

Matematiken som vetenskap och lärande i matematik

Hans Wallin

Denna uppsats är baserad på en populärvetenskaplig Högtidsföreläsning i samband med Årshögtiden vid Umeå universitet i oktober 2008. Först beskriver jag vetenskapen matematik med hjälp av tre exempel som illustrerar det nära sambandet mellan matematiken och dess tillämpningar. Sedan diskuterar jag lärande i matematik där jag ger fyra exempel från en forskarskola i matematik med didaktisk inriktning.

Matematiken som vetenskap

Gösta Mittag-Leffler var för hundra år sedan en mycket inflytelserik svensk matematiker som efter en audiens hos påven Pius XI berättade att påven yttrat: "Matematiken är vetenskapens poesi, men på samma gång den fasta grunden för allt tänkande i tid och rum, ändligt och oändligt." Detta högstämda och kanske lite pretentiösa yttrande stämmer ganska väl överens med hur matematikerna själva ser på sin vetenskap. I Nationalencyklopedin beskrivs matematiken som "en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling."

All vetenskap bygger på observationer av världen omkring oss och på logiska resonemang. De vetenskapliga resultaten ska vara kommunicerbara i den meningen att andra ska kunna kontrollera hur resultaten uppnåtts. Vad är det då som kännetecknar matematiken, matematiska teorier, som vetenskap? En matematisk teori består av att man utgår från ett antal påståenden som man accepterar utan bevis (axiom) och sedan med logiska resonemang bevisar ett antal nya påståenden (satser). En matematisk teori behöver inte ha något med verkligheten att göra men är ofta ett mycket användbart hjälpmedel för att beskriva och förstå delar av verkligheten.

Matematiken har två sidor. Den är dels en abstrakt vetenskap, en skön konst med ett värde i sig, dels ett effektivt hjälpmedel för att beskriva och förstå den värld vi lever i och ett nyttigt hjälpmedel i vetenskap, teknik och ekonomi. Det betyder att matematiken har två sidor, en inåtriktad sida där man studerar matematiken för dess egen skull, den "rena matematiken", och en utåtriktad sida, den "tillämpade matematiken" där man använder matematiken inom andra vetenskaper och deras tillämpningar.

Matematikens två sidor går in i varandra, samverkar med och påverkar varandra. Jag ska belysa dessa två sidor av matematiken och hur de samverkar med hjälp av tre exempel. Det första exemplet handlar om materiens uppbyggnad och Platons former, det andra om begreppen hastighet och derivata och det tredje exemplet handlar om hemliga meddelanden och primtal.

Exempel 1: Materiens uppbyggnad och Platons former.

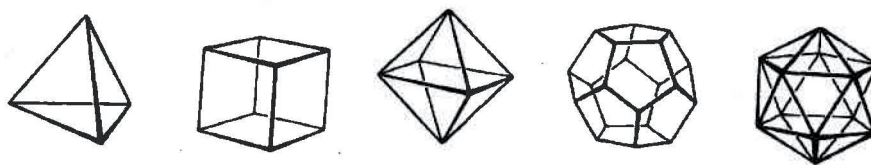
Platon (ca 400 f.Kr.) och andra av antikens greker var fascinerade av skönheten hos de regelbundna månghörningarna. Figur 1 visar de fem första regelbundna månghörningarna: en regelbunden trehörning (liksidig triangel), fyrhörning (kvadrat), femhörning (pentagon), sexhörning (hexagon) och sjuhörning. I en regelbunden månghörning är alla sidor lika långa och alla vinklar lika stora. När antalet hörn växer närmar sig den regelbundna månghörningen formen av en cirkel, "den fulländade formen", enligt grekerna.

Figur 1 De fem första regelbundna månghörningarna.



