) tillbaks till p_1 och sedan nästan längs med första snittet, så blir förstås arean mycket liten. Någonstans på vägen måste alltså arean vara lika stor som den andra, och jag delar därför tårtan längs resåren i detta läge.

Om istället biten till höger om snittet är för liten från början så drar jag resåren åt andra hållet tills biten blir tillräckligt stor.”

Mycket nöjd med sin presentation tar hon en klunk av kaffet, som vid det här laget hunnit bli rätt ljummet. Tomtefar känner sig inte alls så övertygad; hur kan hon veta när resåren innesluter ett område med den önskade arean? Vet hon inte det vet hon ju inte var hon ska skära. Nu fungerar det ju i alla fall inte med ett måttband, eller? Han ska just till att försiktigt ta upp detta men räddas av att nissarna börjar bråka på övervåningen så han får en anledning att rusa iväg. Tomtemor som känner sin make bättre än han tror och anar hans invändning är lika glad att han försvinner; hon skulle ändå inte brytt sig om att försöka övertyga honom om att hennes teoretiska lösning samtidigt ger henne en idé om hur hon skulle kunna gå tillväga i ett konkret fall, där kakan har en beskrivbar geometri, t ex en kvadrat. Vad tror du?

Tomtefar slår igen dörren efter sig och ron lägrar sig åter kring tomtemor. Hon funderar vidare, och kommer snart på att det går lika bra med tre bitar. Man delar först upp randen i tre lika delar med tre punkter p_1, p_2 och p_3, drar sedan ett snitt på måfå från p_1 till 0, och hittar sedan en linje mellan p_2 och 0 så att biten till höger om första snittet får en area som är precis en tredjedel av hela kakans area. Sedan hittar man en väg mellan p_3 och 0 så att biten till höger om andra snittet får samma area. Sista biten måste nu med nödvändighet också få samma area, och man är klar.

Det står också helt klart för tomtemor att samma resonemang fungerar lika bra för fyra, fem och sex bitar osv. Hon associerar svagt till begreppet induktionsbevis som hon stött på någon gång under sina nattliga studier, men fullföljer inte tankegången. Hon är fullt nöjd med att själv ha övertygat sig om att hennes problem gick att lösa för ett godtyckligt antal bitar, och går och värmer på kannan för en tretår.

Hon gör sig inga illusioner om att försöka förmedla sin slutgiltiga lösning till de andra tomtarna; hon orkar inte ens tänka på alla olika invändningar som kan dyka upp. Istället kommer hon att tänka på den gamla gradskivan från skolan hon hittade när hon julstädade på vinden, och bestämmer sig för att högtidligt meddela sin familj att hon i julklapp önskar sig en cirkulär kakform i stället för den kvadratiska. Med dessa redskap kommer hon att praktiskt kunna lösa kakproblemet utan invändningar från de andra tomtarna, även efter eventuell tillökning av familjen, och hon kan få mer ro för fortsatta egna funderingar.

Tomtemors argument visar följande lite mer generella påstående:

> *Givet en sammanhängande kaka utan hål, dvs ett enkelt sammanhängande område, med area a och randlängd, dvs glasyrlängd, l samt givna positiva tal $l_1, \ldots, l_n$ och $a_1, \ldots, a_n$ sådana att $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = l$ och $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$. Då finns det en uppdelning av kakan i sammanhängande bitar $K_1, \ldots, K_n$ med delareor $a_1, \ldots, a_n$ och delar av längder $l_1, \ldots, l_n$ av glasyrkanten.*

Hennes sätt att inse att det fungerar för ett godtyckligt antal bitar är en form av induktionsbevis men detta kan vi komma tillbaka till vid ett annat tillfälle.

DPL 9

För Dialoger om problemlösning, DPL, ges denna gång några problem med schackbräden. Dessa kan demonstreras konkret även om man i uppgift 3 kanske inte bör använda det finaste spelet. Problemen är givna av Mats Andersson.

1. En dominobricka täcker två intilliggande rutor på ett schackbräde. Är det möjligt att lägga ut 31 brickor så att två motstående hörn av brädet blir kvar otäckta?

2. Tänk dig ett schackbräde där man på måfå markerar en svart och en vit ruta. Kan man täcka de återstående 62 rutorna med 31 dominobrickor?

3. Ett schackbräde är stympat om man sågat bort en ruta, vilken som helst. Visa att man kan täcka ett stympat 8x8-bräde med stympade 2x2-bräden.

4. Läraren säger en fredag:
– Jag ska vara hygglig och meddela er att ni någon morgon nästa vecka kommer att få ett oförberett skriftligt läxförhör.
Vilka morgnar kan komma på fråga?

5. Vi har tre kort. Ett av korten är svart på båda sidor och ett är vitt på båda sidorna. Det tredje kortet är svart på en sida och vitt på den andra. Lägg korten i en säck och ta sedan upp ett kort på måfå. När du tittar på den ena sidan så är den vit. Vad är sannolikheten för att dess baksida också är vit?