Nämnaren
på nätet

Navigering med geometri

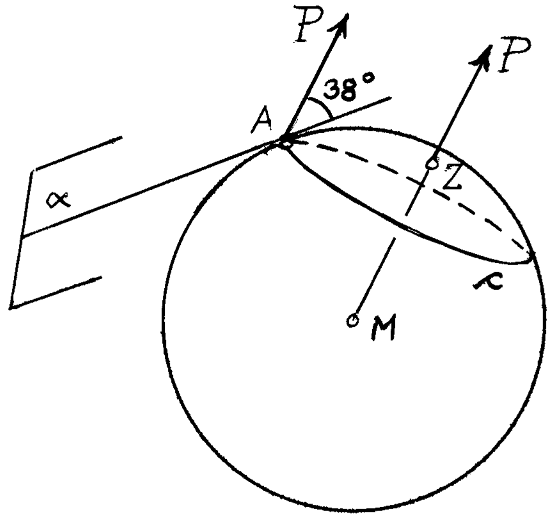
av Bengt Ulin

Tekniken att utnyttja satelliter har medfört häpnadsväckande förenklingar för navigering. I bilar och på båtar kan vi utnyttja moderna navigeringssystem för att bekvämt bestämma vår position. Under åren 1962-67 hade jag möjlighet att i samverkan med en navigatör från SAS arrangera kvällsövningar i årskurs 11 i att bestämma en position med hjälp av sextant och tabeller, en metod som kunde utnyttjas i luften då elektromagnetiska störningar förekom. Några år senare övergick SAS till datastyrd navigering.

Jag vill här först visa hur man med geometri kan utnyttja stjärnhimlen för navigering i flygplan eller till sjöss. Därefter ska vi se några exempel på hur man kan använda geometri för att bestämma sin position under en båtfärd.

Höjdvinkel

Till att börja med behöver vi veta vad som menas med höjdvinkel för en stjärna, betraktad från en ort A på jordytan. Vi ska därvid betrakta denna som sfärisk. I Figur 1 ligger A i det pappersplan som skär ut en storcirkel ur jordytan. M är jordens medelpunkt, Z är den punkt på jordytan från vilken en vald stjärna eller planet P syns stå i zenit. Z är alltså skärningspunkt till storcirkeln och en linje från M mot P. I figuren anger vinkeln 38° den vinkel som syftlinjen från A mot P bildar med horisontalplanet α genom A. Av symmetriskäl följer att alla andra punkter på jordytan, för vilka höjdvinkeln mot P (för tillfället) är densamma, 38°, ligger på en cirkel c. Vidare inser vi att syftlinjen från M mot P bildar rät vinkel med det plan som c tillhör.



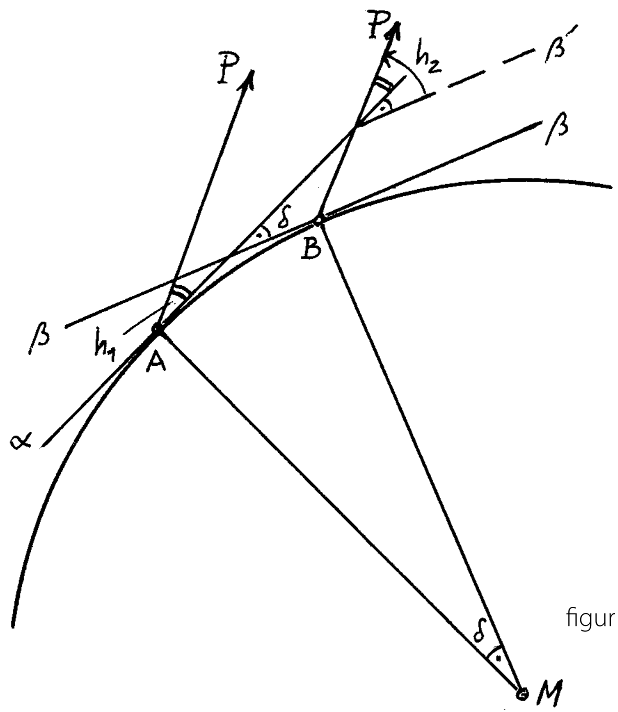
figur 1

I Figur 2 betecknar höjdvinkeln h_1 från orten A mot himlakroppen P. Från en ort B, som även den utan inskränkning kan läggas i pappersplanet, är höjdvinkeln h_2. B är belägen närmare Z än A, vilket medför $h_2 > h_1$. Vi sätter $\delta = h_2 - h_1$ .Med hjälp av linjen β' som i Figur 2 går parallellt med den linje β som tangerar storcirkeln i B inser vi att δ är lika stor som medelpunktsvinkeln vid M mot cirkelbågen AB.