Antikens greker var även intresserade av de fem regelbundna polyedern (de platonska kropparna) som visas i Figur 2: tetraedern (begränsas av 4 liksidiga trianglar), kub (begränsas av 6 kvadrater), oktaedern (begränsas av 8 liksidiga trianglar), dodekaedern (begränsas av 12 pentagoner) samt ikosaedern (begränsas av 20 liksidiga trianglar). En regelbunden polyeder är en kropp som begränsas av regelbundna månghörningar som alla har samma antal hörn och lika långa sidor. En elegant sats i geometrin, som de grekiska geometrikerna kände till, säger att det bara finns fem regelbundna polyedrar.

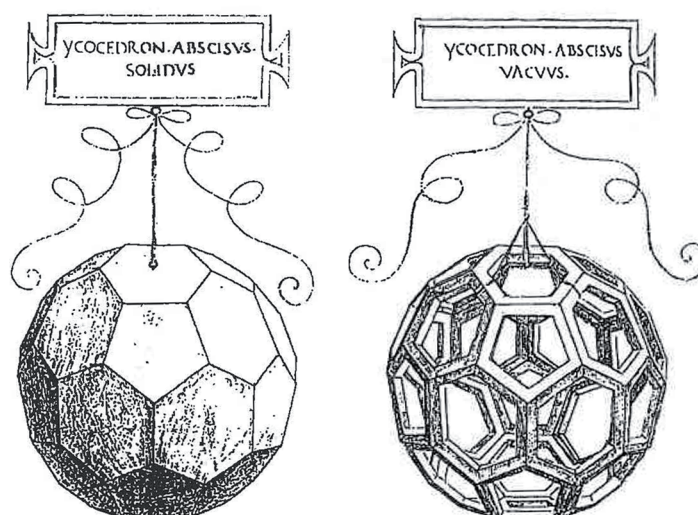
Figur 2 De fem regelbundna polyedernarna.



Grekerne såg skönheten hos de platonska kropparna och menade att även världens uppbyggnad präglas av skönhet. Platon ansåg att världen är uppbyggd av fem element, eld, jord, luft, eter och vatten, och att elementens minsta beståndsdelar, "atomerna", utgörs av de fem platonska kropparna och att dessa "atomer" är små byggstenar som inte kan ses med blotta ögat. Platon menade att elden är uppbyggd av tetraedrar, jorden av kuber, luften av oktaedrar, etern av dodekaedrar och vattnet av ikosaedrar.

Även Arkimedes (200-talet f.Kr.) fascinerades av de platonska kropparna och han gick ett steg längre och konstruerade ett antal halvregelbundna polyedrar som uppkommer om man från de platonska kropparna skär bort en del av hörnen. Om man utgår från ikosaedern, som har 12 hörn (vilket syns i Figur 2) och begränsas av 20 liksidiga trianglar, och skär bort en lämplig del av varje hörn, så uppstår den vänstra kroppen i Figur 3. Den består av 12 pentagoner och 20 hexagoner och har 60 hörn. Figur 3, som är en teckning av Leonardo da Vinci (ca år 1500), visar både den solida formen (till vänster) och skalformen (till höger).

