Nämnaren
på nätet

Uppfinnarens kvadrat

Per-Eskil Persson

I mina yngre dagar,då jag hade mer ledig tid som jag kanske kunde ha använt bättre, roade jag med att göra dessa magiska kvadrater och hade till slut blivit så skicklig i det att jag kunde fylla rutorna i vilken magisk kvadrat som helst, av rimlig storlek, med en serie tal så snabbt som jag kunde skriva ner dem, arrangerade på så sätt att summorna av varje rad, horisontell, vertikal eller diagonal, skulle vara lika. Men då jag inte var nöjd med dessa, som jag betraktade som vanliga och lätta ting hade jag pålagt mig svårare uppgifter och lyckats göra andra magiska kvadrater med en mängd egenskaper och mycket märkligare.

…

Nästa gång jag besökte honom hade jag med mig en kvadrat av 8 som jag hade funnit bland mina gamla papper och som jag nu ger dig tillsammans med en redogörelse för dess egenskaper. Egenskaperna är:

1. *Varje rak rad (horisontell eller vertikal) med 8 tal adderade tillsammans ger 260, och hälften av varje rad hälften av 260.*
2. *Varje böjd rad med 8 tal som går upp och ner diagonalt [blå exempel i fig.], samt varje bruten böjd rad [tjockare rutor] med 8 tal, ger summan 260.*
3. *De fyra hörntalen tillsammans med de 4 mittalen ger 260.*

Så denna magiska kvadrat verkar perfekt i sitt slag. Men dessa är inte alla egenskaper; det finns 5 andra, märkliga som jag vid något tillfälle ska förklara för dig.

…

Jag gick hem och gjorde den aftonen följande magiska kvadrat av 16, som förutom alla de speciella egenskaperna hos 8×8-kvadraten dessutom hade detta:
Att ett kvadratiskt hål, som klipps i ett papper av en sådan storlek att det bara visar 16 av de små rutorna när det läggs på den större kvadraten, på samma sätt ger summan 2056 av de tal som visas, oavsett var det placeras på den större kvadraten.
Utan tvekan kommer du att erkänna att denna kvadrat av 16 är den ***mest magiskt magiska av någon magisk kvadrat som någonsin gjorts av en magiker.***

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Översättning ur brev från Benjamin Franklin, Philadelphia, till Peter Collinson, London. ”Letters and papers on philosophical subjects by Benjamin Franklin”, 1769.

Egentligen är det ganska orättvist mot Benjamin Franklin att bara kalla honom för uppfinnare. Han var i själva verket en oerhört mångsidig person och förtjänar också att benämnas publicist, politiker, statsman, ekonom, folkbildare, filosof, vetenskapsman och musiker. Från början var han känd som utgivare av och skribent i The Pennsylvania Gazette, och kom också att både författa och ge ut böcker. Snart blev han indragen i politiken och spelade en av de ledande rollerna vid bildandet av USA. Som representant för den nya staten tillbringade han en hel del tid i Europa, och blev mycket känd i Frankrike, som han förhandlade fram ett stödavtal med, och i England, där han blev hedersdoktor i Oxford.

Som politiker och folkbildare hade han stor betydelse för ”vanligt folk”. Hans insatser sträckte sig från att starta ett brandkårsväsende, bygga upp de första biblioteken med fri utlåning, starta ett sällskap för förbud mot slaveri till att grunda den första amerikanska akademin och bilda American Philosophical Society för att stödja vetenskapsmän i

Benjamin Franklin i pälsmössa

deras diskussioner och teorier. Han spelade också flera instrument och komponerade en del musikstycken.

Som vetenskapsman intresserade han sig främst för meteorologi och elektricitetslära. Han observerade bl a att oväder flyttade på sig, och försökte ta reda på vad åskväder egentligen var. I juni 1752 genomförde han det berömda, men livsfarliga experiment, som gjort honom känd för många. Genom att skicka upp en drake i ett åskmoln kunde han få fram gnistor, som visade att det rörde sig om ett elektriskt fenomen. Som tur var hade han förutsett faran och var inte jordad.

Franklin var en av pionjärerna när det gäller den moderna synen på elektricitet. Han fastslog att det bara fanns en slags elektricitet och inte flera slags "elektriska vätskor", och var den som införde plus och minus för polerna. Det var också i samband med detta som han gjorde en av sina mest berömda uppfinningar, åskledaren, som fungerar genom det som kallas spetsverkan (upptäckt av Franklin).