Azimut

Observatören av P i orten A i Figur 1 ser himlakroppen P i ett visst väderstreck. Den vinkel i tangentplanet α som bildas av nordriktningen längs meridianen genom A och storcirkelbågen från A mot Z kallas för P:s azimut i orten A. Såväl höjdvinkel (*h*) som azimut (*az*) är lokala storheter som även beror av den tidpunkt vid vilken de två vinklarna bestäms.

Medan höjdvinkeln är maximalt 90°, kan azimut anta värden från 0° till upp emot 360°. *az* = 90° innebär att P befinner sig i rakt östlig riktning. Kunskaperna om höjdvinkel och azimut ska utgöra grunden för den navigeringsmetod som vi nu kommer till.

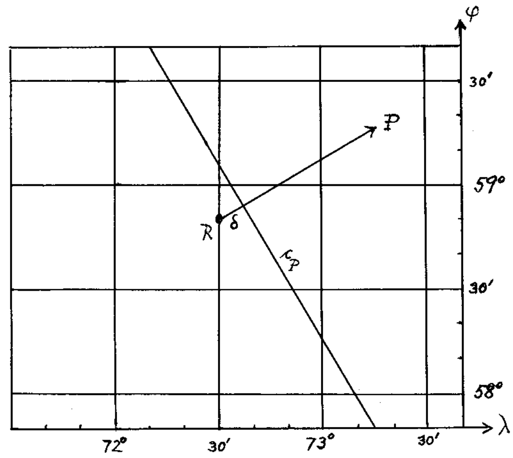


figur 2

Navigatören gör tre mätningar

Ombord på sitt flygplan hade navigatören (härefter kallad Bo) till sitt förfogande en *Nautical Almanac*, ett tabellverk som angav höjdvinkel och azimut till ett 50-tal stjärnor och planeter, sedda vid en vald tidpunkt från en given punkt R på jorden.

Man kunde välja longitud och latitud för vilken gitterpunkt R som helst i ett tätt koordinatsystem med meridianer och breddcirklar. Efter en uppskattning av sin ungefärliga position vid en snart kommande tidpunkt T gick Bo in med longitud och latitud för en vald referenspunkt R och antecknade i förväg *h*- och *az*-värdena för tre valda himlakroppar P, Q och S, gällande för R vid tidpunkten T. När denna tidpunkt närmade sig mätte Bo höjdvinklarna för P, Q och S. Därefter kunde han rita upp tre ortlinjer. Låt oss se hur Bo ritade ortlinjen för planeten P.



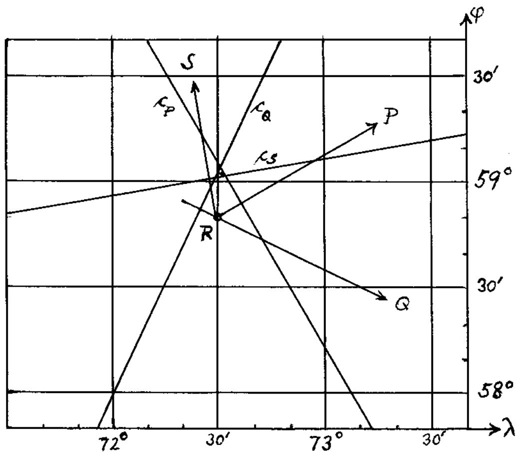
figur 3

Bo ritar ortlinjen för P

Som referenspunkt R i närheten av förmodad position vid den valda tidpunkten T har Bo valt en punkt som har longitud λ = 72° 30′ och latitud = 58° 50′. Det nautiska tabellverket anger azimut 59° och höjdvinkel 54° 13′ för P, sedd från R vid tidpunkten T. Bo har som sagt antecknat dessa värden liksom motsvarande värden för Q och S före tidpunkten T. När han nu omkring denna tidpunkt snabbt mäter höjdvinkeln till de tre himlakropparna visar sextanten höjdvinkeln 54°21′ för P. Bo erhåller alltså differensvinkeln $\delta = 21' - 13' = +8'$ beträffande P. Nu befinner sig flygplanet därför 8′ närmare punkten Z än referenspunkten R.