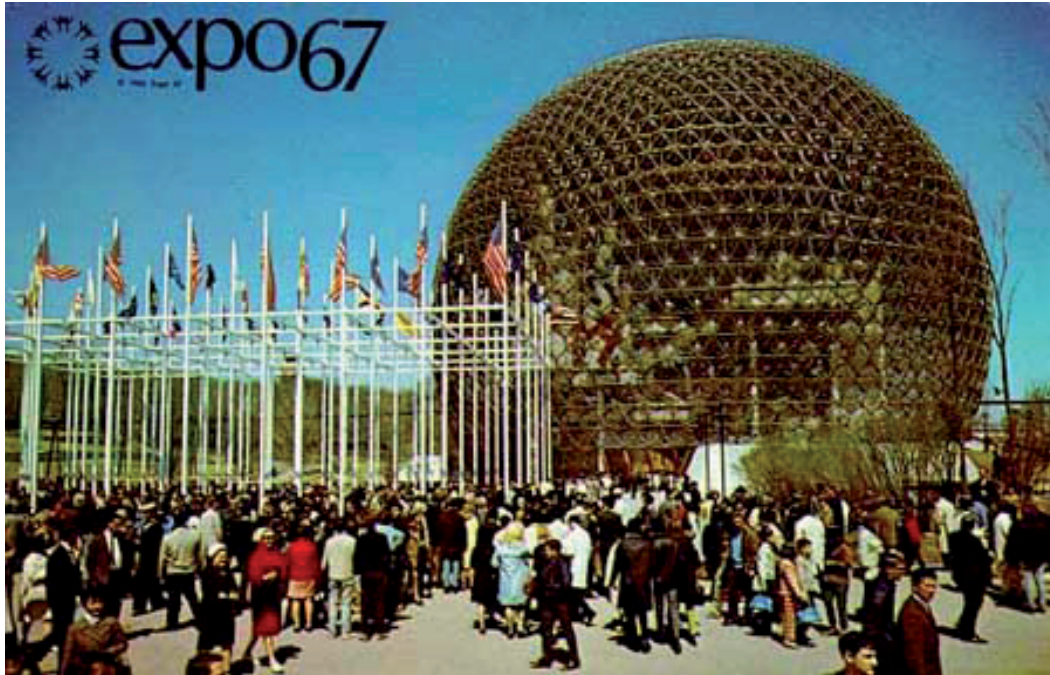
Figur 3



Leonardo da Vincis teckning av en av Arkimedes halvregelbundna polyedrar. Observera att en europeisk fotboll har samma ytform som den vänstra kroppen i figuren (bortsett från att fotbollen är rund), med t.ex. svarta pentagoner och vita hexagoner.

År 1985 upptäckte kemisterna en kolmolekyl som har den form som visas i Figur 3 (till höger) med en kolatom i vardera av de 60 hörnen. Denna upptäckt har fått stor betydelse och belönades med 1996 års Nobelpris i kemi. Kolmolekylen fick namnet buckminsterfulleren efter en arkitekt, Buckminster Fuller, som till världsutställningen i Montreal 1967 konstruerade en dom bestående av tusentals stavar monterade i ett mönster av hexagoner och pentagoner. Domen visas i Figur 4.

Figur 4 Domen vid världsutställningen i Montreal 1967.



Antikens matematiskt nyfikna greker studerade regelbundna månghörningar och polyedrar och halvregelbundna polyedrar, fascinerade av deras skönhet och matematiska egenskaper, men vi har sett exempel på att dessa geometriska former också dyker upp både i Platons lära om materiens uppbyggnad och i Nobelprisbelönad kemi om kolmolekyler och inom konst, arkitektur och sport.

Exempel 2: Hastighet och derivata.

Antag att du är ute och kör bil. I vardagsspråket talar vi om körtid, körd vägsträcka, bilens hastighet och acceleration. Om du efter 2 timmar har kört 150 km så är din medelhastighet under dessa 2 timmar $150/2=75$ kilometer per timme. Men hastigheten som du avläser på hastighetsmätaren vid en viss tidpunkt är medelhastigheten under den extremt korta tid det tar att blinka vid tidpunkten för avläsningen. Men vad är accelerationen och hur ser det matematiska språket ut?

För att besvara frågan inför vi körtiden t , mätt i timmar, och beteckningen $s(t)$ för den vägsträcka bilen tillryggalagt, mätt i kilometer, när du kört tiden t timmar. Matematikerna säger att vägsträckan $s(t)$ är en *funktion* av körtiden t . Antag att du först kört tiden t och sedan kört en stund till, tiden h . Då är $s(t+h)$ vägsträckan när du kört $t+h$ timmar och $s(t+h)-s(t)$ är den vägsträcka du kört från tiden t till tiden $t+h$. Uttrycket