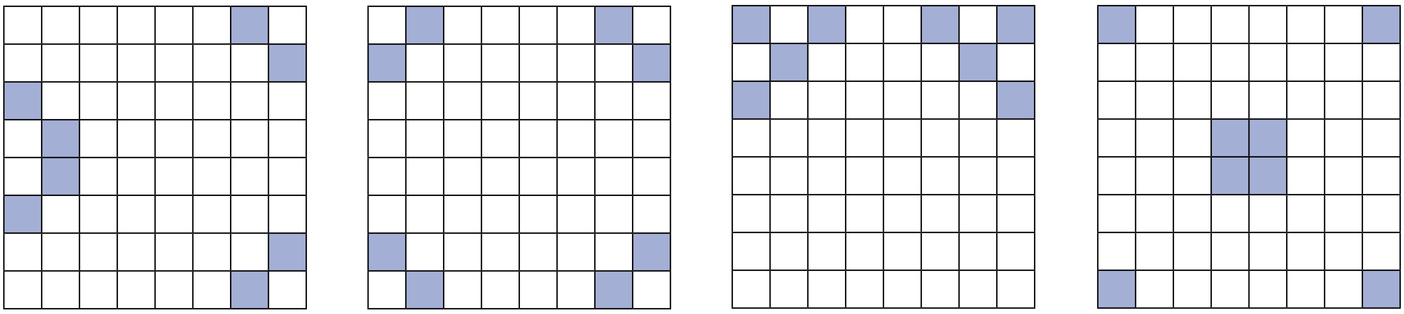
Några andra av hans uppfinningar är så vitt skilda saker som bifokala glasögon, en förbättrad spis, den böjliga urinkatetern och den märkliga glasorgeln. Och som han var mycket road av matematiska gåtor och problem, var det logiskt att uppfinningarna också kunde finnas inom detta område. Konstruktionen av magiska kvadrater var, åtminstone under vissa delar av hans liv, en passion han var stolt över. De något skrytsamma påståenden han gör i brevet tyder på detta, och frågan är väl om han verkligen kunde konstruera vilken magisk kvadrat som helst "så snabbt som han kunde skriva ner dem".

Franklins berömda blixtexperiment

Franklins 8×8-kvadrat

I brevet beskrev Franklin några av egenskaperna men nämner också att det existerar fler. Det finns faktiskt en mängd olika sätt på vilket man kan få summan 260 som kallas *kvadratkonstanten* eller 130 som är halva den. Inte bara raderna, utan också halvraderna har en konstant summa, och även talen i varje kvadratisk grupp med fyra tal har denna summa 130, var som helst i den stora kvadraten! Och sedan har vi de ovanliga "böjda raderna", som fungerar både uppifrån och ner eller från höger eller vänster. Här kommer några exempel på intressanta positioner av tal som har summan 260, se även den magiska kvadraten på sidan 1:

Man kan få 130 på ett flertal sätt, och genom att kombinera två sådana sätt kan man också få summan 260. Och om man lägger samman de båda diagonalerna, så får man såklart 520



som summa. Men det finns ett litet problem: Diagonalerna har var för sig inte summan 260, så Franklins kvadrat är faktiskt ingen äkta magisk kvadrat! Detta är lite smolk i glädjebägaren, eftersom det finns äkta 8×8-kvadrater, men det uppvägs väl av alla andra fantastiska egenskaper?

Franklin har inte beskrivit hur han gick till väga för att konstruera sin kvadrat, men det går att rekonstruera det. Den intresserade kan börja med att se hur talen 1 – 8 och 57 – 64 är anordnade i andra och tredje kolumnerna i kvadraten. Och därnäst talen 9 – 16 respektive 49 – 56 i första och färde kolumnerna. I de fyra högra kolumnerna slutligen är talen anordnande på liknande sätt, och man ser mönstret särskilt tydligt om man sammanbinder rutorna med streck i nummerordning.

Franklins 16×16-kvadrat

Så är det då dags att presentera den ”mest magiskt magiska av alla magiska kvadrater”:

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

Kvadratkonstanten är för en sådan kvadrat $2056 = 2^3(2^8+1)$, och man kan lägga märke till att faktorn $(2^8+1)= 2^{2^3}+1 = 257$ är ett så kallat *Fermat-primtal*.

Förutom egenskapen som Franklin beskriver i brevet har också varje 2×2 kvadrat i den stora kvadraten summan $514 = 2 \times 257$. Det gäller även t ex de fyra hörntalen och hörnen i kvadrater av storlek 4×4, 6×6 osv har också summan 514. Varje helrad har summan 2056 och varje halvrad 1028. Böjda och brutna böjda diagonaler samt deras paralleller har också summan 2056, men de båda heldiagonalerna blir $2056 + 2^7$ resp $2056 – 2^7$. Det överlåts åt läsaren att finna fler sätt att få 514, 1028 eller 2056 på. Det finns många!