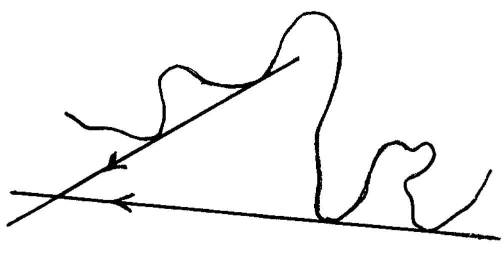
I Figur 3 är pilen mot P ritad med 59° azimut. Riktning lodrätt uppåt utgör nordriktning. Från R mäter Bo ut sträckan 8 mm i riktning mot P på sin karta, här enligt skalan 1′ = 1 mm. Därefter drar han linjen c_P vinkelrätt mot azimutlinjen. Denna linje approximerar inom det aktuella, begränsade området tillräckligt väl den cirkelbåge som exakt skulle vara en del av den cirkel, vars punkter ger samma höjdvinkel till P. Bo har alltså ritat den första ortlinjen.

De övriga två ortlinjerna ritar Bo på samma sätt. För Q och S, vars azimutvärden är 116° resp 351°, erhåller han $\delta = -5'$ resp $\delta = +11'$. Med dessa värden kan Bo dra ortlinjerna c_Q och c_S, se Figur 4.



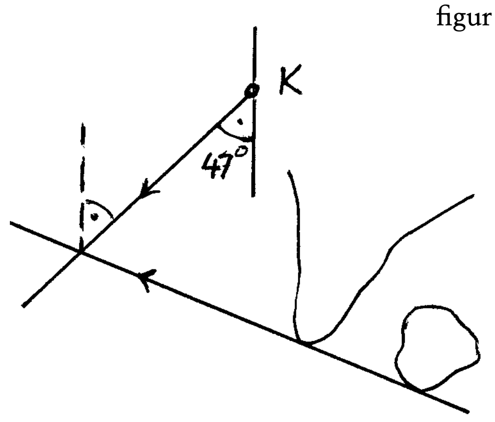
figur 4

I princip skulle positionen bli bestämd av två ortlinjer. Den tredje fyller en kontrollfunktion. Mitt inne i den triangel som de tre ortlinjerna bildar i Figur 4 sätter Bo en punkt. Den svarar med tillräcklig noggrannhet mot flygplanets position vid tidpunkten T: $\lambda = 72°\,31'$ och $\varphi = 59°\,02'$.


figur 5

Positionsbestämningar ombord på en båt

Nu ska vi klara oss med enbart sjökort, gradskiva och linjal. Om man i en viss riktning iakttar en fyr från en båt, säger man att fyren syns i en viss *bäring*. Bäringen är synonym med det azimutbegrepp som vi nyss använt. Om t ex en fyr F ses i bäring 270° från en båt B, så befinner sig fyren rakt väster om B, eftersom bäringen mäts från nordriktningen österut. Om man skulle se två objekt, t ex två uddar, i linje från B befinner sig båten på en *enslinje* till uddarna. Skulle båten råka ligga på två enslinjer som i Figur 5, så befinner den sig förstås i enslinjernas skärningspunkt. Man behöver då bara rita de två enslinjerna. Om man från båten ser ett kyrktorn K i bäring 47° och samtidigt befinner sig på en enslinje, så ritar man denna och avsätter som i Figur 6 vinkeln 47 medurs från sydriktningen genom K.



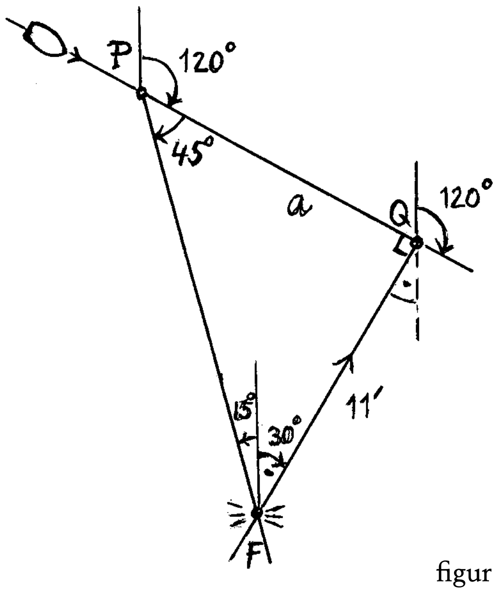
figur 6

Ytterligare exempel

1) ”*Fyrastreckspejling*” (så benämnd eftersom 4 ”streck” = 45°)
Vi färdas längs en rak route. I ett läge P pejlas en fyr F med känd position i bäring 165°. Bäringen till F har ökat till 210° då båten vid en senare tidpunkt befinner sig i en punkt Q. Man färdas i en känd riktning, säg nord 120° öst men är osäker på hur långt man färdats. Hur finner man då positionen Q? (Låt skalan vara 1′= 5 mm.)

