

Problemafdelningen

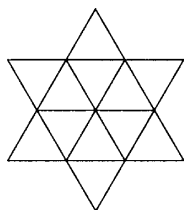
Lars Mouwitz

Spännande problem finns att hitta på olika håll. 2701–2703 kommer från tidigare omgångar av Kängurutävlingen (se Nämnaren nr 2 och 4, 1999). 2704 och 2705 är hämtade från Högskoleprovet hösten 1999. Kommentarer och lösningar till dessa problem presenteras i nästa nummer.

2701 Triangelräkning

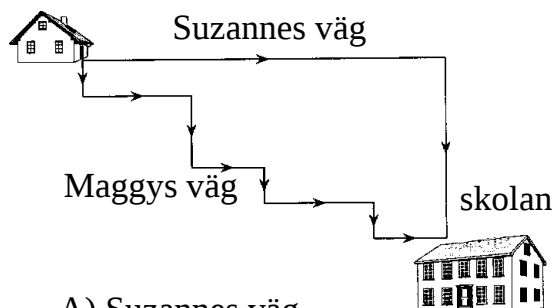
Hur många trianglar kan man se i denna figur?

- A) 12
- B) 6
- C) 14
- D) 20
- E) 18



2702 Skolvägsfundering

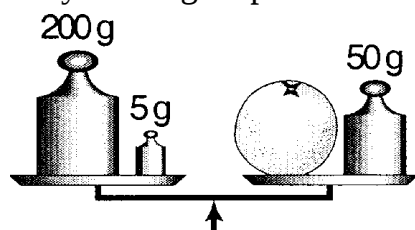
Suzanne och hennes syster Maggy går varje dag till samma skola, men de föredrar att gå olika vägar. Vilken väg är längst?



- A) Suzannes väg
- B) Maggys väg
- C) Det beror på vilken dag
- D) De två vägarna är lika långa
- E) Det går inte att avgöra

2703 Viktproblem

Hur mycket väger apelsinen?



- A) 200g
- B) 205g
- C) 155g
- D) 255g
- E) det kan man inte veta

2704 På kollisionskurs

Två bilister, Andersson och Persson, startar samtidigt i var sin ände av en väg och kör i riktning mot varandra. Efter hur lång tid möter de varandra?

- (1) När Andersson hunnit 15 km har Persson hunnit 30 km.
- (2) Vägen är 12 mil lång och Persson kör dubbelt så fort som Andersson.

Tillräcklig information för lösningen erhålles

- A i (1) men ej i (2).
- B i (2) men ej i (1).
- C i (1) tillsammans med (2).
- D i (1) och (2) var för sig.
- E ej genom de båda påståendena.

2705 Får och getter

Bette driver ett jordbruk där hon har får och getter som är antingen svarta eller vita. Hur stor andel av dessa djur är svarta?

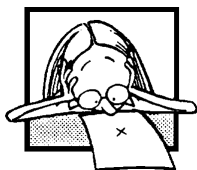
- (1) Av de djur som är svarta utgör fåren den största andelen, nämligen $3/4$.
- (2) 25% av djuren är getter.

Tillräcklig information för lösningen erhålles

- A i (1) men ej i (2)
- B i (2) men ej i (1)
- C i (1) tillsammans med (2)
- D i (1) och (2) var för sig.
- E ej genom de båda påståendena

2706 Sannolik punktinsats

Hur stor är sannolikheten att en punkt som placeras slumpmässigt i en kvadrat inte ska komma längre från något av kvadratens hörn än kvadratens sidolängd?



Problemavdelningen

Nämnamn nr 1, 2000

Några lösningar och kommentarer av Lars Mouwitz.

2701 Triangelräkning

Här finns risk att räkna dubbelt eller glömma något fall. Det finns anledning att vara systematisk och t ex utgå från att det finns tre möjliga storlekar på trianglar. Det finns 12 små, 6 mellanstora och 2 av den största, totalt 20 trianglar. Elever lägger ibland in egna förutsättningar i uppgifter av denna typ, t ex att alla trianglar måste ha samma storlek eller att de inte får ha spetsen nedåt, och får då fel svar även om de utifrån sina förutsättningar tänkt rätt.

