Algoritmer i Treviso-aritmetiken.

Staffan Rodhe

1 Larte de labbacho

I Västerlandet trycktes de första böckerna i mitten på 1400-talet. Matematiska texter kunde nog anses vara besvärligare än de flesta andra för en boktryckare att hantera. Annorlunda trycktyper fick lov att konstrueras och matematiska uppställningar och bilder skulle noggrannt inpassas i texten. Själva tryckningen var också en tidsödande process. Det kunde ta mer än ett år att färdigställa en upplaga på några 100 exemplar av en bok som innehöll några hundra sidor.

Den första tryckta matematikboken hade titeln *larte de labbacho* (konsten att räkna) men brukar allmänt benämnas "Treviso-aritmetiken". Författarens namn är okänd. Tryckningen är i slutet av boken daterad till 10 december 1478. Det framgår inte om tryckningen påbörjades eller avslutades detta datum. Det står också nämnt att tryckorten är Treviso (strax norr om Venedig). Texten är skriven på veneto, ett språk, som härstammar från latinet och fortfarande talas i vissa delar av Italien. Boken innehåller 123 sidor som beskriver hur räkning med siffrorna skall genomföras. Bokens inledande text visar för vilka den var avsedd: "Här börjar en Practica, till mycket stor hjälp för alla som måste syssla med den kommersiella konst som kallas räkning."

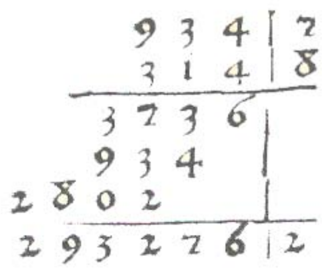
I den första halvan av boken finner vi de fyra räknesätten, addition, subtraktion, multiplikation och division. Additions- och subtraktionsalgoritmen påminner mycket om dagens algoritmer, medan multiplikation av två tal beskrivs på flera olika sätt och division visas med några metoder vilka båda påminner om dagens kortdivision. Bokens andra halva behandlar problem baserade på regula de tri, en proportionsräkning som idag har ersatts med ekvationslösning.

Vi ska här titta närmare på några av bokens exempel med multiplikations- och divisionsalgoritmerna.

2 Multiplikation

Multiplikationen 934×314 beskrivs på fem olika sätt:

1.



Den första ser precis ut som den vi har idag, förutom siffrorna 7, 8 och 2 som vi finner i högerspalten på uppställningen. Dessa tal visar hur man prövade med den s.k. 9-metoden om resultatet var riktigt. Metoden går ut på att man söker den 'entaliga siffersumman' av vardera faktorn (934 och 314) och produkten (293276) genom att utelämna 9:orna och efter ibland upprepad summering.

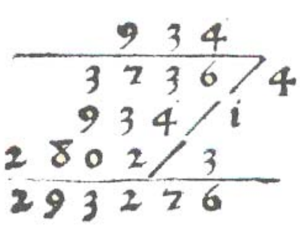
$$934 \quad — \quad 3+4=7$$

$$314 \quad — \quad 3+1+4=8$$

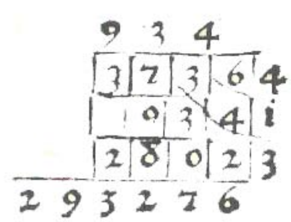
$$293276 \quad — \quad 2+3+2+7+6=20 \quad — \quad 2+0=2$$

Multiplicerar vi faktorernas siffersummor får vi 56, som har den entaliga siffersumman 2, dvs densamma som produkten. Därmed är det mycket troligt att multiplikationen är rätt räknad.

2.

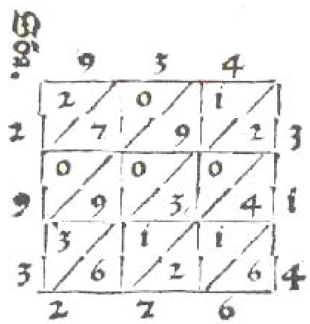


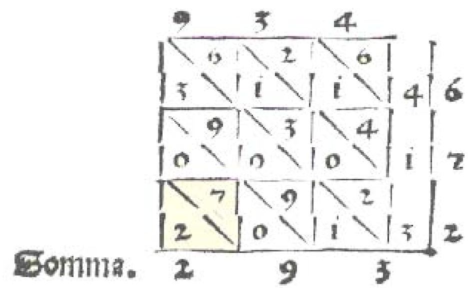
3.



De andra och tredje uppställningarna är snarlika. Multiplikatorn 314 är skriven så att man ser vilken rad i uträkningen som hör till vardera siffrorna 3, 1 och 4. Detta är nog av pedagogisk betydelse, men med våra moderna ögon kan det nog vara svårt att direkt avgöra om multiplikatorn är 314 eller 413.