Ett intressant sätt att betrakta Franklins båda kvadrater är att först minska alla tal i dem med ett och sedan omvandla dem till 6-siffriga respektive 8-siffriga binära tal (de senare representerar vad man kallar en *byte* på datorspråk). Ett mycket intressant mönster vad gäller ettornas och nollornas positioner framträder, speciellt om man söker ”komplementära” tal, alltså där ettor och nollor bytt plats med varandra. Det är också ett sätt att få syn på några av de principer Franklin använt när han gjorde sin konstruktion. I mångt och mycket är de desamma som för 8×8-kvadraten.

Konstruktion av magiska kvadrater av godtycklig storlek

Hur var det då med Franklins påstående att han snabbt kunde konstruera magiska kvadrater av vilken storlek som helst? Hade han kanske uppfunnit en generell metod eller algoritm med vilken han kunde göra detta? Ingen ledtråd har återfunnits bland hans efterlämnade papper, och förmodligen existerar det ingen sådan algoritm, enligt vad man idag känner till.

Om det enbart hade gällt magiska kvadrater av udda ordning, hade Franklin säkert kunnat visa sig på styva linan. Det finns flera generella algoritmer man kan använda, och ett par av dem är ganska enkla. Här visas den som fått namn efter matematikern Simon de la Loubère, men som denne lärde sig som fransk ambassadör i Siam. Den kallas även i en del böcker för "indiska metoden", och har varit känd långt tillbaka i historien.

Metoden går ut på att talen skrivs diagonalt snett uppåt till höger, med början på talet 1 som placeras i mittrutan på översta raden. När man kommer till randen av kvadraten, tänker man sig att det finns flera likadana runtom den första, och att man fortsätter i dem. Det ger till resultat hopp, uppifrån och ner samt från höger till vänster, se figur. När det så småningom tar emot, dvs det redan finns ett tal där man skulle skriva nästa, hoppar man bara ner en ruta och fortsätter sedan diagonalt som tidigare. Har man gjort rätt kommer sista talet alltid att hamna i mittrutan i understa raden. Principen visas i en kvadrat av ordning 5:

			2		
		1			
	5				
4					4
				3	
			2		

			2	9	
		1	8		
	5	7			
4	6				4
10				3	
			2		

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

När man gör detta första gången blir man kanske lite tveksam när man gjort heldiagonalen och ska placera talet 16. Här tar det emot, 11 är i vägen så 16 flyttas ner en ruta. Då hamnar förstås 17 i rutan överst till vänster och sedan fortsätter det som tidigare.

Men lite träning kan var och en med denna algoritm faktiskt konstruera magiska kvadrater av vilken udda ordning som helst, så snabbt som det går att skriva ner talen. Tyvärr har dessa kvadrater inga speciella egenskaper, utöver att de är äkta, utan är av ordinär typ. De är varken *panmagiska* eller *diaboliska*, som en del av dem jag beskrivit i mina tidigare artiklar, Magikerns kvadrat (Nämnaren 2004, nr 3) och Konstnärens kvadrat (Nämnaren 2005, nr 2). Sådana existerar för alla kvadratordningar större än 3, men konstruktionsmetoderna är förstås mer komplicerade.

Magiska kvadrater i undervisningen

Vad har man för nytta som matematiklärare av att känna till magiska kvadrater och deras konstruktion? För det första är dessa en del av matematikens kultur och går långt tillbaka i historien i många länder. De har på olika sätt använts och haft en betydelse för både lärda och lekmän. Att ha en kännedom om dessa fascinerande matematiska objekt är att veta något om den kultur matematiken är en del av.

För det andra ger magiska kvadrater rika möjligheter till spännande klassrumsaktiviteter, i vilka elever på ett annorlunda sätt kan träna samband mellan tal, generell talförståelse och aritmetik i olika former, att upptäcka och uttrycka mönster, utnyttja algebra med mera och detta faktiskt på hur hög matematisk nivå som helst. Som utgångspunkt för rika problem är magiska kvadrater utmärkta!

Slutligen handlar det om vackra matematiska samband och arrangemang som både innebär stort nöje och en njutning för sinnet. Som matematiklärare behöver jag hela tiden berika mig med matematikens skönhet för att behålla den glädje med ämnet som jag menar är en förutsättning för att jag ska kunna förbli den engagerade lärare jag önskar vara.