Ett sätt att göra uppgiften svårare är att ha ett svarsalternativ med fler än 20 trianglar. Då får man undersöka att man verkligen hittat alla när man funnit 20 st.

2702 Skolvägsfundering

Vägarna är lika långa.

Här leder intuitionen lätt fel, den "skrynkligaste" vägen uppfattas som den längsta. Ett sätt att utvidga uppgiften är att låta Maggy ändra riktning konsekvent med mer (alternativt mindre) än 90 grader och låta Suzannes väg vara oförändrad. Vilken väg blir då längst?

2703 Viktproblem

Apelsinen väger 155 gram.

Problemet åskådliggör en ekvationsuppställning. Balansvägen kan vara en bra metafor för likhetstecknets innebörd.

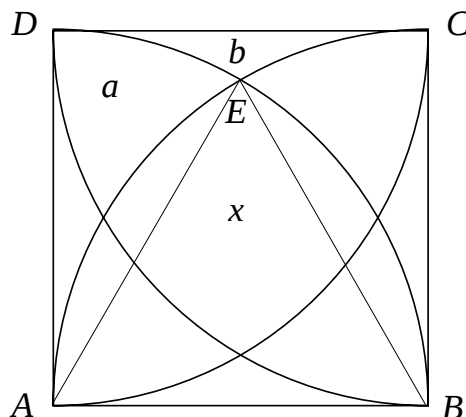
2704 På kollisionskurs

2705 Får och getter

I båda uppgifterna är informationen otillräcklig. Här bryts mot det "kontrakt" som i allmänhet finns för problemlösning i skolans värld. Både lärare och elever utgår oftast från att det finns tillräckligt med information för att problemfrågan ska kunna besvaras. På samma sätt är våra läromedel uppbyggda. Eleven lär sig då att ställa frågan "Hur ska jag kombinera det givna så att frågan besvaras?". Men i Högskoleprovet ställs frågan: "Räcker det givna för att jag ska kunna besvara frågan?". Det senare förhållningssättet är betydligt mer avancerat och bör tränas mer! Problem bör inte alltid vara garanterat lösbare. Informationen kan mycket väl vara otillräcklig för att besvara just den fråga som ställs.

Ett sådant situationsproblem kan varieras genom att ställa andra frågor som "Vilken ytterligare information skulle jag behöva ha för att kunna besvara den fråga som ställs?" eller "Vilka andra frågor skulle jag kunna besvara med den information jag har?"

2706 Sannolik punktinsats



För att lösa detta problem måste vi försöka beräkna arean av området betecknat x . Denna kan beräknas utan användning av avancerad teori, men kräver en del goda idéer och visst algebraiskt arbete.

Vi sätter kvadratens sida till 1 längdenhet och markerar dess olika delar enligt figur. Vi kan konstatera att:

$$x + 4a + 4b = 1^2 \quad \text{dvs} \quad x = 1 - 4a - 4b \quad (1)$$

Ytterligare ett samband får vi genom att ta differensen av kvadratens area och kvartscirkeln med radien 1:

$$a + 2b = 1 - \frac{\pi}{4} \quad \text{dvs} \quad a = 1 - \frac{\pi}{4} - 2b \quad (2)$$

Om vi sätter in (2) i (1) får vi efter förenkling:

$$x = \pi + 4b - 3 \quad (3)$$

Vi drar nu de två hjälplinjerna AE och BE och kan konstatera att arean b är lika med kvadratens area minus arean av den liksidiga triangeln ABE , med sidan 1, och arean av de två cirkelsektorerna ADE och BCE . Eftersom vinklarna EAB och EBA är 60 grader så har sektorerna medelpunktsvinkeln 30 grader, och vi kan skriva:

$$b = 1 - \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

Insättning av (4) i (3) ger efter förenkling:

$$x = 1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 0,315$$

Kvadratens area är 1 areaenhet och den sökta sannolikheten blir då $x/1$, dvs ungefär 31,5 %.

Läsarna välkomnas att skicka in andra lösningar!