4. **5.**





De fjärde och femte uppställningarna är också mycket lika. Jag anser att speciellt den fjärde är klart överlägsen de flesta andra multiplikationsalgoritmer. Den skulle med fördel kunna införas i svenska skolan. Problemet med minnessiffror vid multiplikation blir då ett minne blott!

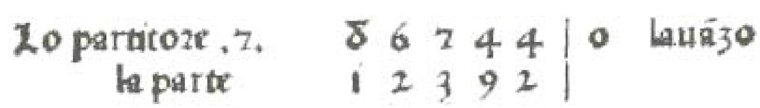
Vi kan finna en liknande algoritm hos den arabiske matematikern Al-Khwarizmi på 800-talet. Troligen är den av än äldre slag från indisk matematik. Algoritmen har fått det välfunna namnet 'jalusi-metoden' på grund av likheten med rutnätet hos italienska renässansfönster.

En kortare förklaring av uppställning 4 kan vara på sin plats: Inom varje ruta skrivs tiotalssiffran och entalsiffran in, t.ex. $3 \times 3 = 0|9$ och $4 \times 9 = 3|6$. Sedan adderas siffrorna diagonalt som $4 + 1 + 2 = 7$ (ingen minnessiffra) och $2 + 0 + 3 + 1 + 6 = 12$ (minnessiffran är 1 som förs över till nästa diagonala summering åt vänster). Resultatet 293276 utläses utanför rutnätet.

Om faktorerna har fler siffror än tre så gör man ett större rutmönster. Om faktorerna har olika antal siffror är det bara att fylla på med nollor så att antalet siffror blir lika. Pröva själv! Det går nästan inte att räkna fel!

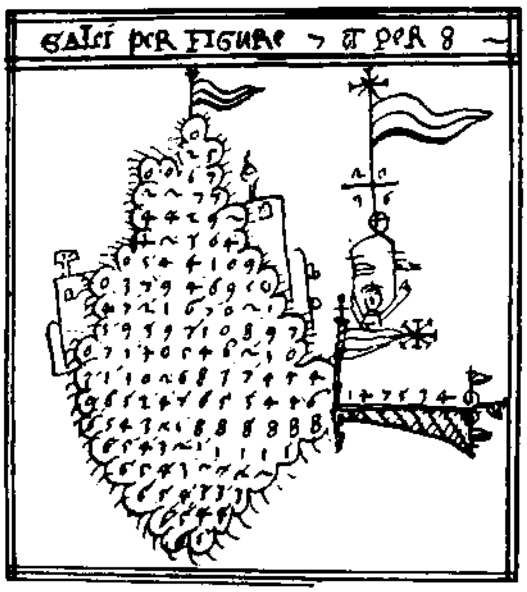
3 Division

Treviso-aritmetiken beskriver två divisionsalgoritmer. Den ena är rent retorisk och används bara vid division med ental. Räkningarna var förmodligen tänkta att utföras i huvudet utan skrivdon.



Denna uppställning visar att divisionen 86744/7 har kvoten 12392 och resten 0. Varje steg beskrivs i boken med ord som att 8 dividerat med 7 är 1 med en rest 1, som flyttas till 6:an. Sedan divideras 16 med 7 som är 2 med rest 2, som flyttas till 7:an o.s.v.

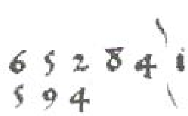
Den andra metoden kräver penna och papper och används även då divisorn består av flera siffror. Den har fått namnet 'galär-metoden' då uppställningen efter färdig räkning har liknats med ett segel till ett galärskepp.



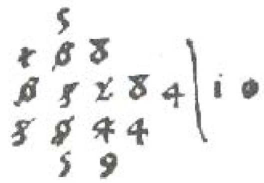
Uppställningen blir mycket kompakt med få tomrum lämnade. Detta kunde ha en stor ekonomisk betydelse då papper vid denna tid var en bristvara och hade ett högt pris.

Galär-metoden är den mest seglivade divisionsalgoritmen av alla och användes under flera hundra år. Fortfarande på 1700-talet kan vi finna den även i svenska läroböcker, t.ex. i Agrelius *Institutiones arithmeticae* som utkom i nio upplagor från 1655 till 1798.

Treviso-aritmetiken beskriver metoden mycket utförligt med flera exempel. Vi ska titta närmare på divisionen 65284/594. Även nu förutsätts mycket räkningar ske i huvudet jämfört med våra vanliga algoritmer för lång division. Första steget visar första siffran 1 i kvoten. Observera att positionen är mycket viktig. 5:an står under 6:an o.s.v.