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

anger bilens medelhastighet under tiden h från körtiden t till körtiden $t+h$. Låt nu t vara fixt och låt h komma närmare och närmare 0 så att tiden h mellan t och $t+h$ blir kortare än en snabb blinkning. Den angivna medelhastigheten stabiliserar sig då kring ett fixt värde som anger bilens hastighet vid tidpunkten t . Detta värde kallas *derivatan* i t av funktionen $s(t)$ och betecknas $s'(t)$. På samma sätt som $s'(t)$ definieras som derivatan av $s(t)$ definieras $s''(t)$ som derivatan av $s'(t)$. Man kallar $s''(t)$ *andraderivatan* av $s(t)$, och $s''(t)$ anger bilens acceleration vid tidpunkten t .

Sambandet mellan vardagsspråket och det matematiska språket kan sammanfattas i en tabell (Figur 5), där $s(t)$ är den vägsträcka du kört på tiden t timmar.

Figur 5

Vardagsspråk	Matematiskt språk
Körd vägsträcka	Funktion $s(t)$
Hastighet	Derivata $s'(t)$
Acceleration	Andraderivata $s''(t)$

Bilens hastighet vid tiden t ges av derivatan $s'(t)$ och accelerationen av andraderivatan $s''(t)$.

Det matematiska språk som vi nu infört för att förklara begreppen hastighet och acceleration är abstrakt och svårt att förstå från början och för många utgör det kanske en blockering mot fortsatta studier i matematik. Men det matematiska språket är effektivt, vilket Isaac Newton visade i slutet av 1600-talet när han utvecklade sin mekanik där han undersökte kroppars rörelse under inverkan av olika krafter.

Newton formulerade en rörelselag (krafterekvationen) som innebär att den kraft som påverkar en kropp (t.ex. en bil eller jorden) är lika med kroppens massa gånger kroppens acceleration. Han ville använda denna lag för att bestämma jordens bana runt solen. Men jordens acceleration kan uppfattas som andraderivatan av den funktion som anger jordens läge i förhållande till solen. Newton utgick från att den kraft som påverkar jorden huvudsakligen består av gravitationskraften från solen och denna kraft fick han från den gravitationslag som han formulerade. Utgående från sin rörelselag kunde Newton nu matematiskt beräkna att jorden skulle röra sig runt solen i en elliptisk bana, om vi enbart tar hänsyn till solens dragningskraft på jorden. Detta stämde med det Johannes Kepler tidigare visat utgående från observationer utförda av Tycho Brahe.

Newtons insats ledde till att hans matematiskt formulerade lagar för kroppars rörelse så småningom blev allmänt accepterade. Utgående från dessa lagar kan man bygga ett system av fysikaliska teorier och förklara olika fenomen i naturen, t.ex. tidvattensfenomen och det faktum att jordklotet är tillplattat vid polerna.

Newton löste det så kallade tvåkropparproblemet där man enbart tar hänsyn till solens dragningskraft på jorden. Men matematiken slutar inte här. Hur går det om man studerar trekropparproblemet där man även tar hänsyn till månens dragningskraft på jorden? Det matematiska problem som då uppstår har man utan slutgiltig framgång försökt lösa ända sedan Newtons dagar, men man har lärt sig mycket under resans gång. Och vad händer om man även tar hänsyn till planeternas dragningskraft på jorden och hur är det med solsystemets stabilitet? Man vet genom observationer att jorden rör sig runt solen i en bana som avviker litet från en ellips. Man vet inte om solsystemet är stabilt.

Sedan Newtons dagar har en stor del av fysikens teorier, t.ex. inom mekanik, ellära, magnetism, m.m., formulerats med hjälp av ett relativt litet antal matematiska ekvationer. Matematiken har blivit ett oundgängligt hjälpmedel för fysikens teoribildning. Omvänt har matematiken inspirerats av många fysikaliska problemställningar. Exempelvis införde Newton begreppet derivata för att han behövde det i sin fysikaliska teori. Newtons krafterekvation är ett exempel på det man kallar en differentialekvation och det finns idag en omfattande teori för hur man löser differentialekvationer.