2) ”*Krysspejling*”
Vi pejlar in två objekt F och G, t ex två fyrar, i rask följd. De pejlas i bäring $u = 244°$ respektive $v = 310°$. Fyrarna är förstås utplacerade på sjökortet.
Hur finner man positionen? (Välj givna placeringar för F och G.)

3) ”*Två bäringar och utseglad distans*”
En fyr F pejlas kl 10.00 i bäring 40°. Sedan vi färdats 10′ pejlas F kl 11.00 i bäring 325°. Routen är rätlinig med riktning nord 105° öst. Hur går routen och var befinner vi oss kl 11? (Låt 1 distansminut motsvaras av 5 mm på pappret.)

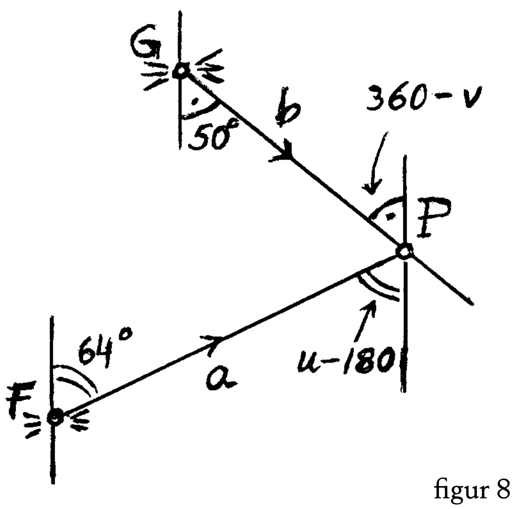


figur 7

Lösningar till exemplen

1) Triangeln FQP är rätvinklig i Q och har 45° vinkel vid F och P. Alltså är PQ på routen *a* lika lång som avståndet FQ från F till *a*, dvs 55 mm = 11 distansminuter. Vi mäter nu upp Q på avståndet 55 mm från P. Se figur 7.

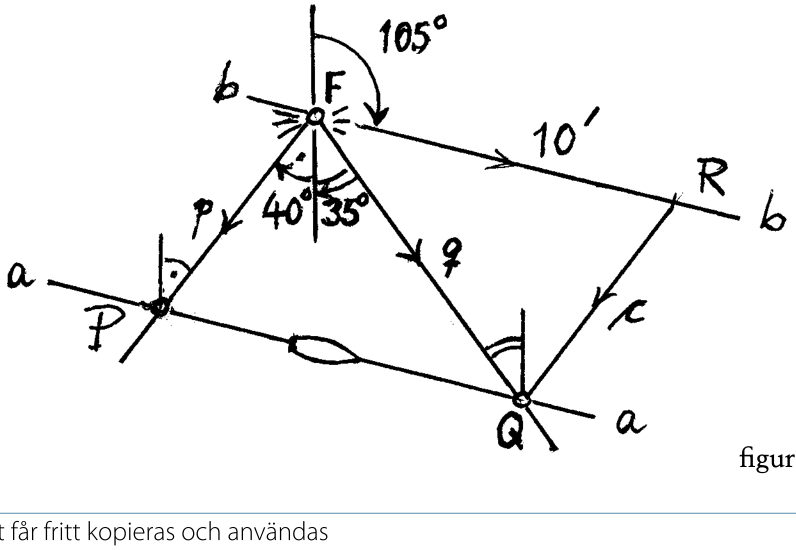
2) Med värdena $u - 180 = 64$ och $360 - v = 50$ kan vi utgå från F respektive G genom att utnyttja alternatvinklar: vi drar i Figur 8 ortlinjerna *a* och *b* från respektive fyr. Vi erhåller den sökta positionen P som skärningspunkten $a \times b$.



figur 8

3) Vi börjar med att sätta ut F som är given på sjökortet. Från F drar vi dels en linje *p* som bildar 40° vinkel med sydriktningen från F, dels en linje *q* som bildar 360° – 325° = 35° vinkel med sydlinjen från F, se figur 9.

Vi befann oss kl 10 i en punkt P någonstans på *p* och befinner oss kl 11 i en punkt Q någonstans på *q*. Vi ska nu se till att sträckan PQ blir 10′ lång, dvs 50 mm, och får routens riktning, nord 105° öst. För att åstadkomma detta drar vi genom F den linje *b* som är parallell med routen. På *b* avsätter vi från F sträckan 10′ = 50 mm i båtens färdriktning, i figuren åt höger till punkten R. Vi parallellförskjuter nu sträckan FR genom att dra linjen *c* parallellt med *p*. Vi erhåller därvid den sökta positionen $Q = c \times q$ och kan dra routen *a* genom Q (Figur 9). Skärningspunkten $a \times p$ ger oss då P, den första positionen.



figur 9