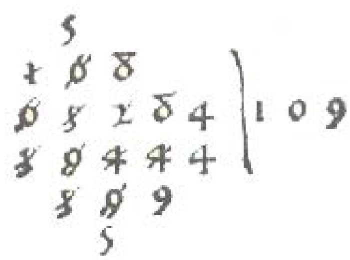


I nästa steg är hela divionen av 652 med 594 utförd. Använda siffror är strukna och 594 är flyttad till nästa position, denna gång under 588, som ännu är ostrukna.

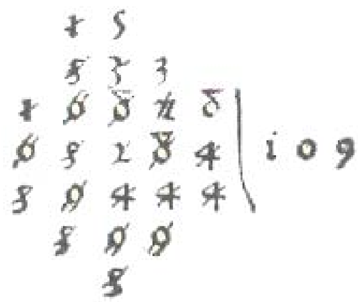


För att komma fram till denna uppställning har skriftställaren genomfört följande resonemang:

När första siffran 1 är skriven i kvoten är 5 i divisorn och 6 i dividenden förbrukade. De stryks därför. Resten 1 skrivs ovanför 6:an och förs ihop till nästa position till 15. Han subtraherar $1 \times 9 = 9$ från 15. Talet 15 och 9 är då förbrukade och stryks. Resten 6 skrivs över 5 i dividenden och förs ihop med nästa position 2 till 62. Han subtraherar $1 \times 4 = 4$ från 62. Talet 62 och 4 är då förbrukade och stryks. Resten 58 skrivs över det strukna talet 62 och förs ihop med nästa position 8 i dividenden till 588. Divisorn 594 flyttas en position enligt bilden. 588 dividerat med 594 går 0 gånger, varför 0 förs ut till kvoten. Divisorn 594 är då förbrukad och förs ut till nästa position, medan 588 förs samman med nästa position 4 i dividenden enligt bilden nedan.



Nästa steg är alltså att finna vad 5884 dividerat med 594 är. Detta ger nästa siffra 9 i kvoten. Givetvis har skriftställaren prövat sig fram för att för att finna denna 9. Denna prövning är emellertid inte redovisad i text. Så nu kan det sista steget i lösningen genomföras.



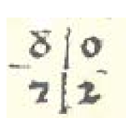
$9 \times 5 = 45$ dras från 58. Rest blir 13. Talen 58 och 5 stryks och ersätts av 13 skrivet ovanför 58. Talet 13 förs samman med nästa position 8 till 138. $9 \times 9 = 81$ subtraheras från 138. Talen 138 och 9 stryks. Resten 57 skrivs ovanför det just strukna 38 och förs samman med nästa position 4 till 574. $9 \times 4 = 36$ subtraheras från 574. Talen 4 och 74 stryks. Det är tillräckligt att notera resten 538 endast med att skriva 38 över det just strukna 74.

Resultatet kan nu utläsas som 109 med resten 538.

4 Prövning av division

I Treviso-aritmetiken prövas också om divisioner är korrekt uträknade. Detta är inte så vanligt i senare böcker. Metoden är dock intressant och kan göra räkning med divisionsalgoritmen lite mer spännande.

Om resten är 0 sker metoden helt enkelt omvänt mot prövningen av en multiplikation. De entaliga siffersummorna för divisorn och kvoten multipliceras. Den erhållna produktens entaliga siffersumma ska överensstämma med dividendens. För den tidigare givna divisionen 86744/7 med kvoten 12392 illustreras detta i Treviso-aritmetiken med en tabell över de entaliga siffersummorna.



Talet 0 betyder att resten är 0. De övriga talen erhålls genom följande beräkningar:

12392 (kvoten) — $1 + 2 + 3 + 2 = 8$

7 (divisorn) — 7

86744 (dividenden) — $8 + 6 + 7 + 4 + 4 = 29$ — $2 + 9 = 11$ — $1 + 1 = 2$

Det gäller att $8 \times 7 = 56 \quad — \quad 5 + 6 = 11 \quad — \quad 1 + 1 = 2$. Därför är uträkningen troligen korrekt.

Någon liknande tabell är inte gjord för ”vårt” galär-divisionsexempel, men skriftställaren nämner att 9-metoden kan användas.

Prövningen i detta fall skule baseras på följande beräkningar:

109 (kvoten) — $1 + 0 = 1$

594 (divisorn) — $5 + 4 = 9$ — 0

538 (resten!) — $5 + 3 + 8 = 16$ — $1 + 6 = 7$

65284 (dividenden) — $6 + 5 + 2 + 8 + 4 = 25$ — $2 + 5 = 7$

Om uträkningen är korrekt gäller följande likhet för de entaliga siffersummorna:

kvoten $\times$ divisorn = dividenden $-$ resten

I vårt fall blir vänsterledet $1 \times 0 = 0$ och högerledet $7 - 7 = 0$, vilket visar att uträkningen troligen är korrekt genomförd.