I studiet av vår omvärld behöver man göra observationer och samla in fakta för att kunna formulera bra teorier, och man behöver teorier för att kunna tolka och förstå sina observationer. Om teorin inte stämmer med observationerna måste teorin ändras.

I exemplet med bilens hastighet studerade vi funktionen $s(t)$ där körsträckan $s(t)$ är en funktion av tiden t . Men funktionsbegreppet är mycket allmänt och förekommer i en mängd situationer. Exempelvis skulle $s(t)$ kunna stå för antalet bakterier i en viss bakteriekultur vid tiden t . Ytterligare ett exempel på en funktion får vi om vi noterar årsinkomsten för varje enskild svensk under ett visst år: årsinkomsten är en funktion av personen. I matematiken studerar man begreppen funktion och derivata som självständiga matematiska begrepp. De resultat man kommer fram till kan ha, men behöver inte ha, tillämpningar på verkligheten omkring oss. Vi ser här ett exempel på att matematiken är både abstrakt och generell, precis som det står i Nationalencyklopedin.

Vi har sett hur man kan precisera begreppen hastighet och acceleration med hjälp av det matematiska begreppet derivata. Begreppet derivata är viktigt inom matematiken och har en mängd tillämpningar vid studier av vår omvärld.

Exempel 3: Hemliga meddelanden och primtal.

Matematiker har i alla tider intresserat sig för matematiska egenskaper hos primtalen, talen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., utan en tanke på eventuella tillämpningar. Ett primtal är ett heltal större än 1 som inte kan delas upp i en produkt av heltal större än 1. Exempel på heltal som inte är primtal är 4, 6 och 8 eftersom $4=2 \cdot 2$ har faktorerna 2 och 2, talet $6=2 \cdot 3$ och $8=2 \cdot 2 \cdot 2$. Varje heltal större än 1 är ett primtal eller kan delas upp i en produkt av primtal. Exempelvis är $924=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Att dela upp talet 31758336954732, bestående av 14 siffror, är jobbigare men en dator klarar det snabbt.

Men nu kommer det intressanta. Tag två mycket stora primtal p och q , t.ex. bestående av cirka 200 siffror vardera. Det finns metoder för att med en dator snabbt hitta så stora primtal. Bilda talet $n = p \cdot q$. Det intressanta är att man inte känner till någon användbar metod för att hitta faktorerna p och q om man enbart känner deras produkt $n = p \cdot q$. Det betyder att om du väljer stora primtal p och q , så kan du offentliggöra ditt tal n och lita på att ingen kommer att kunna hitta dina tal p och q , som du håller hemliga. Detta utnyttjas i den metod för att skriva meddelanden i krypterad (hemlig) form som infördes år 1977 och som kallas RSA-metoden, namngiven efter upphovsmännens initialer.

RSA-metoden är enkel i den meningen att man kan offentliggöra krypteringsnyckeln, som talar om hur de som vill använda systemet ska göra för att skicka hemliga meddelanden. Det kan jämföras med att du kan

offentliggöra ditt telefonnummer så att de som vill kan ringa till dig. Däremot avslöjar man inte dekrypteringsnyckeln, som talar om hur man kan läsa (dekryptera) vad som står i det hemliga meddelandet. Att man kan offentliggöra krypteringsnyckeln beror på att man kan avslöja vad n är utan att någon kan hitta p och q . För att kunna dekryptera meddelandet behöver man veta vad p och q är. Matematiskt hänger det hela ihop med enkel talteori från 1600-talet.

Före RSA-systemets tid var man tvungen att hålla krypteringsnyckeln hemlig för utomstående. Ett säkert men tidsödande och kostsamt sätt var att överlämna krypteringsnyckeln personligen med expressbud.

