Nämnaren
*på nätet*

# Bilden av en ekvation

Text och bild:
Lasse Berglund

Ett binom i kub kan skrivas $(a+b)^3$. Om man öppnar upp denna kub får man:

$$(a+b)^3 \;=\; (a+b)(a+b)(a+b) \;=\; a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$$

Låt oss utnyttja detta samband i en betraktelse över en ekvation av tredje graden. Redan på 1500-talet kunde italienska matematiker visa att en allmän tredjegradsekvation går att lösa exakt, dvs det går att ange lösningen i de givna koefficienterna. Lösningsformeln är dock så komplicerad att idag används oftast andra metoder. Om koefficienterna emellertid är tillräckligt snälla, kan man enkelt lösa och även geometriskt tolka en fullständig tredjegradsekvation.

Låt oss därför lösa ekvationen

$x^3 + 12x^2 + 48x = 3800.$

Vi sneglar på binomet ovan och skriver om koefficienterna.

$x^3 + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 4^2x = 3800$

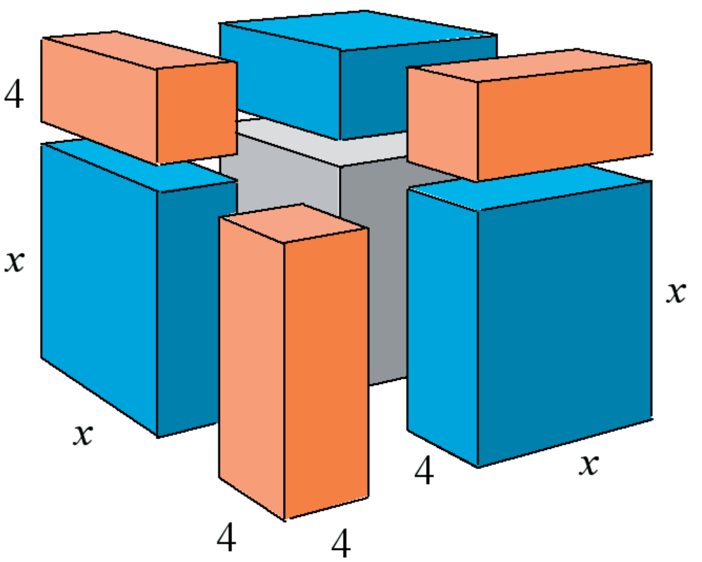
Från figuren till höger framgår följande:

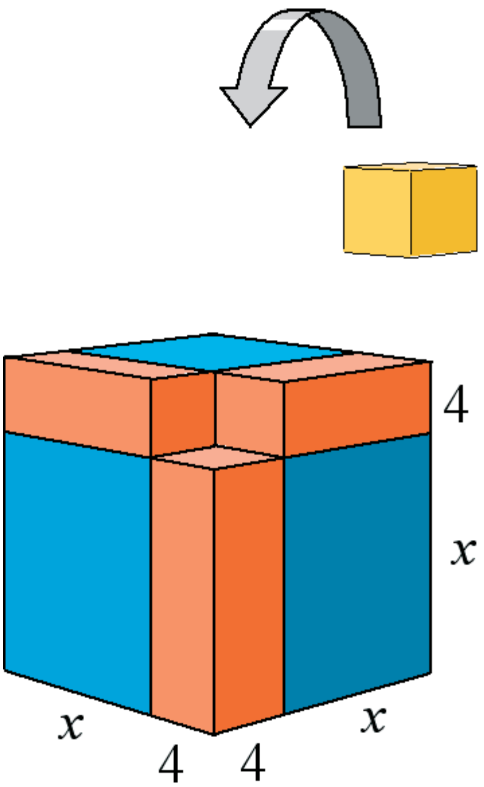
$3 \cdot 4x^2$ motsvarar tre blåa rätblock med en kvadratisk basyta $x^2$ och en sidlängd på 4 cm.

$3 \cdot 4^2x$ motsvarar tre röda rätblock med en kvadratisk basyta $4^2$ och en sidlängd på $x$ cm.

$x^3$ motsvarar den gråa, lite skymda kuben.

Dessa sju stycken rätblock, tre blåa, tre röda och ett grått, har den sammanlagda volymen 3800 cm³.




Frågan som ställs i ekvationen är enligt denna geometriska tolkning: hur lång är sidan i den gråa kuben? Om man föser ihop rätblocken så som visas i figuren till vänster, framgår att dessa sju rätblock utgör en kub; nästan. Lämplig lösningsstrategi blir därför att kubkomplettera. Vi adderar alltså $4^3 = 64$ till båda leden och får:

$x^3 + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 4^2x + 64 = 3800 + 64$

Från figuren framgår att vänsterledet i ekvationen har blivit en kub med sidlängden $(x + 4)$. Efter denna listiga komplettering kan ekvationen nu kompakt skrivas:

$$(x+4)^3 = 3864$$

Vi drar tredjeroten ur båda leden.

$$x+4 = 3864^{1/3}$$

$$x = 3864^{1/3} - 4 \approx 11{,}69$$

Vi har funnit att den gråa kubens sidlängd är 11,7 cm. Annorlunda uttryckt; vi har utan några approximationer, enbart med hjälp av några klossar, löst en fullständig tredjegradsekvation.