Ända sedan antiken har man av matematisk nyfikenhet studerat en mängd frågeställningar om primtalens matematiska egenskaper. Vi har sett hur ett olöst problem om faktorisering av en produkt av två stora primtal i slutet av 1970-talet fått stor praktisk och kommersiell betydelse.

Lärande i matematik

Det har sagts att matematik är det mest kortfattade språk som människan uppfunnit. För att lära sig detta språk måste man börja på ett konkret, ofta experimenterande sätt. Först senare, undan för undan, bör den allmänna abstrakta sammanfattningen föras in för att synliggöra det kortfattade språkets effektiva och generella karaktär.

Om jag som liten grabb gick ut med 12 stenkulor för att spela kula (man spelade kula på 1940-talet) och kom hem med 35 kulor, så var jag mycket medveten om att jag hade vunnit 23 kulor, och detta var viktigt för mig att veta, men om jag i skolan skulle räkna ut $35 - 12$, så var jag kanske inte så intresserad – inställningen var då kanske: vem bryr sig?

Vi hänger upp vår kunskap och förståelse av abstrakt matematik på konkreta exempel från vår egen erfarenhet av den värld vi lever i. De två sidorna av matematiken, den inåtriktade och den utåtriktade, måste få samverka när man ska lära sig matematik.

Det är viktigt att försöka förstå elevers möjligheter och svårigheter att lära sig matematik. För att skapa kunskap om detta startade RJ (Riksbankens Jubileumsfond) 2001 en forskarskola i matematik med didaktisk inriktning, dvs. med inriktning mot lärande i matematik. En förhoppning är att forskningsresultaten från denna forskarskola ska stimulera till ytterligare forskning och att forskningsresultaten bl.a. ska användas i utbildningen av ämneslärare i matematik och av klasslärare. I det följande nämner jag i korthet några resultat från doktorsavhandlingar som skrivits av deltagare i forskarskolan.

Monica Johansson studerade i sin doktorsavhandling läroböcker och matematikundervisning. För att undersöka hur läroboken användes genomförde hon en klassrumsstudie i årskurs 8 och 9, där tre lärare ingick. Det visade sig att två av lärarna väldigt sällan använde andra källor än läroboken i sin undervisning, medan det var mer vanligt att den tredje läraren använde andra källor.

Ett exempel är att den tredje läraren använde ett informationsblad som visade kommunens taxa för vattenförbrukning. Avgiften beräknades enligt en formel $A \cdot x + B \cdot \sqrt{x}$, där x är vattenförbrukningen och A och B är vissa konstanter. Tillsammans med eleverna visade läraren bl.a. att:

4 gånger högre förbrukning gav 3 gånger högre avgift,

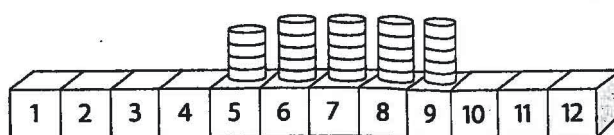
16 gånger högre förbrukning gav 10 gånger högre avgift,

jämfört med en förbrukning på 25 kubikmeter. Man diskuterade bl.a. orsaken till de "orättvisa" priserna.

Per Nilsson studerade elevers (12–13 år) strategi i ett slags summaspel som spelades med två tärningar. Eleverna delades upp i tvåmannalag som spelade parvis mot varandra i flera spelomgångar. I de första omgångarna var tärningarna vanliga kuber och senare var de rätblock med kvadratisk bas men avvikande höjd. Varje sida av tärningarna hade 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 ögon. Varje lag hade ett spelbord och 24 (eller 36) marker som placerades ut på spelbordet. Lagen slog varannan gång. Om ett lag hade marker på den summa som tärningarna visade, fick laget ta bort en av dessa marker, oavsett vilket lag som slog. Det lag som först blev av med alla marker vann.

Figur 6 visar andra spelomgångens placering av markerna för ett lag när den ena tärningens ögon var [2, 2, 2, 4, 4, 4], dvs. 2 ögon på tre av tärningens sidor och 4 ögon på de övriga tre sidorna, och den andra tärningens ögon var [3, 3, 3, 5, 5, 5].

Figur 6



Andra uppsättningen av 24 marker för ett lag när tärningarnas ögon var [2, 2, 2, 4, 4, 4] och [3, 3, 3, 5, 5, 5].

Eleverna som deltog hade ingen tidigare erfarenhet av sannolikhete Steori. Per Nilsson konstaterar:

Eleverna ändrade efter ett tag fokus och utvecklade idéer om olika summors sannolikheter.

Spelet provocerade elevernas resonemang genom att låta vissa centrala aspekter i situationerna variera mellan olika spelomgångar medan andra hölls konstanta.

Eleverna lärde sig matematik genom att experimentera.

Magnus Österholm studerade läsförståelsens roll inom matematikutbildning. De 95 deltagarna (gymnasieelever och universitetsstudenter) fick läsa två texter som beskriver och försöker förklara något för läsaren, en matematiktext och en historietext. Matematiktexten fanns i två versioner, en där man använde matematiska symboler och en där man inte alls använde symboler. Ena hälften av deltagarna läste texten med symboler och andra hälften den utan, medan samtliga läste historietexten.

Studier av korrelationer mellan resultat på läsförståelse visade en koppling mellan historietexten och matematiktexten utan symboler. Personer med hög läsförståelse för den ena texten tenderade också att ha hög läsförståelse för den andra. Samma förhållande gällde för dem som hade låg läsförståelse. Resultatet kan tolkas som att samma typ av förmåga utnyttjas vid läsning av dessa texter. Denna koppling till historietexten fanns inte när det gällde matematiktexten med symboler. Deltagarna läser alltså text med symboler på ett annorlunda sätt jämfört med andra texter. En jämförelse mellan de två matematiktexterna visade dessutom att läsförståelsen var bättre för texten utan symboler.

Magnus Österholms studie visar att det abstrakta matematiska symbolspråket kan vara svårt att förstå, åtminstone till en början, och att man behöver särskild träning i att läsa och tolka detta språk.

Jesper Boesen ställde i sin doktorsavhandling frågan: Vilken typ av kunskap (ut)värderas i skolmatematiken? Han skiljer mellan två typer av resonemang, imitativa resonemang (IR) och kreativa resonemang (KR). Användningen av IR bygger på ytliga egenskaper och räcker för att lösa standarduppgifter i standardformuleringar som eleven ofta känner igen från typexempel i läroboken. Användningen av KR bygger på matematiskt sett avgörande egenskaper i uppgifter som inte är standarduppgifter i standardformuleringar.

Jesper Boesen undersökte prov i matematik givna av lärare med de nationella proven i matematik. Han fann att lärarproven har en stark övervikt av uppgifter som kan lösas med IR, medan de nationella proven har ett mycket större inslag av uppgifter som fordrar KR. Han drar slutsatsen att de nationella proven i matematik inte har så stor inverkan på lärarproven, trots att lärarna tycker att de nationella proven är bra.

Vill du läsa mer?

Du kan läsa mer om Platons former i: I. Bergström, Platons former, Carlsson Bokförlag (2008).

Bergström, som själv är fysiker, ger en omfattande skildring av hur Platons former dyker upp i olika sammanhang. Figurerna 1 – 3 är hämtade från Bergströms bok.

Mer om hastighet och derivata och om hemliga meddelanden och andra delar av matematiken och dess tillämpningar finns i: H. Wallin, Den osynliga matematiken, Liber (2005).

En utförlig berättelse om hemliga meddelanden genom tiderna finns i: S. Singh, Kodboken, Månpocket (2003).

Resultat från RJs forskarskola presenteras i: G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby och H. Wallin (red), Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola, NCM, Göteborgs universitet och SMDF, Linköping (2009).

Figur 6 är hämtad från denna bok.